21世纪高等院校教材

电类与信息类专业适用

大学数学（二

（实函数与复函数微积分）

王传荣　朱玉灿　徐荣聪　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材
电类与信息类专业适用

大学数学(二)

(实函数与复函数微积分)

王传荣　朱玉灿　徐荣聪　编著

科学出版社
北京

内容简介

本套书紧扣现行大学本科电类与信息类等专业的公共基础课的教学要求，将复分析与实分析作为一个整体互相交融、有机结合，场论与多元函数微积分统一处理，并以线性代数为工具贯穿全书，建立起自然而紧凑的新体系. 全书共分三册，内容包括一元函数与多元函数微积分、矢量分析与场论、复变函数、积分变换、数学物理方程. 体系新颖，结构紧凑自然，具有良好的可读性.

本书可供高等院校电类与信息类各专业本科教学选用教材和教学参考书，也可供其他专业师生及工程技术人员阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 2，实函数与复函数微积分/王传荣，朱玉灿，徐荣聪编著. —北京：科学出版社，2008

21 世纪高等院校教材 · 电类与信息类专业适用

ISBN 978-7-03-020514-8

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①王… ②朱… ③徐… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 ②实变函数-高等学校-教材 ③复变函数-高等学校-教材 Ⅳ. O13 O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 012763 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：张怡君
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏主印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 1 月第一次印刷 印张：22 1/2
印数：1—4 000 字数：400 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

众所周知，数学基础课在高等教育中具有十分重要的基础地位，电类和信息类专业由于其专业特征，对数学基础课的要求比较高. 现行工科数学基础课通常由“高等数学”和“工程数学”组成. “工程数学”应包含几门具体课程，因专业不同而差异很大. 这一体系可追溯到 20 世纪五六十年代，但现在的课程体系和相应教材基本形成于 20 世纪的 70 年代末到 80 年代初. 由于种种原因，目前数学公共基础课的总学时一般不足原来的四分之三. 高等数学和工程数学的各门课程又孤立分割，自求完备. 教材的新版本不断充实内容，越编越厚. 于是旧课程体系、旧教材体系与大幅度压缩的总学时数之间形成尖锐的矛盾.

2001 年开始，我们在福州大学对电类与信息类专业的数学基础课进行改革，在保留数学基础课现有总学时不变的前提下，把原“微积分”、“线性代数”、“复变函数”、“积分变换”、“矢量分析与场论”、“数学物理方程与特殊函数”等六门课程重组为两门课程：“线性代数与空间解析几何”和“大学数学——实函数与复函数微积分”(一)、(二)、(三)，后者分三个学期讲授. 在这样一种新体系下，代数、几何和分析互相渗透，实分析与复分析统一处理，有机结合，这与现代数学发展的特征是一致的，它使我们能够从不同角度更深刻地揭示相关内容的实质，突出若干原来分属不同课程教学内容的共同本质，减少不必要的重复，以自然的线条使教学内容的结构更为紧凑. 根据我们的经验，这可比旧教材体系节约 16～20 学时，有效地缓解旧教材体系与大量压缩的总学时数之间的矛盾. 我们把节约的学时尽量用于恢复被删减的习题课，加强基础训练，加强思维素质的培养，保障教学质量.

本书是我们在改革过程中形成和使用的讲义的基础上经反复修订而成的，基本内容符合“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和“工程数学课程教学基本要求”，使用本书要求在第一学期同时开设“线性代数”或“线性代数与空间解析几何”. 本书有下述若干特点：

第一，实分析与复分析作为一个整体互相交融，更加突出教材内容的本质特征. 例如，在第二型曲线积分之后陈述复积分，使 Green 公式、Cauchy 积分定理和 Cauchy 积分公式共同的本质和使用方法更为鲜明；又如，函数展开为幂级数的条件，在原来高等数学范围内是难以讲清楚的，利用解析函数的概念便较易讲清楚了，这也是本书采用新体系的优点之一.

第二，把多元函数微积分学与场论密切联系，揉合在一起，它使第二型积分有清晰的应用背景，使 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式有清晰的物理解释，也

使读者看到几种特殊场之间的关系实质上就是第二型曲线积分与路径无关的等价条件.

第三,将线性代数作为基本工具贯穿于第 5 章及以后各章.代数、几何与分析互相渗透,既可把所述内容刻画得更深刻、更一般,又能使读者在应用中加深对线性代数知识的理解.

