

“十五”国家重点图书出版规划项目

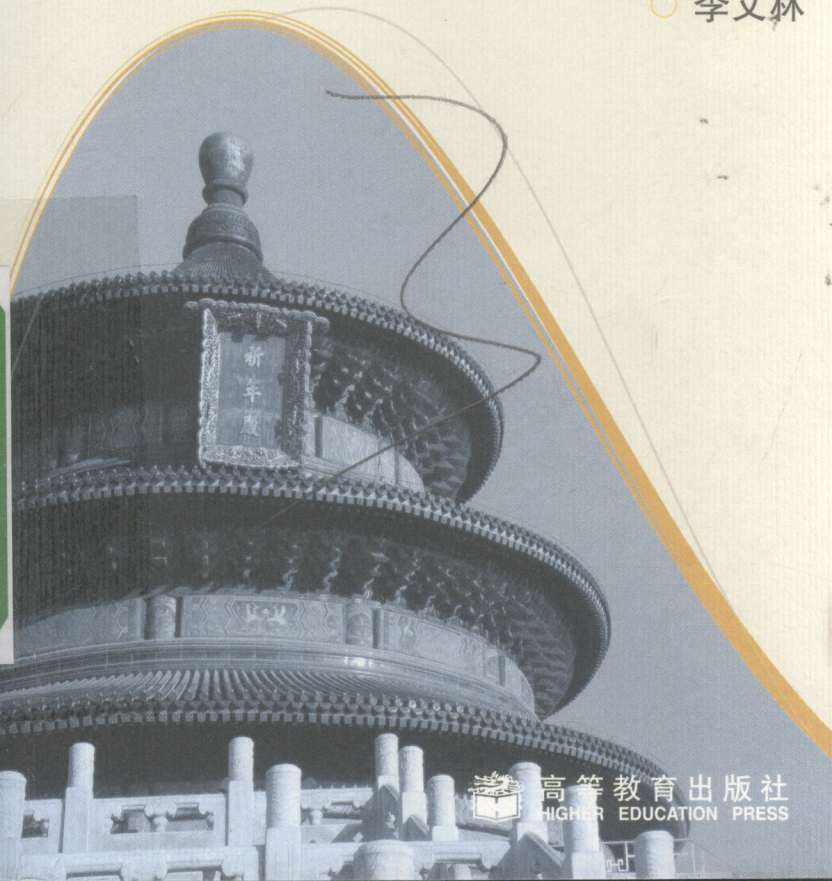
6

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

从赵爽弦图谈起

○ 李文林



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

01-49/82

:1(6)

2008

“十一五”国家重点

数学文化小丛书

李大潜 主编

从赵爽弦图谈起

李文林

高等教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

从赵爽弦图谈起 / 李文林. —北京: 高等教育出版社, 2008.5

(数学文化小丛书 / 李大潜主编)

ISBN 978-7-04-023611-8

I. 从… II. 李… III. 数学—普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 057187 号

策划编辑	李蕊	责任编辑	崔梅萍
封面设计	王凌波	责任绘图	杜晓丹
版式设计	王艳红	责任校对	金辉
责任印制	韩刚		

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn

经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com

开 本	787×960 1/32	版 次	2008年5月第1版
印 张	2.375	印 次	2008年5月第1次印刷
字 数	40 000	定 价	7.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23611-00

李文林

中国科学院数学与系统科学研究院研究员，数学史专家。曾任中科院数学研究所副所长、中国数学会秘书长。著有《数学史概论》、《数学的进化》、《文明之光——图说数学史》等著作。李文林研究员还长期担任教育部中小学教材审定委员会数学学科组组长，为我国基础教育教材建设作出了贡献。

数学文化小丛书（第一辑）

□ 遥望星空（一）

——人类怎样开始认识太阳系 齐民友

□ 遥望星空（二）

——牛顿·微积分·万有引力定律的发现 齐民友

□ 几何学在文明中所扮演的角色

——纪念陈省身先生的辉煌几何人生 项武义

□ 圆周率 π 漫话 李大潜

□ 黄金分割漫话 李大潜

□ 从赵爽弦图谈起 李文林

□ 费马大定理的证明与启示 周明儒

□ 二战时期密码决战中的数学故事 王善平 张奠宙

□ 数学中之类比

——一种富有创造性的推理方法 王培甫

□ 连分数与历法 徐诚浩

数学文化小丛书编委会

- 顾问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
- 主编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（徐州师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）
- 本书责任编辑：张惠英

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具，不仅是一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义

的主题,由学有专长的学者执笔,抓住主要的线索和本质的内容,由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长,并相对独立。视页码的多少,有的专题单独成册,有些专题则联合成册,以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则。

