主　编／陈裕先
副主编／刘一平　刘功伟　张春生

大学数学

DAXUE SHUXUE

江西高校出版社

大学数学

主　编　陈裕先
副主编　刘一平　刘功伟　张春生

编　委（按姓氏笔划为序）
刘一平　刘功伟　朱彦保
陈裕先　张春生　林国华
高晓梅　梁志瑶　彭春涛

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/陈裕先主编. —南昌:江西高校出版社,
2007.8

ISBN 978-7-81075-952-6

Ⅰ.大... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等学校-高等学校-
教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第111876号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
电　　话	(0791)8529392,8504319
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照　　排	江西太元科技有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	18.5
字　　数	448千字
版　　次	2007年8月第1版第1次印刷
印　　数	1~4200册
书　　号	ISBN 978-7-81075-952-6
定　　价	30.00元

前　言

《大学数学》是根据教育部师范司制订的《三年制小学教育专业课程方案(试行)》编写的必修课教材,它将为今后学习专业基础课以及相关的专业教材打下必要的数学基础。在编写过程中我们注重了以下几个方面:

1.尽量吸收当前国内外数学教学改革成果,按照教学基本要求,适合推进素质教育,培养学生的创新精神、应用意识、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力,以及适应分层次教学需求,做到突出重点、详略得当、通俗易懂。

2.遵循"以应用为目的,以必须、够用为度"的原则,注重理论联系实际,强调对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,以努力提高学生的数学修养和素质。

3.本书以培养高中起点三年制大专学历小学教师的学生为主要对象,考虑到相应的教学要求及其特点,旨在重视和突出实用性,对一些繁杂的理论推导则尽量省略。

4.注意与新编中学数学教材知识点的衔接和今后终身学习的需要,力求做到详略合理、增删有据。

本书除适用于高等专科学校教师教育专业的教学需要之外,亦可供各类成人教育、函授等大专层次各有关专业使用。

参加本书编写的教师有:刘一平(吉安师范学校,第一章、第二章)、高晓梅(南昌师范高等专科学校,第三章)、林国华(万年师范学校,第四章)、梁志瑶(宜春学院高安校区,第五章)、朱彦保(东华理工学院行知分院,第六章、第七章)、刘功伟(赣南教育学院,第八章)、彭春涛(江西教育学院赣南分院,第八章)、陈裕先(新余高等专科学校,第九章)、张春生(新余高等专科学校,第十章、第十一章)。

本书的编写,得到了江西省教师教育学科教研中心的大力支持;在编写过程中,参考了许多相关教材和著作,并且从中摘取了一些例题和习题等,书中没有一一注明,在此深表谢意!

由于我们水平有限,成书仓促,难免出现纰漏与不足,请有关专家、学者及使用本书的读者批评指正。

编　者

2007年5月8日

目　录

第一篇　一元函数微积分

第二篇　线性代数

第三篇　　概率论初步

第一篇　一元函数微积分

第1章　函数的极限和连续

本章讲授三个重要概念：函数、极限和连续.函数部分主要介绍函数的概念、函数的性质、反函数、复合函数及初等函数；极限部分主要介绍数列的极限、函数的极限、极限的性质、无穷小量和无穷大量、极限存在的准则及两个重要极限；连续部分主要介绍函数的连续与间断、初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质.

§1.1　函数及其性质

1.1.1　函数的概念

一、函数定义

我们已经学过函数的概念及幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等各种函数.下面进一步给出函数的一般性定义.

定义1.1　设x和y是两个变量，D是一个非空数集，若对于每一个$x \in D$，变量y按照一定的对应法则f，总有确定的数值和它对应，则称y是x的函数，记作$y = f(x)$，x叫做**自变量**，y叫做**因变量**，数集D叫做这个函数的**定义域**.

当x取定数值x_0时，与x_0对应的y的数值称为函数在点x_0处的函数值，记作$f(x_0)$，当x取遍D中的一切数值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数的**值域**.

当一个函数的定义域D和对应法则f都给定时，函数的值域也随之确定.因此，我们把函数的定义域D和对应法则f叫做函数的两个要素.要判断两个函数是不是相同的函数，只要判断这两个函数的两个要素是否分别相同即可，与自变量和因变量用什么字母表示无关.如$y = x^2$和$u = v^2$是相同的函数.

