现代数学基础丛书 123

拓扑空间论

（第二版）

高国士 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 123

拓扑空间论

(第二版)

高国士 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者在一般拓扑学研究生教材的基础上修改和补充而成的，是拓扑空间理论方面的专著. 全书共八章，前四章是拓扑空间论的基础知识，后四章是对一般拓扑学两大课题“覆盖性质”与“广义度量空间”深入研究的成果，介绍了国内外，特别是我国学者在这方面的贡献. 为了使读者深入理解本书内容，在每章后安排了大量的习题. 作者的学生林寿主持了第二版的修订工作.

本书适合高等学校数学系高年级学生、研究生及研究工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑空间论(第二版) /高国士著. —2 版 —北京：科学出版社，2008

(现代数学基础丛书；123)

ISBN 978-7-03-021297-9

I. 拓… II. 高… III. 拓扑空间 IV. O189.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 031065 号

责任编辑：林 鹏 刘嘉善 张 扬 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 7 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2008 年 4 月第 二 版 印张：22 1/2

2008 年 4 月第一次印刷 字数：419 000

印数：1—3 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版序

2000 年前后, 一批对点集拓扑学发展做出过贡献的数学家相继去世, 如 R. Arens (1919—2000), A. Borel (1923—2003), J. J. Charatonik (1934—2004), B. Fitzpatrick (1931—1999), E. Hewitt (1920—1999), J. Isbell (1931—2005), F. B. Jones (1910—1999), M. Katětov (1918—1995), J. L. Kelley (1917—1999), K. Morita (1915—1995), J. Nagata (1925—2007), R. H. Sorgenfrey (1915—1996), A. H. Stone (1916—2000), M. H. Stone (1903—1998), J. W. Tukey (1915—2000), L. Vietoris (1891—2002), A. Weil (1906—1998) 等. 他们发展了 20 世纪初由 F. Hausdorff (1868—1942) 等开创的点集拓扑学, 描绘了第二次世界大战以来一般拓扑学的精彩画卷, 为风起云涌的 20 世纪增添了不可磨灭的壮丽篇章, 使之成为我们取之不尽的理论源泉, 在 C. E. Aull 和 R. Lowen [33, 34, 35] 主编的 *Handbook of the History of General Topology* 一书中对其历史功绩做了较好的评述.

我国开始进行较深入、扎实与规模化的点集拓扑学研究比德国、波兰、前苏联、美国等晚了半个世纪. 关于国内学者对点集拓扑学的阶段性贡献, 四川大学刘应明教授、蒋继光教授 [267, 268] 曾给出了简短的综述. 我国学者取得的拓扑学成果已载入 *Encyclopedia of General Topology* [180] 等专著, 提出的拓扑学问题被列入 *Open Problems in Topology* [292, 333] 等问题集, 解决了一些有影响的经典问题 [332], 这从一个侧面反映了我国一般拓扑学研究的影响力和所处的国际地位. 在中国已成功举办了 6 次国际一般拓扑学学术会议及一些专题会议. 这些会议已成为凝聚人心、展示形象、鼓舞士气、促进交流的重要平台. A. V. Arhangel'skiĭ 在《点可数覆盖与序列覆盖映射》[259] 的序言中写道: "我想提一提该专著的另一个令人高兴的方面, 它的出现标志了一般拓扑学在中国长期发展的成功, 这个发展造就了一群极具创造力的中国数学工作者, 使他们做出了对一般拓扑学主流方面闪光的重要贡献." 我以为, Arhangel'skiĭ 所说的 "一般拓扑学在中国长期发展的成功" 应主要归功于蒲保明 (1910—1988)①、高国士 (1919—2003)②、刘应明③、王国俊④、王戍堂、方嘉琳、杨守廉、戴牧民、蒋继光、吴利生等前辈始于 20 世纪 70 年代的科研实践与研究生培养工作.