希望广大读者能通过阅读这套丛书,走近数学、品味数学和理解数学,充分感受数学文化的魅力和作用,进一步打开视野,启迪心智,在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目 录

一、赵爽弦图.....	2
弦图证明勾股定理.....	2
商高答周公.....	5
陈子与勾股定理一般形式.....	6
勾股定理与量天测地.....	7
二、勾股定理证明异趣.....	11
古代传说.....	11
从毕达哥拉斯到欧几里得.....	14
从刘徽到关孝和.....	18
总统的证明及其他.....	22
三、出入相补原理.....	25
运用出入相补原理的杰作.....	25
花拉子米与出入相补原理.....	26
四、体积计算东西谈.....	29
刘徽的“阳马术”与欧几里得的“魔鬼阶梯”.....	30
球体积——阿基米德与祖冲之.....	40
五、希尔伯特第三问题.....	49

高斯的抱怨	49
希尔伯特的猜测	51
德恩反例	53
现代体积理论的发展	59

参考文献	63
------------	----

2002年8月20日,北京庄严的人民大会堂,第24届国际数学家大会开幕式在这里隆重举行.大会主席台紫色的帷幕中央,悬挂着本届国际数学家大会会标(图1),中心图案是四个红色三角形拼成的正方形,像一只旋转的风车,欢迎着来自世界各地的数学家.这一中心图案的原型是公元3世纪中国数学家赵爽的所谓“弦图”.“弦图”运用图形面积的出入相补证明了勾股定理(详见下文),这一简洁优美的证明,与古代希腊数学家对勾股定理的证明东西相映生辉,显示了中国古代数学家的智慧与成就.经过艺术处理的弦图,因而被选作北京国际数学家大会的会徽,随着2002年国际数学家大会的成功举行,经各国代表传扬全球四方.

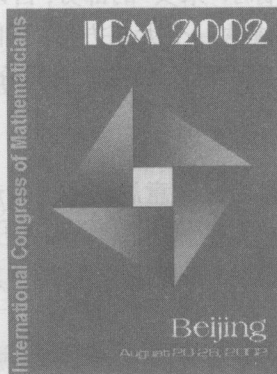


图 1

一、赵爽弦图

我们就从赵爽“弦图”谈起。赵爽，东汉末至三国时代人，其生平已无从详考，但我们知道他曾为现存最早的古代中国数学著作《周髀算经》撰序作注。赵爽在序言中说自己根据《周髀算经》的文字内容画了一组图，插在书中借以揭示古人测天的奥秘。他称这组插图叫“勾股圆方图”，其中第一幅即“弦图”。翻开传世的《周髀算经》，我们可以找到那张历尽数千年沧桑的“弦图”(图2)：由四个红色的三角形(图中标示“朱实”的部分，古语“朱”即红色，“实”指面积)拼成的一个大正方形，中间围着一个黄色的小正方形(图中标示“黄实”的部分)。

弦图证明勾股定理

这张“弦图”是什么意思呢？请看赵爽本人的说明。原来赵爽在“勾股圆方图”之后给出了一段注文，这段注文通常也称“勾股圆方图说”，其开门见山第一句是：

“勾股各自乘，并之为弦实，开方除之，即弦。”

如果用 a 表示“勾”， b 表示“股”， c 表示“弦”，这句话就相当于说

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ 和 } \sqrt{a^2 + b^2} = c$$

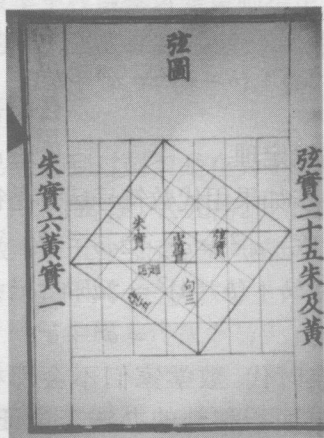


图 2

这正是勾股定理的一般形式!赵爽紧接着解释他的“弦图”道:

“案弦图,又可以勾股相乘为朱实二,倍之为朱实四,以勾股之差自相乘,为中黄实,加差实亦成弦实。”

意思是说,勾股相乘(ab)等于两个红色三角形的面积(朱实二: $2 \times \frac{1}{2}ab$),其二倍($2ab$)就等于四个红色三角形的面积(朱实四: $4 \times \frac{1}{2}ab$). 勾股之差($b-a$)自乘($(b-a)^2$),等于中央黄色小正方形的面积(中黄实),与前面的四个红色三角形拼在一起恰好等于以弦为边的大正方形的面积(弦实). 用公式表示,这相当于指出

$$2ab + (b-a)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2 = c^2,$$

但另一方面

$$2ab + (b - a)^2 = a^2 + b^2,$$

这就证明了勾股定理.