在很多情况下给出函数时，只给出了函数的对应法则并没指明函数的定义域，这时我们约定函数的定义域就是使得函数有意义的实数的集合，称为自然定义域.如函数$y = \sqrt{x-1}$的定义域是$D = [1, +\infty)$.

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义所确定的，称为实际定义域.如圆的面积公式是：

$$S = \pi R^2,$$

其中 S 表示圆的面积，R 表示圆的半径，S 是 R 的函数，R 是自变量，S 是因变量，函数的实际定义域是 $(0,+\infty)$.

如果自变量 x 在定义域 D 中任取一个值时，对应的函数值都只有一个，这种函数叫做单值函数；否则叫做多值函数. 以后如无特别说明，本书所指函数都是单值函数.

只含有一个自变量的函数叫做一元函数，本书只研究一元函数.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{3+2x-x^2}$； (2) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{\lg(2x-1)}$.

解 (1) 要使函数有意义，必须满足以下条件：

$$\begin{cases}x^2-1\neq 0,\\3+2x-x^2\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x^2\neq 1,\\x^2-2x-3\leqslant 0,\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}x\neq\pm 1,\\-1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

故函数的定义域是 $(-1,1)\cup(1,3]$.

(2) 要使函数有意义，须

$$\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}>0,\\\lg(2x-1)\neq 0,\\2x-1>0;\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}<0,\\2x-1\neq 1,\\x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-1<x<1,\\x\neq 1,\\x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

故函数的定义域是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

例 2 判断下列各组中的两个函数是不是同一个函数：

(1) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$； (2) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(3) $y=\sin 2x$ 与 $y=2\sin x\cos x$.

解 (1) 因为函数 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)$

$\cup (0, +\infty)$,显然定义域不同,所以它们是不同的函数.

(2) 因为 $y = \sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|$ 与 $y = \sin x$ 的对应法则不同,所以它们是不同的函数.

(3) $y = \sin 2x$ 与 $y = 2\sin x\cos x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$,且对于定义域内的任一实数 x 恒有 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$,所以这两个函数是相同的.

二、分段函数

如果一个函数的对应法则随自变量取值的不同而不同,那么这种函数称为分段函数.如我们学过的绝对值函数:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

其定义域是 $(-\infty, +\infty)$,值域是 $[0, +\infty)$,当 $x \in [0, +\infty)$ 时,对应法则是 $y = x$,当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,对应法则是 $y = -x$.该函数的图象如图 1-1 所示.

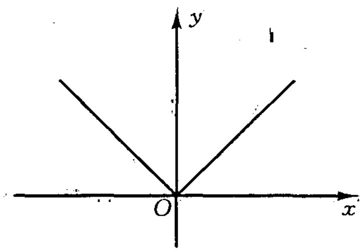

图 1-1

例 3 已知函数

$$y = \begin{cases} x+1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

求 $f(1), f(-1), f(0), f(0.5), f(-0.5)$ 的值,并作出函数的图象.

解 $f(1) = 1 - 1 = 0$,

$f(-1) = -1 + 1 = 0$,

$f(0) = 0$,

$f(0.5) = 0.5 - 1 = -0.5$,

$f(-0.5) = -0.5 + 1 = 0.5$.

函数的定义域是 $[-1, 1]$,值域是 $(-1, 1)$,其图象如图 1-2 所示.

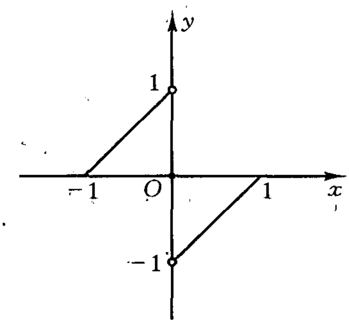

图 1-2

下面再介绍两个分段函数:

1. 取整函数 $y = [x]$

函数值定义为不超过 x 的最大整数,如 $[1.2] = 1$, $[0.8] = 0$, $[-0.8] = -1$ 等,通常我们把取整函数表示为

$$y = [x] = n, n \leqslant x < n+1, n \in \mathbf{Z}.$$

该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$,其图象如图 1-3 所示.