① 蒲保明. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第一卷). 南京: 江苏教育出版社, 1994, 199–205.
② 高国士. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第三卷). 南京: 江苏教育出版社, 1998, 287–297.
③ 刘应明. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第四卷). 南京: 江苏教育出版社, 2000, 560–577.
④ 王国俊. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第五卷). 南京: 江苏教育出版社, 2002, 569–582.

高国士老师出生于中国历史上极不平凡的 1919 年, 一生历尽坎坷, 见证了 20 世纪难以计数的人间百态, 以坚忍不拔的意志, 创造了骄人的业绩, 是覆盖性质与广义度量空间理论卓有成效的探索者, 特别是自 20 世纪 70 年代末以来在国内积极推崇由 P. S. Alexandroff (1896—1982) 开创 [5]、A. V. Arhangel'skiĭ [21] 等继承的 "映射与空间相互分类" 的思想, 影响和带动了一批中青年数学工作者投身于该方向的研究, 为国内近 30 年来一般拓扑学的发展做出了奠基性的贡献.

提起点集拓扑学或拓扑空间理论, 在 F. Hausdorff 的划时代著作 *Grundzüge der Mengenlehre*[181] 出版之后, 不同年代的人们自然会想起 N. Bourbaki 的 *Topologie Générale*[57], K. Kuratowski 的 *Topologie*[239], J. L. Kelley 的 *General Topology*[232], 关肇直的《拓扑空间概论》[172], J. Dugundji 的 *Topology*[112], S. Willard 的 *General Topology*[411], 儿玉之宏、永见启应的《位相空间论》[233], J. Nagata 的 *Modern General Topology*[319], R. Engelking 的 *General Topology* [114], 蒋继光的《一般拓扑学专题选讲》[211] 等一批又一批各具风格的著作. 它们影响了一代又一代学子的拓扑学旅程. 本人在此向读者们, 尤其是年轻的数学工作者, 推荐高国士老师的《拓扑空间论》, 主要的理由是《拓扑空间论》集中代表了高国士老师从 20 世纪 60 年代起致力于一般拓扑学研究所取得的主要成果, 既反映了历史的脉络又具有鲜明的时代特色, 充分体现了高国士老师 "不回避难题以经受锻练、不无目的地引入新空间而致力于存在问题求解" [142] 的学术风格. 虽然在 "覆盖性质"、"广义度量空间" 等研究方向已有不少优秀的著作或教科书问世 [24, 69, 166, 309], 但该书在材料的处理上颇具特点, 它借鉴美国 "Moore 教学法" (R. L. Moore, 1882—1974) 的思想, 重视启发积极思维, 鼓励读者自己探索, 尽情展示 "映射" 在研究拓扑空间理论中的作用, 注重刻画我国拓扑学工作者的突出贡献, 引导读者快速地进入学科前沿.

高国士老师曾对该书做过校正, 希望能在再版中更正. 受高国士老师子女的委托, 本人主持该书的修订和再版事宜. 修订工作主要依据本人学习和在福建师范大学、宁德师范高等专科学校和漳州师范学院讲授该书的体会, 同时吸收了师兄、苏州大学恽自求教授、葛英教授, 广西大学陈海燕教授, 漳州师范学院李克典教授等多年来使用该书的经验和建议.《拓扑空间论》第二版力求秉承原书的研究风格与学术思想, 在高国士老师校正的基础上对部分内容做了修饰, 核实了绝大多数概念、结果的文献出处, 补充了覆盖性质与广义度量空间理论的若干新进展. 在第二版中若存在不当之处, 均由本人负责.

今年恰逢高国士老师 90 岁诞辰, 谨以此书的再版表达我们对高国士老师的怀念. 高国士老师一再告诫: 科研工作, 除了 "才" 与 "学" 外, 更要强调 "识", "识" 具有战略意义. 高国士老师的教诲、精神与情操已融入苏州的小桥流水之中, 洒进了我们的心田, 其人格魅力将继续伴随、并永远激励我们不断努力工作.

