普通高等教育"十一五"国家级规划教材

电磁场与电磁波基础学习与考研指导

路宏敏 主编

赵永久 徐 乐 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

电磁场与电磁波基础学习与考研指导

路宏敏　主编
赵永久　徐　乐　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为配合科学出版社出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《电磁场与电磁波基础》而编著的配套教材，也是该立体化教材的组成部分。主要介绍《电磁场与电磁波基础》中对应章节的基本内容和公式、典型例题解析及习题参考答案，同时也提供了国内部分重点大学硕士研究生入学考试试题及参考答案，选编了西安电子科技大学近年的考研试卷。

本书可作为普通高等院校电子信息类本科生专业基础课“电磁场与电磁波”的辅助配套教材，也可作为其他讲授或者学习“电磁场与电磁波”基础知识的教师、学生以及科技人员的参考书。同时对备考硕士研究生的人员也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波基础学习与考研指导/路宏敏主编；赵永久，徐乐编著. —北京：科学出版社，2008

（普通高等教育“十一五”国家级规划教材）

ISBN 978-7-03-021281-8

Ⅰ.电… Ⅱ.①路…②赵…③徐… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料②电磁波-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 030789 号

责任编辑：匡 敏 余 江 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008 年 4 月第一次印刷 印张：17 3/4

印数：1—4 000 字数：338 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

电子与信息科学技术的飞速发展，要求从事通信、广播、电视、导航、雷达、遥感、测控、电子对抗、电子仪器和测量系统的人员，从事家用电器、工业自动化、地质勘探、电力、交通的人员，从事涉及电子信息技术的科技工作者必须通晓和掌握电磁场与电磁波的基本特性、分析方法及其应用，必须具备坚实的电磁场与电磁波基础知识。因此，国内外著名高等学校都把“电磁场与电磁波”列入电子、电气类专业必修的专业基础课。本课程也是电子信息类专业的本科学生必须具备的知识结构的重要组成部分之一。

本书是为配合科学出版社出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《电磁场与电磁波基础》而编著的配套教材，也是该立体化教材的组成部分。主要介绍《电磁场与电磁波基础》中对应章节的基本内容和公式、典型例题解析及习题参考答案，同时也提供了国内部分重点大学硕士研究生入学考试试题及参考答案，选编了西安电子科技大学近年的考研试卷。

全书内容由矢量分析与场论、静态场、时变场和研究生入学考试试题及参考答案四部分构成。第一部分数学基础的内容包括第 1 章矢量分析与场论，介绍了矢量分析的主要概念、定理、公式及其应用，是学习电磁场与电磁波的基本数学工具；第二部分静态场的内容包括第 2 章静电场、第 3 章恒定电流的电场和磁场、第 4 章静态场的解；第三部分包括第 5 章时变电磁场、第 6 章平面电磁波、第 7 章电磁波的辐射、第 8 章导行电磁波；第四部分是第 9 章，提供了国内部分重点大学硕士研究生入学考试试题及参考答案。书末附录给出了重要的矢量公式和西安电子科技大学近年的考研试卷。

本书由承担西安电子科技大学通信工程学院、电子工程学院和机电工程学院“电磁场与电磁波”课程或者“电磁场理论”课程的教师共同编著完成。其中赵永久编写第 1、8 章，徐乐编写第 2、3、4 章，路宏敏编写第 5、6、7、9 章及附录，且负责全书的统稿工作。在本书编写过程中，万连城、黄河清、刘国强、张新丽、吴保义、张栋、李竟波等共同演算了部分习题，黄小龙、张丽、罗朋、张江峰、纪腾腾、冯艳斌等为本书录入了部分手稿，西安电子科技大学理学院的郭宏福副教授也提出了许多宝贵意见。全书完稿后，西安交通大学教授冯恩信、蒋

延生仔细审阅了全稿，并提出很多宝贵建议，进一步提高了本教材的质量。编写中也引用了国内同行的教学成果，作者谨在此一并表示衷心的感谢。

承蒙科学出版社匡敏、余江编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，作者表示深切的谢意。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请使用本书的老师、同学和广大读者批评指正，提出宝贵意见。

路宏敏　赵永久　徐　乐

于西安电子科技大学

2007 年 12 月

目　　录

第 1 章　矢量分析与场论

1.1　基本内容和公式

矢量分析与场论是研究许多科学问题的一种有用的工具。许多物理量本身就是矢量，还有一些物理量本身虽是标量，但描述它们的某些特性的物理量却是矢量，所以要研究这些物理量及其分布规律时也要用到矢量分析与场论的知识。矢量分析包括矢性函数的概念、极限、连续性以及矢性函数的导数、积分等内容，其地位相当于高等数学的函数分析。场论是讨论物理量在特定区域内分布、变化规律的理论，这里并不针对某个具体的场，而是给出描述场问题的统一方法和理论。内容包括数量场的等值面（等值线）、方向导数和梯度，矢量场的通量、散度、环量、环量面密度及旋度的概念、物理意义，以及它们在各种坐标系中的表达式等。