2. 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $\{-1, 0, 1\}$,函数图象如图 1-4 所示.

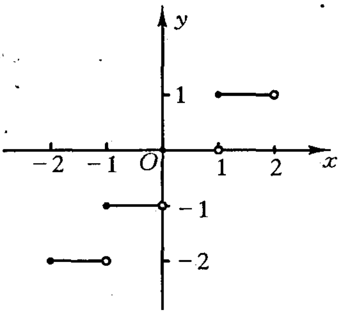

图 1-3

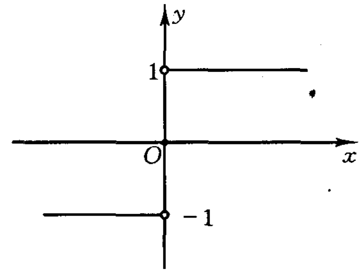

图 1-4

1.1.2 函数的性质

一、函数的单调性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或恒有 $f(x_1) > f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调增加的**（或**严格单调减少的**），严格单调增加和严格单调减少的函数统称为**严格单调函数**.

严格单调增加的函数，它的图象是随着自变量 x 的增加而上升的曲线；严格单调减少的函数，它的图象是随着自变量 x 的增加而下降的曲线.

例如，函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是严格单调增加的，在区间 $(-\infty, 0)$ 上是严格单调减少的，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上函数不是单调的.

又如，函数 $y = 2^x$ 在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增加的；函数 $y = \log_{0.5}x$ 在它的定义域 $(0, +\infty)$ 上是严格单调减少的；函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是严格单调增加的，在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上是严格单调减少的.

二、函数的有界性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I \subseteq D$，如果存在正数 M，使得对于任一 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**. 如果这样的正数 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

显然，如果函数 $f(x)$ 的图象介于两条平行线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间，则函数必定有界.

例如，函数 $y = \cos x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的，因为无论 x 取什么实数，$|\cos x| \leqslant 1$ 都成立.

又如，函数 $y = \frac{1}{x}$，在开区间 $(0,1)$ 上无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立；但在 $(1,2)$ 内，函数是有界的，因为 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对于 $(1,2)$ 内的一切 x 都成立.

注意 函数的有界性是对定义域 D 内某个数集 I 而言的，数集 I 可以是整个定义域或定义域内的某个区间，或由定义域中的离散点组成的数集.

三、函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称(即若 $x \in D$,则必有 $-x \in D$),如果对于定义域 D 中的任意 x 值恒有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称函数 $f(x)$ 为**偶函数(或奇函数)**.

也就是说,对于给定的函数,当自变量 x 换为 $-x$ 时,如果函数值不变,那么该函数为偶函数;如果函数值变成相反数,那么该函数为奇函数.

奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.

例如,函数 $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{sgn} x$ 都是奇函数,它们的图象都关于原点对称;函数 $y=x^2$, $y=\cos x$, $y=|x|$ 都是偶函数,它们的图象都关于 y 轴对称.

例 4 证明函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

证 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,因为

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2}) \\
&= \lg(\sqrt{1+x^2}-x) \\
&= \lg\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} \\
&= \lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \lg(x+\sqrt{1+x^2})^{-1} \\
&= -\lg(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x),
\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

四、函数的周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个非零常数 t,使得对于任一 $x \in D$,都有 $x+t \in D$ 且 $f(x+t)=f(x)$ 那么就称 $f(x)$ 为**周期函数**,t 为 $f(x)$ 的一个**周期**.

如果 $f(x)$ 是周期函数,t 是 $f(x)$ 的一个周期,那么 $2t,3t,4t\cdots$ 都是它的周期,所以周期函数一定有无穷多个周期,如果在无穷多个周期中存在一个最小正数 T,那么 T 就称为 $f(x)$ 的最小正周期,简称周期.

例如,函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;$y=\tan x$, $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的函数.特别的,常数函数 $y=1$ 也是周期函数,因为任何正实数都是它的周期,所以它没有最小正周期.

1.1.3 反函数

已知汽车的速度是 60km/h,如果给出时间 t,那么就可以通过公式 $s=60t$ 算出路程 s,这时 s 是 t 的函数,时间 t 是自变量,路程 s 是因变量;反之如果知道路程 s,也可以通过公式 $t=\frac{s}{60}$ 算出所须时间,这时 t 是 s 的函数,路程 s 是自变量,时间 t 是因变量.函数 $t=\frac{s}{60}$ 就是函数 $s=60t$ 的反函数.