本次的修订和出版工作得到国家自然科学基金项目 "覆盖方法及其在粗糙集

理论中的应用” (项目编号 10571151) 的资助. 在此对所有关心《拓扑空间论》第二版出版的同行们, 特别是高国士老师的子女及我在四川大学和漳州师范学院的研究生们给予的支持与帮助, 表示衷心的感谢.

林 寿①

2008 年 1 月

于漳州师范学院数学与信息科学系

① 通信地址: 352100 福建省宁德市蕉城区蕉城南路宁德师范高等专科学校数学研究所.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

第一版序

本书是作者 1979 年开始招收一般拓扑学硕士研究生以来所用教材经过历年修改、补充而成, 是拓扑空间理论方面的专著.

本书前四章是拓扑空间论的基础知识, 自成体系. 可供需要了解拓扑空间论基础知识的数学系高年级学生及其他有关学科学生阅读. 后四章是一般拓扑学中两大课题 "覆盖性质" 与 "广义度量空间" 的深入研究, 希望能导向该课题的研究前沿, 可作为一般拓扑学的硕士、博士研究生的教材或参考书.

作者在 60 年代初致力于 "覆盖性质" 与 "广义度量空间" 的研究, 特别是 70 年代、80 年代间这方面的研究在国内外蓬勃开展, 作者身历其境, 有必要, 也有责任在介绍、评述国外学者成果时, 组织、纳入国内学者的成果以激励士气, 共攀科学高峰.

由各种不同背景产生的形形色色的拓扑空间呈分散、孤立的状态是很自然的. 通过适当的映射, 找出其间内在联系, 改变其呆滞状态使之出现生动活泼场面是行之有效的. 充分利用映射这一 "工具" 是本书的特点. 事实上本书是 Arhangel'skiĭ "映射与空间" 理论的发展和应用.

为了集中精力于上述两课题并由于作者知识有限, 一般拓扑学的其他课题如基数函数、箱拓扑、集论公理的引用等均未涉及. 与上述二课题有联系的可膨胀空间、Σ 积的正规性等问题有蒋继光的专著《一般拓扑学专题选讲》作专门研究, 本书也未涉及. 相应的有关论文均未录入参考文献.

在严谨的逻辑推导的同时, 适当照顾可接受性. 对书中久未引用的概念, 常以回忆方式提一下以便阅读.

习题是精心配置的. 有巩固教材的, 有补充、扩充教材的, 有些是定理证明要用到的简单结果, 有些是分散在教材各处的类似概念的汇集, 可资比较. 对教材中很少出现的概念 (如正则闭集、紧开拓扑), 配些简单练习让读者熟悉一下. 有少数较难的, 如证不出知道这结果也好 (有兴趣的读者可查所引论文).

作者才疏学浅, 耄耋著书. 希望能嘉惠后学而已. 脱漏、不足之处, 海内同行, 不吝指正.

陈必胜、葛英副教授及张建平、蔡伟元、杨晓华、蒋彤敏同志抄写、校对、复印全部稿件, 恽自求教授组织、安排整个出版事宜, 谨此致谢. 特别感谢苏州大学

数学系的资助. 不然, 本书是难以和读者见面的.

高国士
1999 年 6 月
于苏州大学数学科学学院

目　　录

预 备 知 识

0.1 集、关系和映射

两个**集** (set) A, B 的**并** (union)、**交** (intersection) 及**差** (difference) 分别表示为

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$
$$A - B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

这里 "$\in$"、"$\notin$" 分别表示 "**属于**"、"**不属于**". **空集** (empty set) 用 $\varnothing$ 表示, $A \cap B = \varnothing$ 表示集 A 与集 B 不交; $A - B = \varnothing$ 表示 $A \subset B$, 也就是 $x \in A \Rightarrow x \in B$. 符号 "$\Rightarrow$" 表示 "蕴含". 符号 "$\Leftrightarrow$" 表示 "当且仅当". $A \subset B$ 时称为 A 是 B 的**子集** (subset). 如果 $A \subset B$ 且 $A \neq B$ 称为 A 是 B 的**真子集** (proper subset), 记作 $A \subsetneq B$. 空集是任何集的子集.