1.1.1　矢性函数

设 t 是一数性变量，$\boldsymbol{A}$ 为矢量，如果对于某一区间内的每一个数值 t，$\boldsymbol{A}$ 都以一个确定的矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 与之对应，则矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x(t)\boldsymbol{e}_x + A_y(t)\boldsymbol{e}_y + A_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{1-1}$$

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t 处的导数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\boldsymbol{e}_x + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\boldsymbol{e}_y + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\boldsymbol{e}_z \\ &= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{1-2}$$

这样就把一个矢性函数导数的计算转化为三个标量函数的导数的计算。

矢性函数的导数运算法则：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$　（$\boldsymbol{c}$ 为常矢量）

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\pm\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\boldsymbol{A}) = k\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$　（k 为常数）

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{A}) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} + u\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$

(5) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$

(6) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})=\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$

(7) 复合函数的导数：设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u)$，$u=u(t)$，则

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$

$\boldsymbol{A}(t)$在 t 处的微分

$$d\boldsymbol{A}=dA_x\boldsymbol{e}_x+dA_y\boldsymbol{e}_y+dA_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-3}$$

$\boldsymbol{A}(t)$的不定积分记为 $\int\boldsymbol{A}(t)dt$。

矢性函数的积分具有下列性质：

(1) $\int[k\boldsymbol{A}(t)]dt=k\int\boldsymbol{A}(t)dt$　（k 为常数）

(2) $\int[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]dt=\int\boldsymbol{A}(t)dt\pm\int\boldsymbol{B}(t)dt$

(3) $\int u(t)\boldsymbol{a}dt=\boldsymbol{a}\int u(t)dt$　（$\boldsymbol{a}$ 为常矢量）

(4) $\int\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{a}\cdot\int\boldsymbol{A}(t)dt$　（$\boldsymbol{a}$ 为常矢量）

(5) $\int\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(t)dt=\boldsymbol{a}\times\int\boldsymbol{A}(t)dt$　（$\boldsymbol{a}$ 为常矢量）

(6) 换元积分法：设 $\boldsymbol{A}(u)$具有原函数 $\boldsymbol{B}(u)$，$u=\varphi(t)$可导，则 $\boldsymbol{B}[\varphi(t)]$为 $\boldsymbol{A}[u(t)]u'(t)$的原函数，即

$$\int\boldsymbol{A}[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\boldsymbol{B}[\varphi(t)]+\boldsymbol{c}$$

(7) 分部积分法：

$$\int\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}'(t)dt=\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)-\int\boldsymbol{A}'(t)\times\boldsymbol{B}(t)dt$$

1.1.2 场的基本知识

如果在某一空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，则称在此空间里确定了该物理量的一个场。

在数量场中，使函数 u 取相同数值的所有点所组成的曲面称为该数量场的等值面。数量场的等值面方程为

$$u(x,y,z)=c\quad（常数） \tag{1-4}$$

在其上每一点处，它都与该点的场矢量 $\boldsymbol{A}$ 相切的曲线，称为该矢量场的矢量线。它与该点处的场矢量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$ 共线，则有

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x}=\frac{\mathrm{d}y}{A_y}=\frac{\mathrm{d}z}{A_z} \tag{1-5}$$

1.1.3 数量场的方向导数和梯度

方向导数：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\rho} \tag{1-6}$$

［定理］ 若函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向余弦。则 u 在 M_0 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数必存在，且

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-7}$$

假设一个矢量，其方向为 $u(M)$ 变化率最大，且其模即为最大变化率，该矢量称函数 $u(M)$ 在给定点处的梯度。记为

$$\mathbf{grad}u=\boldsymbol{G}$$

在直角坐标系中的表达式

$$\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1-8}$$

数量场的梯度满足下列运算法则：

(1) $\nabla c=\mathbf{0}$　(c 为常数)

(2) $\nabla(cu)=c\,\nabla u$　(c 为常数)

(3) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$

(4) $\nabla(uv)=v\,\nabla u+u\,\nabla v$

(5) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{1}{v^2}(v\,\nabla u-u\,\nabla v)$