一、反函数的概念

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 E,如果对于 E 中的每一个 y 值,都

可以由关系式 $y=f(x)$ 确定出唯一的一个 x 值与之对应，那么就称 x 是以 y 为自变量的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称它为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 E，值域为 D.

习惯上，自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常改写为 $y=f^{-1}(x)$（即交换 x 与 y 的位置）. 如果把函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象画在同一个坐标系中，那么它们关于直线 $y=x$ 对称.

例如，指数函数 $y=2^x$ 的反函数是对数函数 $y=\log_2 x$.

例 5 求下列函数的反函数，并指出反函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3-x^2+2x}, x\in[-1,1]$； (2) $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

解 (1) $y=\sqrt{3-x^2+2x}=\sqrt{4-(x-1)^2}$.

由 $x\in[-1,1]$ 知 $-1\leqslant x\leqslant 1$，从而

$$-2\leqslant x-1\leqslant 0,$$

所以函数的值域为 $[0,2]$.

用 y 表示 x 得 $x-1=-\sqrt{4-y^2}$，即

$$x=1-\sqrt{4-y^2}.$$

交换 x 与 y 的位置得函数 $y=\sqrt{3-x^2+2x}, x\in[-1,1]$ 的反函数是

$$y=1-\sqrt{4-x^2}, x\in[0,2].$$

(2) 因为 $0<e^x<1+e^x$，所以函数的值域是 $(0,1)$.

由 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ 得 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{e^x}+1$，即 $\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1-y}{y}$，解之 $e^x=\dfrac{y}{1-y}$，即

$$x=\ln\frac{y}{1-y}.$$

所以，函数 $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ 的反函数是 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}, x\in(0,1)$.

二、反三角函数

反三角函数包括反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数、反正割函数和反余割函数. 我们知道，已知三角函数值求角，其结果并不唯一，为了保证反三角函数的存在，我们将三角函数的定义域限制在某个区间内. 下面逐一介绍前四个反三角函数.

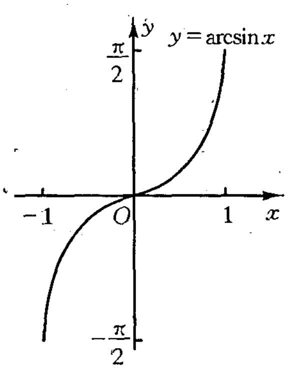

图 1－5

1. 反正弦函数

将正弦函数的定义域限制为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，从而有反函数，记为 $y=\arcsin x$ 称作**反正弦函数**，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，反正弦函数的图象如图 1－5 所示，该函数在其定义域上是严格单调增加的.

例 6 求 $\arcsin\dfrac{1}{2}, \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解　因为$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,且$\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,所以

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

同理,因为$\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,且$-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,所以

$$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4}.$$

易知　$\arcsin 1=\frac{\pi}{2},\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2},\arcsin 0=0.$

例 7　求$\sin(\arcsin\frac{1}{2}),\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})$.

解

$$\sin(\arcsin\frac{1}{2})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

一般的,$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\sin(\arcsin x)=x,x\in[-1,1]$.但$\arcsin(\sin x)$不一定等于$x$,等式$\arcsin(\sin x)=x$成立的充要条件是$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

2.反余弦函数

将余弦函数的定义域限制在$[0,\pi]$,那么余弦函数有反函数,记为$y=\arccos x$,称作**反余弦函数**,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,反余弦函数的图象如图1-6所示,该函数在其定义域上是严格单调减少的.

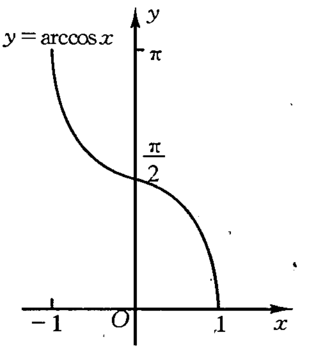

图 1-6

例 8　求$\arccos\frac{1}{2},\arccos(-\frac{1}{2})$.