以集为元素的集成为**集族**, 或简称为**族** (family 或 collection), 用花体字母表示, 如 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 等. 为了表示集族常利用**指标集** (index set), 如集族 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \varGamma}$, 或写作 $\{A_\gamma : \gamma \in \varGamma\}$, 这里 $\varGamma$ 是指标集. 由集组成的序列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$ 为集族的特例, 这时可表示为 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 或写作 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, 这里指标集是正整数集 $\mathbb{N}$, 或省去指标集记为 $\{A_n\}$ 或 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. 集族的并、交可表示为 $\bigcup_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$、$\bigcap_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$; 在集的序列情况则为 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (或 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$)、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (或 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$). 本书不讨论空集族的交集, 当说到有限个集的交时也自动排除 0 个集的交集.

设 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \varGamma}$ 是 X 的子集族, B 是 X 的子集, 则下列等式成立:

(i) $B \cup (\bigcap_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \varGamma} (B \cup A_\gamma)$,
$B \cap (\bigcup_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \varGamma} (B \cap A_\gamma)$;

(ii) $X - (\bigcup_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \varGamma} (X - A_\gamma)$,
$X - (\bigcap_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \varGamma} (X - A_\gamma)$.

(i) 称为**分配律** (distributive law), (ii) 称为 **de Morgan 公式** (de Morgan formula). 在通常讨论时, 所涉及的集都是某一给定集 X 的子集, 则对 $B \subset X$, 差集 $X - B$ 也称为 B 关于 X 的**补集** (complement). 从而上述 de Morgan 公式可叙述为: 并集的补集 = 补集的交集, 交集的补集 = 补集的并集.

给定集 X 与 Y, X 的元素 a 与 Y 的元素 b 形成的所有**有序对** (ordinal pair) (a, b) 组成的集称为 X 与 Y 的**积** (product), 记作

$$X \times Y = \{(a,b) : a \in X,\ b \in Y\}.$$

$X \times Y$ 的每一子集 R 称为**关系** (relation), 对每一个 $(a,b) \in R$, 记作 aRb. 关系 $f \subset X \times Y$ 称为 X 到 Y 内的**映射** (mapping), 如果对每一个 $x \in X$, 存在 $y \in Y$, 使 $(x,y) \in f$, 且 y 为 x 所惟一确定, 也就是 $(x,y) \in f$ 及 $(x,y') \in f \Rightarrow y = y'$. 以 $f : X \to Y$ 表示这一映射, 被 x 所确定的 y 记作 $f(x)$. 上述映射也可表示为 $f : x \mapsto f(x),\ x \in X,\ f(x) \in Y$. 集 $A \subset X$ 在映射 f 下的**像** (image) 为集

$$f(A) = \{y : y = f(x),\ x \in A\}.$$

集 $B \subset Y$ 在映射 f 下的**逆像** (inverse image) 或**原像** (preimage) 为集

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}.$$

集 $X, f(X)$ 分别称为映射 f 的**定义域**、**值域**.

映射 $f : X \to Y$ 称为**单映射** (injective mapping), 如果 $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$; 称为**满映射** (surjective mapping), 如果 $f(X) = Y$, 这时也称 f 是由 X **到** Y **上的** (onto) 映射. 如果既是单映射又是满映射, 则称为**一一对应映射** (bijective mapping), 这时可定义**逆映射** (inverse mapping) $f^{-1} : Y \to X$ 满足 $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

集在映射 f 下的像和逆像有下列关系式:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B, \qquad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

当 f 是满映射时, 有 $f(f^{-1}(B)) = B$; 当 f 是单映射时, 有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

设 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是一集族, 由指标集 Γ 到 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ 的满足 $f(\gamma) \in A_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ 的映射 f 的全体表示为 $\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, 称为**集族** $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ **的积** (product of families). 对每一 $f \in \prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, $f(\gamma) \in A_\gamma$ 称为 f 的第 γ 个**坐标** (coordinate), 记作 $f(\gamma) = x_\gamma$, 这样 $\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ 的元素 f 可以用所有的坐标 $x_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ 表示, 记作 $\{x_\gamma\}$, 或 $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ (有必要注明指标集或避免引起混乱时). $\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ 到 A_γ 的映射 $\boldsymbol{p}_\gamma$ 使对每一 $\{x_\gamma\} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, $p_\gamma(\{x_\gamma\}) = x_\gamma$, 这一映射称为 $\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ 到 A_γ 的**投影** (projection).