第四,对若干经典内容采用新颖的表述方式.例如,本书利用质量分布模型引进第一型积分,以统一的方式描述重积分、第一型曲线积分和第一型曲面积分的概念、性质和应用;利用复变函数方法完整地刻画平面场,利用线性代数描述场在正交曲线坐标系下的表示,以便于接受的方式引进路见可教授推广的留数定理,这是我国数学家的新贡献,如果不追究理论的细节,利用推广的留数定理计算积分围道有极点的复积分及相关的实积分,比现行教材中传统的处理方法要方便得多.

第五,本书包含许多"注记",主要是用于帮助读者加深对有关概念、知识、方法的理解和延伸以及避免理解上的混淆和失误.本书对部分例题给出多种解法,以期帮助读者对学过的知识能融会贯通.为使本书既适合工科专业的教学要求,又不失严谨,我们对若干概念和未加证明的命题等给出相应的参考文献.本书打"*"号的章节和例题等,有些是供有关专业选用的,如第 14 章;有些则是提供给有兴趣的读者作为阅读材料,如线性度量空间的极限与连续、微分形式的 Stokes 公式简介、一般积分变换简介、电子束聚焦、电磁场一系列方程的推导及幅角原理在控制论的应用等.

本书是按较为新颖的体系展开的,其各章的主要内容如下:第 1 章到第 3 章介绍经典的一元函数微积分.第 4 章介绍常微分方程.第 5 章介绍空间解析几何,供选用,如果在第一学期开设"线性代数与空间解析几何",则此章可略去.第 6 章介绍多元函数微分学,其中,利用 Jacobian 矩阵阐述复合函数求偏导数的链式法则,利用二次型阐述多元函数的极值,并将向量函数的导数与微分、数量场的等值面、向量场的向量线等以自然的方式融入本章.第 7 章介绍解析函数与共形映射,其内容,特别是 Cauchy-Riemann 方程是多元函数微分学的自然延伸.第 8 章介绍第一型积分,包括重积分、第一型曲线积分和第一型曲面积分.第 9 章介绍第二型曲线积分和复积分.第 10 章介绍第二型曲面积分与场论.第 11 章介绍无穷级数,先介绍复数项级数的概念和性质,正项级数、交错级数和任意复数项级数及其审敛,然后介绍复函数项级数、幂级数、Laurent 级数、Fourier 级数(包括其复数形式),实幂级数作为实系数幂级数在实轴上的限制而得到.第 12 章介绍留数理论及其应用.第 13 章介绍积分变换,主要是 Fourier 变换和 Laplace 变换,其中单辟一节介绍 Fourier 变换与 Laplace 变换的应用,希望读者能把二者的特征和用法加以比较.最后用一小段简要介绍一般积分变换的概念及若干常用的变换,如 Milin 变换、Z 变换和小波变换.第 14 章介绍数学物理方程,主要是介绍定解问题和利用分

离变量法求解数学物理方程的定解问题. 而利用积分变换法求解定解问题，有一部分则在第 13 章作为积分变换的应用介绍. 此外，因“数学实验”一般另外开设课程，所以本书只把“数学实验纲要”列为附录，并指明它结合的章节.

本书附有相当数量的习题，它与现行多数数学公共基础课教材对本科数学教学的要求大致相当. 而每章末配有要求较高的综合性练习题，其中包含了相当数量的历年硕士研究生入学考试试题及为进一步提高而编写的练习，这部分供教师教学或读者学习过程中根据需要选用.

路见可教授和李明忠教授审阅了本书并提出宝贵意见，我们深表谢意. 我们还要感谢科学出版社的热情关注及大力支持才使本书得以尽早出版.

本书在编写过程中得到福州大学教务处、福州大学数学系、数学与计算机科学学院、物理与信息工程学院及许多同事的宝贵支持，周燕、周勇、程航、舒志彪、余建辉等在使用本教材进行教学的过程中为本书提出了许多有益建议和改进意见，周勇提供本书习题答案，王宏健编写了附录Ⅲ“数学实验纲要”，福州大学信息与通信工程系和电气工程学院的历届学生也为本书的完善提供了许多宝贵的意见，在此一并致谢.

作为新教材，本书中谬误或不成熟的地方在所难免，敬请读者予以指正，并与我们联系，以期在今后加以修订和改进，使之臻于成熟.