最后这一步如果用代数符号运算是很明显的:

因为 $(b - a)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

所以 $2ab + (b - a)^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a^2 + b^2.$

但在赵爽时代, 数学家们不会那样去做. 赵爽应该是通过面积移补的办法来论证这一点的. 如图3, 由以勾为边的正方形(a^2)与以股为边的正方形(b^2)合起来的图形($a^2 + b^2$), 将左、右下角的两个三角形($\frac{1}{2}ab$)分别移补到所示位置, 显然就得到以弦为边的正方形.

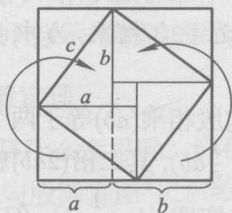


图 3

上面介绍的赵爽勾股定理证明, 被美国数学史家、哈佛大学教授库里奇称为“最省力的证明”^①, 而

^① J.L.Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, Oxford, 1940

西方希腊数学史权威学者希思则指出这一论证与希腊几何学的思想方式有着“完全不同的色彩”^①。

商高答周公

我们已经提到过赵爽是在为《周髀算经》作注。《周髀算经》大约成书于公元前2世纪的西汉时期,但其涉及的数学、天文知识,有些却可以远溯至公元前11世纪的西周年间。它从数学上讨论了宇宙的“盖天”模型,反映了中国古代数学与天文学的密切联系,其中的数学成就尤以勾股定理及其在天文测量中的应用最为突出。事实上,书中既有勾股定理的特例,也包含了一般形式的勾股定理的陈述。

《周髀算经》卷上记载了周公与大夫商高讨论勾股测量的一段对话:

周公问:“没有梯子可供我们上天,又没有一把合适的尺子可供我们量地,那么,怎么确定天有多高、地有多广呢?”

商高答:“办法是有的,那就是利用勾、股、弦之间的关系,即勾三、股四、弦五。”

在这一问一答间,学者商高以举例形式向统治者周公介绍了一条数学定理,即勾股定理。值得注意的是,商高在“勾三、股四、弦五”之后,紧接着说了下面这样一段话:

“既方之,外半其一矩,环而共盘,得成三、四、五。两矩共长二十有五,是为积矩。”

^① T. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, p.355, Cambridge, 1926

这段话已引发了许多的讨论. 我们认为, 前面介绍的赵爽弦图所给出的勾股定理证明, 很可能实际上就是对上述商高这段文字的诠释.

陈子与勾股定理一般形式

周公姬旦是周武王之弟, 曾做过摄政王, 上述这段对话应该是发生在公元前11世纪的事情. 在《周髀算经》卷上另一处更进一步叙述了周公后人、贵族荣方与学者陈子的对话:

荣方: 听说用先生的方法能知道太阳的高度与圆径, 以及日光照射的范围; 能推算太阳日行度数及冬、夏至时分. 凡人目所及, 日光所达, 星宿的位置, 天地之广袤, 用先生的方法无所不晓, 是不是这样呢?

陈子: 是这样.

荣方: 我虽然缺乏悟性, 但愿向先生请教. 您看像我这样的人能学会这种方法吗?

陈子: 能. 这方法的奥妙全在于数学的运用. 您已学习了足够的数学知识, 只是还需要用心思考, 才能明白其中的道理.

荣方回去百思仍不得其解, 经反复请求, 陈子向他详细解释了自己的方法, 陈子的论述很长, 其中最关键之处是这样一句话(图4):

“勾股各自乘, 并而开方除之, 得邪至日.”

这与前面提到的赵爽“勾股圆方图说”中的叙述一致, 是一般的勾股定理, 只不过在这里是以从天文测量总结出来的普遍规律的形式出现而已.

得邪至日從髀所旁至日所十萬里 旁此古邪字求其數 之術日以表南至日下六萬里爲句以日高八	算經十書 周髀算經卷上 三 微波榭	下爲句日高爲股句股各自乘并而開方除之 寸以兩表相去二千里乘之得十六萬爲實以 影差二十爲法除之得從 表端上至日八萬里也 若求邪至日者以日
---	---	---

图 4 《周髀算经》中的勾股定理

勾股定理与量天测地

荣方和陈子生活于公元前7—6世纪, 大约与古希腊发现勾股定理的毕达哥拉斯同时代。我们已经看到, 中国古代勾股定理的发现与天文测量密切相关。在以农耕为基础古代社会, 观天授时, 事关国计民生, 比较精密的天文测量与计算, 很自然受到统治者和学者们的共同关注。周公是历史上有名的政治家, 在周代初期, 辅佐三代君主, 平叛克乱, 励精图治, 制礼乐, 建典章, 发展生产, 兴办教育, 对周王朝