关系 $R \subset X \times X$ 称为 X 上的关系. X 上的关系称为**等价关系** (equivalence relation), 如果满足下列条件:

(i) 对每一 $x \in X, xRx$ (自反性);

(ii) 如果 xRy, 则 yRx (对称性);

(iii) 如果 xRy 及 yRz, 则 xRz (传递性).

设 $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, 且 $\gamma \neq \gamma' \Rightarrow A_\gamma \cap A_{\gamma'} = \varnothing$, 则称 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是 X 的一个**分解** (decomposition). X 上的等价关系 R 确定着 X 的一个分解: x, y 同属于 A_γ, 当且仅当 xRy; 相反, X 的一个分解确定着 X 上的等价关系 R: xRy 当且仅当对某一 $\gamma \in \Gamma$, $x, y \in A_\gamma$.

X 上的关系 $<$ 称为 X 上的**线性序** (linear order) 或**全序** (total order), 如果满足下列条件:

(i) 如果 $x \neq y$, 则 $x < y$ 或 $y < x$;

(ii) 如果 $x < y$, 则 $y < x$ 不能成立 (反对称性);

(iii) 如果 $x < y$, $y < z$, 则 $x < z$.

赋以线性序 (或全序) $<$ 的集 X 称为**线性序集** (linearly ordered set)、**全序集** (totally ordered set) 或**链** (chain), 有时记作 $(X, <)$. 点 $x_0 \in X$ 称为线性序集 X 的**最小元** (minimum element)(**最大元** (maximum element)), 如果对每一 $x \in X - \{x_0\}$, $x_0 < x$ $(x_0 > x)$.

线性序集 X 称为**良序集** (well-ordered set), 如果 X 的任何非空子集具有最小元.

线性序集 $(X, <)$ 到线性序集 $(Y, <')$ 上的一一对应映射称为**保序的** (order preserving), 如果对任意 $x, x' \in X$, $x < x' \Rightarrow f(x) <' f(x')$.

X 上的关系 $\leqslant$ 称为 X 上的一个**序** (order) 或**偏序** (partial order), 如果满足下列条件:

(i) 对每一 $x \in X, x \leqslant x$;

(ii) 如果 $x \leqslant y$ 及 $y \leqslant x$, 则 $x = y$;

(iii) 如果 $x \leqslant y$ 及 $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$.

赋以序或偏序 $\leqslant$ 的集称为**有序集** (order set) 或**偏序集** (partially ordered set), 有时记作 $(X, \leqslant)$.

设集 X 上具有线性序 $<$, 可对任意的 $x, y \in X$ 规定:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \quad \text{或} \quad x = y,$$

则得到 X 上的序 $\leqslant$. 所以每一线性序集可以作为有序集.

设集 X 上具有序 $\leqslant$, 如果对 X 的某子集 A 的任意两点 x, y 有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 可以规定:

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \quad \text{及} \quad x \neq y,$$

这样得到 A 上的线性序 $<$, 集 A 是有序 (偏序) 集 X 的线性序 (全序) 子集或链.

有序 (偏序) 集 X 的元素 μ 称为集 $A \subset X$ 的**上界** (upper bound), 如果对每一 $x \in A$, $x \leqslant \mu$; 称为集 A 的**上确界** (supremum), 如果 μ 是 A 的上界且对 A 的任一上界 ν 都有 $\mu \leqslant \nu$. **下界** (lower bound) 与**下确界** (infimum) 的定义是类似的. 上确界、下确界分别用 sup, inf 表示.