王传荣　朱玉灿　徐荣聪

2007 年 8 月于福州大学

目　　录

第 6 章　多元函数微分学

本章讨论多元函数和向量函数的微分学，并介绍数量场和向量场的若干基础知识. 它们虽是一元函数微分学的自然延伸，却有着显著的不同性质和特点. 多元函数和向量函数微分学同一元函数微积分一样，也是近代数学的最重要基础之一，在自然科学、工程技术、经济学等领域有着广泛的应用.

6.1　多元函数和向量函数的极限与连续

6.1.1　n 维向量空间的区域

1. $\mathbf{R}^n$ 的度量

记 $\mathbf{R}$ 为实数全体所成的集合. 对于 n 个实数有序组的全体

$$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_j \in \mathbf{R}, j = 1, 2\cdots, n\},$$

可规定加法及与数的乘法如下：

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，$\alpha\in\mathbf{R}$，定义

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n);$$

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n),$$

则 $\mathbf{R}^n$ 构成一个**线性向量空间**(linear vector space). 又若规定它的内积为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

则它构成一个**内积空间**. 这时，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

称为 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**或**度量**.

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**(distance).

2. $\mathbf{R}^n$ 的邻域

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$ 中到 $\boldsymbol{a}$ 的距离小于 r 的点全体所成之集

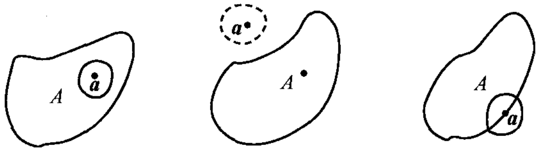
$$B(\boldsymbol{a}, r) \xlongequal{\triangle} \{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < r\}$$

$$= \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2 < r^2, x_j \in \mathbf{R}, j = 1,2,\cdots,n\}$$

称为以 $\boldsymbol{a}$ 为心，半径为 r 的球，又称 $B(\boldsymbol{a},r)$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的 **r-邻域**(neighbourhood). 当 $n=3$ 时，它就是通常三维空间中由不等式 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2<r^2$ 所确定的球. 当 $n=2$ 时，它就是二维平面以 a 为心，半径为 r 的圆盘 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<r^2$. 当 $n=1$ 时，它就是以 a 为中心，半径为 r 的区间 $(a-r,a+r)$. $\mathring{B}(a,r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid 0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<r\}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**去心邻域**.

3. $\mathbf{R}^n$ 的开集和闭集

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，若存在以 $\boldsymbol{a}$ 为心的球 $B(a,\delta)\subset A$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的**内点**；若存在 $B(\boldsymbol{a},\delta)$ 使得它与 A 没有交点，即 $B(\boldsymbol{a},\delta)\cap A=\varnothing$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是集 A 的**外点**，若 $\boldsymbol{a}$ 既非 A 的内点，又非 A 的外点，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的**边界点**. 如图 6-1 所示.



(a) 内点 (b) 外点 (c) 边界点

图 6-1

集 A 的内点全体称为 A 的**内部**，记作 $\mathrm{int}A$. 集 A 的外点全体称为 A 的**外部**，记作 $\mathrm{out}A$. 集 A 的边界点全体称为 A 的**边界**，记作 ∂A. $\overline{A}=A\cup\partial A$ 称为 A 的**闭包**. 若 $\forall\,\delta>0, \mathring{B}(\boldsymbol{a},\delta)\cap A\neq\varnothing$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的**聚点**，这时 $\boldsymbol{a}$ 的任意邻域都含有 A 的无数个点，$\boldsymbol{a}$ 的聚点可能是 A 的点，也可能不是 A 的点但是 A 的边界点.

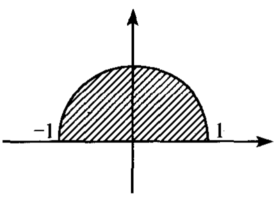


图 6-2

例 1 $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1, y\geqslant 0\}$，它是上半单位圆，包括直径 $[-1,1]$ 在其中(图 6-2).