解　因为$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,且$\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$,所以

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

又因为$\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$,且$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\in[0,\pi]$,所以

$$\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}.$$

例 9　求$\cos(\arccos 1),\arccos[\cos(-\frac{\pi}{3})]$.

解　$\cos(\arccos 1)=\cos 0=1$,

$\arccos[\cos(-\frac{\pi}{3})]=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$

一般的,$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\cos(\arccos x)=x,x\in[-1,1]$.但$\arccos(\cos x)$不一定等于$x$,等式$\arccos(\cos x)=x$成立的充要条件是$x\in[0,\pi]$.

3.反正切函数

与反正弦函数类似,我们限制正切函数的定义域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,那么正切函数有反函数,

记为 $y=\arctan x$，称作**反正切函数**，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，反正切函数的图象如图 1－7 所示，该函数在其定义域上是严格单调增加的.

一般的，$\arctan(-x)=-\arctan x$，$\tan(\arctan x)=x$. 但 $\arctan(\tan x)$ 不一定等于 x，等式 $\arctan(\tan x)=x$ 成立的充要条件是 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

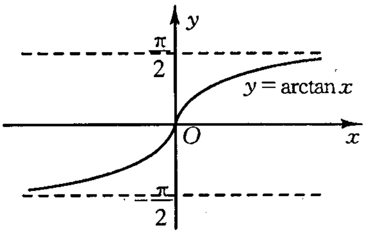

图 1－7

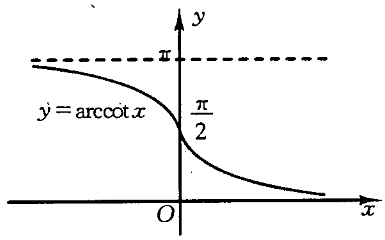

图 1－8

4. 反余切函数

与反余弦函数类似，我们限制余切函数的定义域为 $(0,\pi)$ 那么余切函数有反函数，记为 $y=\operatorname{arccot} x$，称作**反余切函数**，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，反余切函数的图象如图 1－8 所示，该函数在其定义域上是严格单调减少的.

一般的，$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$，$\cot(\operatorname{arccot} x)=x$. 但 $\operatorname{arccot}(\cot x)$ 不一定等于 x，等式 $\operatorname{arccot}(\cot x)=x$ 成立的充要条件是 $x\in(0,\pi)$.

反正弦函数和反正切函数都是奇函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{\frac{3}{4}}$；　(2) $y=\ln(x^2-5x-6)$；　(3) $y=3^{\frac{1}{x}}$；

(4) $y=\sqrt{1-\log_2 x}$；　(5) $y=\sqrt{2-x}+\arcsin(x-2)$；　(6) $y=\dfrac{1}{\log_3(2-|x|)}$.

2. 判断下列各组中的两个函数是不是相同的：

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；　(2) $y=\sqrt{x^2}, g(x)=x$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}, g(x)=x+2$；　(4) $y=1-\cos^2 x, u=\sin^2 v$.

3. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -1<x<0,\\ -1, & 0\leqslant x<1,\\ 1-x, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

求 $f(-0.5), f(0), f(1), f(1.5)$ 并作出该函数的图象.

4. 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $y=(1+x)(1-x)$；　(2) $y=x\sin x$；　(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(4) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；　(5) $y=\arccos x$.

5. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，求证该函数在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

6. 求下列函数的周期：

(1) $y=2\sin(x-1)$； (2) $y=\pi\cos 2x$； (3) $y=\tan(4x+\pi)$.

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+1$； (2) $y=x^2-1\ (x\leqslant 0)$； (3) $y=1-\ln x$；

(4) $y=\dfrac{e^x+1}{e^x}$； (5) $y=\sin 2x\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$； (6) $y=1-\arccos x$.

8. 求下列各式的值：

(1) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； (2) $\pi-\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$； (3) $\arccos(-1)$；

(4) $\arccos\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$； (5) $\pi+\arctan 1$； (6) $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$；

(7) $\operatorname{arccot}(-1)$； (8) $\cot(\operatorname{arccot} 5)$.