(6) $\nabla[f(u)]=f'(u)\nabla u$

1.1.4 矢量场的通量及散度

设 $\boldsymbol{A}(M)$ 为一矢量场，沿其中有向曲面 S 正(负)侧的曲面积分

$$\Phi=\iint_S A_n\mathrm{d}S=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-9}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 向 S 正侧($\boldsymbol{n}$ 指向 S 的正侧)或负侧($\boldsymbol{n}$ 指向 S 的负侧)穿过曲面 S 的通量。在直角坐标系中

$$\Phi=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+A_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+A_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-10}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 在点 M 处的散度记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to M}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to M}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1-11}$$

［定理］ 在直角坐标系中，矢量场

$$\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

在任一点 $M(x,y,z)$处的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-12}$$

1.1.5 矢量场的环量及旋度

设有矢量场 $\boldsymbol{A}(M)$，则沿场中某一封闭的有向曲线 l 的曲线积分

$$\Gamma=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-13}$$

称为此矢量场按积分所取方向沿曲线 l 的环量。

环量面密度在直角坐标系中的计算公式：

$$\mu_n=\lim_{\Delta S\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma \tag{1-14}$$

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的一点 M 处，其方向为该点 $\boldsymbol{A}$ 的环量面密度最大的方向，其模恰等于此最大环量面密度的矢量，称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点处的旋度，记作 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{1-15}$$

或

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1-16}$$

斯托克斯公式：

$$\oint_l(A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z)=\iint_S\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

简洁的矢量形式：

$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-17}$$

1.1.6 正交曲线坐标系

实际中的某些问题更适合用正交曲线坐标系来表达，这样可使得问题的描述和求解更加简便。最常用的正交曲线坐标系是圆柱坐标系和球坐标系。

在圆柱坐标系中，任意点 P 的位置用 ρ、φ、z 来表示，它们与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{1-18}$$

在球坐标系中，任意点 P 的三个坐标为 r、θ、φ，它们与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{1-19}$$

圆柱坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量关系如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_x \cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \sin\varphi \\ \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x \sin\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\varphi \end{cases} \tag{1-20a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_\rho \cos\varphi - \boldsymbol{e}_\varphi \sin\varphi \\ \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_\rho \sin\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \cos\varphi \end{cases} \tag{1-20b}$$

球坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z \cos\theta \\ \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x \cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\theta\sin\varphi - \boldsymbol{e}_z \sin\theta \\ \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x \sin\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\varphi \end{cases} \tag{1-21a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_r \sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta\cos\varphi - \boldsymbol{e}_\varphi \sin\varphi \\ \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r \sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \cos\theta \\ \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r \cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta \end{cases} \tag{1-21b}$$

圆柱坐标系中的哈密顿算子为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1-22}$$

圆柱坐标系中数量场的梯度为

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-23}$$

圆柱坐标系中矢量场的散度为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{e}_\rho A_\rho + \boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi + \boldsymbol{e}_z A_z) \tag{1-24}$$

圆柱坐标系中矢量场的旋度为

$$\nabla\times \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{e}_\rho A_\rho + \boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi + \boldsymbol{e}_z A_z)$$

$$=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \tag{1-25}$$

球坐标系中的哈密顿算子表达式为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{1-26}$$

所以，球坐标系中的梯度为

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi} \tag{1-27}$$

球坐标系中的散度和旋度分别为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}&=\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{e}_rA_r+\boldsymbol{e}_\theta A_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi)\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+r\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+r\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\end{aligned} \tag{1-28}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}&=\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{e}_rA_r+\boldsymbol{e}_\theta A_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi)\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1-29}$$

1.2　典型例题解析

例 1-1　计算下列导数：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$；

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$。

解　(1)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}\right]\\&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

(2)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

$$=0+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right)=\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right)$$

例 1-2　计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_x+\cos\varphi\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}\varphi$。

解

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_x+\cos\varphi\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}\varphi\\&=-\boldsymbol{e}_x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{e}_y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\boldsymbol{e}_x\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\boldsymbol{e}_y\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

例 1-3　求数量场 $u=(x+y)^2-z$ 通过点(1,0,1)的等值面。

解　等值面方程的一般形式为

$$u=(x+y)^2-z=c$$

因为点(1,0,1)在等值面上，其坐标必满足该方程

$$c=u(1,0,1)=(1+0)^2-1=0$$

故要求的等值面方程为

$$(x+y)^2-z=0\quad\text{或}\quad z=(x+y)^2$$

例 1-4　求矢量场 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{e}_x+x^2y\boldsymbol{e}_y+zy^2\boldsymbol{e}_z$ 的矢量线方程。