有序 (偏序) 集 X 的元素 m 称为 X 的**极大元** (maximal element), 如果 $m \leqslant x \in X \Rightarrow m = x$.

对线性序集 $(X, <)$ 及 $a, b \in X$, 分别称集合

$$\{x \in X : a < x < b\} \quad 与 \quad \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\}$$

为以 a, b 为端点的**开区间** (open interval) 与**闭区间** (closed interval), 并且分别记为 (a,b) 与 $[a,b]$; 类似可以定义**半开区间** (half-open interval)、**半闭区间** (half-closed interval) $(a,b]$ 与 $[a,b)$. 对 $a \in X$, 记

$$(-\infty, a) = \{x \in X : x < a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in X : a < x\}$$

称为 X 的**开射线** (open ray); 类似可以定义**闭射线** (closed ray) $(-\infty, a]$ 与 $[a, +\infty)$. 如果 X 有最小元 a_0, 则 $(-\infty, a) = [a_0, a)$; 如果 X 有最大元 b_0, 则 $(a, +\infty) = (a, b_0]$.

0.2 基数与序数

集 X, Y 称为**等势的** (equipotent), 如果存在由 X 到 Y 上的一一对应映射. 对每一集 X 给以一个**基数** (cardinal number) $|X|$, 使 $|X| = |Y|$ 当且仅当 X, Y 是等势的. 有限集的基数定义为此集的元素的个数, 称为有限基数; 相反的情况称为无限基数. 所有正整数所成集 $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$, 即 $|\mathbb{N}| = \aleph_0$; 所有实数所组成集 $\mathbb{R}$ 的基数称为**连续统的势** (cardinal number of continuum), 记作 $\mathbf{c}$, 即 $|\mathbb{R}| = \mathbf{c}$. 一个集是**可数的** (countable), 当且仅当它是有限集或具有基数 $\aleph_0$.

关于基数的和与积规定如下: 两个基数 m, n 的**和** (sum of cardinal numbers) $m + n$ 规定为集 $X \cup Y$ 的基数, 这里 $|X| = m$, $|Y| = n$ 且 $X \cap Y = \varnothing$. m, n **的积** (product of cardinal numbers) mn 规定为集 $X \times Y$ 的基数, 这里 $|X| = m$, $|Y| = n$. 对每一基数 m, 2^m 规定为集 X 的一切子集所成集族的基数, 这里 $|X| = m$. 可以证明 $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$. 更一般地, 可以规定 n^m 为所有 X 到 Y 内的映射所成集的基数, 这里 $|X| = m$, $|Y| = n$. 可以证明:

$$\begin{aligned} &n^{m_1+m_2} = n^{m_1} \cdot n^{m_2}, \\ &(n_1 \cdot n_2)^m = n_1^m \cdot n_2^m, \\ &(n^{m_1})^{m_2} = n^{m_1 \cdot m_2}. \end{aligned}$$

关于两个基数大小规定如下: 设 m, n 是两个基数, $|X| = m$, $|Y| = n$, 规定 $m \leqslant n$ (或 $n \geqslant m$), 如果存在由 X 到 Y 内的单映射. 由 **Cantor-Bernstein 定理**: $m \leqslant n$ 及 $n \leqslant m \Rightarrow m = n$. $\aleph_0$ 是**最小的无限基数** (minimal infinite cardinal number). 两个基数, 如果至少有一个是无限基数, 则它们的和或积等于其中非较小的一个 (在积的情况这两个基数都异于零), 特别有

$$m + m = mm = m, \quad m \geqslant \aleph_0.$$

如果 $m \leqslant n$ 且 $m \neq n$, 则规定 $m < n$ (m 小于 n). 可以证明, 对每一个基数 m, 有 $m < 2^m$, 特别有 $\aleph_0 < \mathbf{c}$. **最小的不可数基数** (minimal uncountable cardinal number) 记作 $\aleph_1$. 设有基数的任意集合 $\{m_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 且 $|\Lambda| < m$, 每一 $m_\alpha < m$, 如有 $\sum_{\alpha\in\Lambda} m_\alpha < m$ 时, 则称基数 m 是**正则基数** (regular cardinal number). 例如, $\aleph_0$, $\aleph_1$ 都是正则基数.