§1.2　初等函数

1.2.1　基本初等函数

下面六类函数称为基本初等函数：

常数函数 $y=C$　（C 为常数）；

幂函数 $y=x^{\alpha}$　（α 为实数）；

指数函数 $y=a^x$　（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数 $y=\log_a x$　（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数都是我们已经学过的，它们是学习微积分的基础，必须熟练掌握它们的定义域、值域、图象及性质.下面作一个简要的复习.

一、常数函数

常数函数 $y=C$,（C 为常数）的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{C\}$，它的图象是通过点 $(0,C)$ 且平行于 x 轴的直线.常数函数是有界偶函数，且是没有最小正周期的周期函数，当 $C=0$ 时，它还是奇函数.

二、幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）的定义域、值域、奇偶性、图象随指数 α 的值而定（如图1-9所示）.一般而言，幂函数在 $(0,+\infty)$ 上总有定义，当 $\alpha>0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格单调增加函数，当 $\alpha<0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格单调减少函数.

三、指数函数

指数函数 $y=a^x$,（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$，指数函数的图象都通过点 $(0,1)$（如图 1-10 所示），当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函

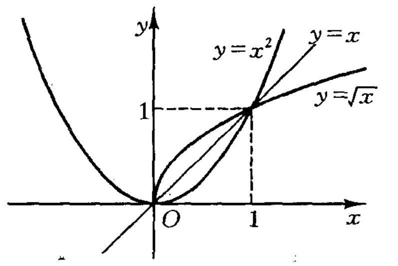

图 1－9

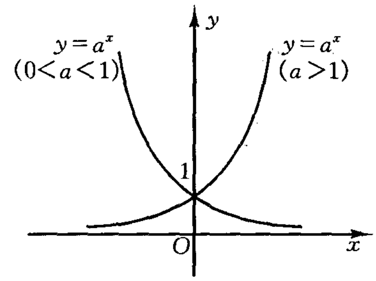

图 1－10

数单调减少.

四、对数函数

对数函数 $y=\log_a x$,($a>0$ 且 $a\neq1$) 的定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$,对数函数的图象都通过点$(1,0)$(如图 1－11 所示),当 $a>1$ 时,函数单调增加,当$0<a<1$时,函数单调减少.

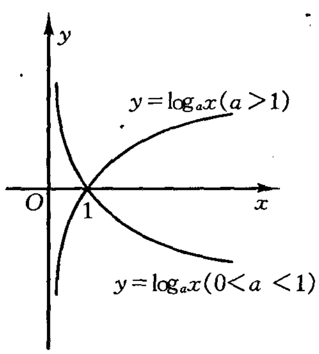

图 1－11

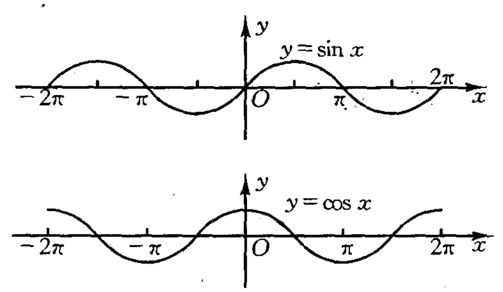

图 1－12

五、三角函数

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,值域都是$[-1,1]$,且它们都是周期为 2π 的有界周期函数,$|\sin x|\leqslant1$,$|\cos x|\leqslant1$,$y=\sin x$ 为奇函数,$y=\cos x$ 为偶函数,其图象如图 1－12 所示.

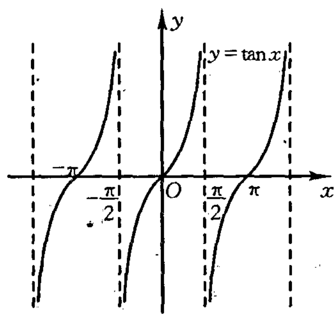

图 1－13

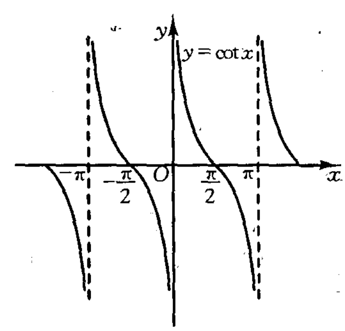

图 1－14

$y=\tan x$ 的定义域是$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$(如图 1－13 所示),$y=\cot x$ 的定