解　矢量线方程应为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\frac{\mathrm{d}y}{x^2y}=\frac{\mathrm{d}z}{zy^2}$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\frac{\mathrm{d}y}{x^2y}$ 得

$$x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y$$

两边积分得

$$y^2=x^2+c_1'\quad\text{或}\quad x^2-y^2=c_1$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\frac{\mathrm{d}z}{zy^2}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

两边积分得

$$\ln z=\ln x+c_2'=\ln x+\ln c_2\quad\text{或}\quad z=c_2x$$

所以，矢量线方程为

$$\begin{cases}x^2-y^2=c_1\\z=c_2x\end{cases}$$

例 1-5　求数量场 $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ 在点 $M(1,1,2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数。

解　l 方向的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x^2+y^2}{z^2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=-\frac{1}{2}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}=1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

例 1-6　试证明 $M(x,y,z)$ 点的矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 的模 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的梯度 $\nabla r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}^{\circ}$。

证

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

所以

$$\nabla r=\frac{x}{r}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r}\boldsymbol{e}_y+\frac{z}{r}\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{1}{r}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}^{\circ}$$

例 1-7　求数量场 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $M(1,0,1)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$。

解　由 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 可得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

在 $M(1,0,1)$ 处，

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{0}{r}=0,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以，在 M 处

$$\nabla r=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_z$$

而

$$\boldsymbol{l}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_x+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_y+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\nabla r\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=\frac{1}{3\sqrt{2}}+0\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 1-8 已知位于原点处的点电荷 q 在其周围空间任一点 $M(x,y,z)$ 处产生的电位为 $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}(r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，且知电场强度 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，求 $\boldsymbol{E}$。

解 由法则(6)

$$\begin{aligned}\nabla\varphi&=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\cdot\nabla r=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\nabla r\\&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

例 1-9 有矢量场 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，封闭曲面 S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=H$ 所围封闭面，求从 S 内穿出的通量 Φ。

解

$$\begin{aligned}\Phi&=\oiint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iint_{S_1}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{S_2}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iint_{S_1}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\quad(S_2\text{ 上任一点均有 }\boldsymbol{r}\perp\mathrm{d}\boldsymbol{S})\\&=\iint_{S_1}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\&=\iint_{\sigma_1}H\mathrm{d}x\mathrm{d}y=H\iint_{\sigma_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=H\cdot\pi H^2=\pi H^3\end{aligned}$$

若 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z>0)$，则

$$\Phi=\iint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}S=\iint_S r\mathrm{d}S=R\iint_S\mathrm{d}S=R\cdot 2\pi R^2=2\pi R^3$$

例 1-10 原点处点电荷 q 在其周围产生的电场中，任一点处的电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^{\circ}\left(\boldsymbol{r}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$，求穿过以原点为球心，$R$ 为半径的球面的电通量。

解
$$\Phi_e = \oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi R^2}\oiint_S \boldsymbol{r}^\circ \cdot d\boldsymbol{S}$$
$$= \frac{q}{4\pi R^2}\oiint_S dS = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = q$$

例 1-11 原点处点电荷 q 产生的电位移为 $\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}$（$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$r=|\boldsymbol{r}|$），求 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}$。

解
$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{x}{r^3}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r^3}\boldsymbol{e}_y+\frac{z}{r^3}\boldsymbol{e}_z\right)$$
$$D_x = \frac{qx}{4\pi r^3},\quad D_y = \frac{qy}{4\pi r^3},\quad D_z = \frac{qz}{4\pi r^3}$$
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

所以
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$

例 1-12 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$r=|\boldsymbol{r}|$。求：

(1) 使 $\nabla\cdot[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的 $f(r)$；

(2) 使 $\nabla\cdot[\nabla f(r)]=0$ 的 $f(r)$。

解 (1) $\nabla\cdot[f(r)\boldsymbol{r}]=\nabla f(r)\cdot\boldsymbol{r}+f(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r}=f'(r)\nabla r\cdot\boldsymbol{r}+3f(r)$
$$=f'(r)\boldsymbol{r}^\circ\cdot\boldsymbol{r}+3f(r)=rf'(r)+3f(r)=0$$
$$rf'(r)=-3f(r) \quad\Rightarrow\quad \frac{f'(r)}{f(r)}=-\frac{3}{r}$$
$$\ln f(r)=-3\ln r+c=\ln cr^{-3}$$

所以
$$f(r) = cr^{-3}$$

(2) $\nabla\cdot[\nabla f(r)]=\nabla\cdot[f'(r)\cdot\nabla r]=\nabla\cdot\left[f'(r)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]$
$$=\nabla f'(r)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}+f'(r)\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$
$$=f''(r)\nabla r\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}+f'(r)\cdot\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)$$
$$=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$$

令 $r=e^t$，得
$$f''(t)+f'(t)=0$$