显然, $\aleph_1 \leqslant \mathbf{c}$. 假设 $\aleph_1 = \mathbf{c}$ 称为**连续统假设** (continuum hypothesis), 简记为 CH.

线性序集 X, Y 称为**相似的** (similar), 如果存在由 X 到 Y 上的保序映射. 对每一线性序集给一个**序型** (order type) $o(X)$, 使 $o(X) = o(Y)$ 当且仅当 X, Y 是相似的. 良序集的序型称为**序数** (ordinal).

两个序数 α, β 的大小规定如下: 设 $o(X) = \alpha$, $o(Y) = \beta$, 如果存在 $y_0 \in Y$, 使 X 与集 $\{y : y \in Y,\ y < y_0\}$ 是相似的, 则称 α 小于 β 或 β 大于 α, 记作 $\alpha < \beta$ 或 $\beta > \alpha$. 可以证明序数所成集按关系 $<$ 是良序的.

规定空集 $\varnothing$ 的序数为 0, 这是最小的序数. 有限良序集的序数规定为此集的元素的个数, 称为**有限序数** (finite ordinal number); 相反的情况称为**无限序数** (infinite ordinal number). 正整数集 $\mathbb{N}$ 按自然顺序是良序的, 规定 $o(\mathbb{N}) = \boldsymbol{\omega}$, 这是**最小的无限序数** (minimal infinite ordinal number).

对序数 α, 称序数 $\alpha + 1$ 为 α 的**后继者** (successor), 这时 α 称为 $\alpha + 1$ 的**前趋者** (predecessor). 0 以及存在前趋者的序数称为**孤立序数** (isolated ordinal), 其他序数称为**极限序数** (limit ordinal).

由于保序映射是一一对应映射, 所以 X, Y 相似蕴含 X, Y 等势, 即

$$o(X) = o(Y) \Rightarrow |X| = |Y|.$$

所以每一序数 α 有一个基数与之对应称为序数 α 的基数, 记作 $|\alpha|$. 当 $|\alpha| \leqslant \aleph_0$ 时, 称 α 是**可数序数** (countable ordinal number); 相反的情况称为**不可数序数** (uncountable ordinal number). ω 是最小的可数 (无限) 序数, $|\omega| = \aleph_0$; **最小的不可数序数** (minimal uncountable ordinal number) 记作 $\boldsymbol{\omega_1}$, $|\omega_1| = \aleph_1$.

设序数 $\alpha_i < \omega_1 (i = 1, 2, \cdots)$, 则可以证明 $\sup\{\alpha_i : i = 1, 2, \cdots\} < \omega_1$, 也就是存在序数 $\alpha < \omega_1$, 使 $\alpha_i < \alpha$ 对 $i = 1, 2, \cdots$ 成立.

序数的加法定义如下: 设 α, β 为序数, 取良序集 X, Y, 使 $o(X) = \alpha$, $o(Y) = \beta$ 并且 $X \cap Y = \varnothing$. 在集合 $X \cup Y$ 上定义良序如下: 任意 $x, y \in X \cup Y$, 如果 $x, y \in X$ 或者 $x, y \in Y$, 则 x, y 保持它们原来的大小; 如果 $x \in X$, $y \in Y$, 则规定 $x < y$. 定义 $\alpha + \beta = o(X \cup Y)$.

可以证明对任意序数 $\alpha > 0$, 区间 $[0, \alpha)$ 的序数是 α (习题 0.7). 因此我们往往对记号 α 与 $[0, \alpha)$ 不加区别, 特别是对任意序数 α, $\beta > 0$, $\alpha \times \beta$ 总是表示区间 $[0, \alpha)$ 与 $[0, \beta)$ 的乘积, 即

$$\alpha \times \beta = \{(x, y) : x \in [0, \alpha),\ y \in [0, \beta)\}.$$