$\mathrm{int}A = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1, y>0\}$,

$\mathrm{out}A = \{(x,y) \mid x^2+y^2>1\} \cup \{x^2+y^2\leqslant 1 \text{ 且 } y<0\}$,

$\partial A = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1 \text{ 且 } y>0\} \cup \{(x,y) \mid y=0, -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

若集合 A 的每一点均是 A 的内点，则称 A 为**开集**，若 A 的余集 A^c 是开集，则称 A 是**闭集**. 例如，$A_1=B(\mathbf{0},1)=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的开集，$A_2=\{(x,y) \mid x^2+y^2>1\}$——单位圆外部也是 $\mathbf{R}^2$ 的开集，$A_3=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}=A_2^c$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的闭集，称为闭单位圆，$A_4=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$ 既非开集，也非闭集(图 6-3).

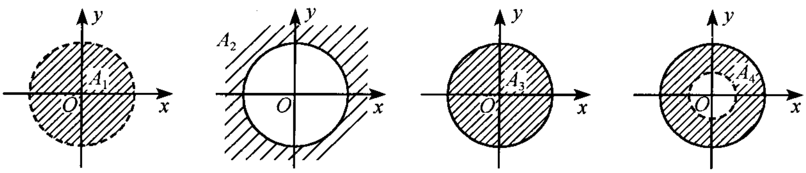


图 6-3

4. 有界集和无界集

若 $\mathbf{R}^n$ 中的集 A 包含于某个球内部，或者说存在 $R>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in A$ 时便有 $\|\boldsymbol{x}\|<R$，则称 A 是**有界集**. 否则称 A 是**无界集**. 设 A 是有界集，A 中任意两点距离的最大值称为 A 的**直径**，记为 $\operatorname{diam}A$，即 $\operatorname{diam}A=\max\limits_{\substack{x\in A\\ y\in A}}\|x-y\|$ ①.

5. 曲线与曲线段

在 $\mathbf{R}^3$ 中，曲线方程可借助参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

来表示，若限制 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则通常可得到一段曲线——曲线段. 类似地，对于 $\mathbf{R}^n$ 用

$$x_j=x_j(t)\quad (j=1,2,\cdots,n),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

来描述曲线段，有时也简称曲线，若诸 $x_j(t)$ 均是 t 在 $[\alpha,\beta]$ 的连续函数，则称曲线段 Γ 是连续的. 由空间解析几何知道，在 $\mathbf{R}^3$，连接 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 两点的直线段 $\overline{P_1P_2}$ 可表示为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\overset{\text{令}}{=\!=}t,$$

则得到参数方程

$$x=(1-t)x_1+tx_2,\quad y=(1-t)y_1+ty_2,\quad z=(1-t)z_1+tz_2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的点，$\overline{P_iP_{i+1}}$ 是 P_i 为始点，P_{i+1} 为终点的线段，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\overline{P_iP_{i+1}}$ 是由这有限条线段 P_iP_{i+1} 首尾依次相接而成，称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一条**折线**.

6. 区域和闭区域

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$，恒存在 A 中一条折线(或连续曲线)连接 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，则称 A 是一个**道路连通集**，这时也说 A 在 $\mathbf{R}^n$ 是连通的. $\mathbf{R}^n$ 中的连通开集称为**区域**(domain)或开区域. 区域连同边界一起称为**闭区域**，换句话说闭区域是区

---

① 严格说，A 的直径应是 A 中任意两点的距离上确界，即 $\operatorname{diam}A=\sup\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\mid \boldsymbol{x}\in A,\boldsymbol{y}\in A\}$. 上确界，即最小上界，其定义可参阅谷超豪主编《数学辞典》.

域的闭包.

例如,$A_1=\{(x,y)\mid x+y>0\}$,$A_2=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$都是 $\mathbf{R}^2$ 的开区域,$A_3=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}<z<\sqrt{1-x^2-y^2}\}$是 $\mathbf{R}^3$ 的开区域,$A_4=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}$,$A_5=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$均是 $\mathbf{R}^2$ 的闭区域(建议读者自行作出其图形).

平面 $\mathbf{R}^2$ 中的不自交的连续曲线称为简单曲线,若在 $\mathbf{R}^2$ 中的区域 D 是没有洞的,即它的任一条简单闭曲线 C 可以在 D 内连续地收缩成一点,则称 D 是**单连通域**,若区域 D 是有洞的,则称 D 是**多连通域**. 例如,图 6-4 中 A_1 是 $\mathbf{R}^2$ 的单连通域,A_2 是 $\mathbf{R}^2$ 的多连通域.

图 6-4

6.1.2　多元函数和向量函数

1. 多元函数的概念

已经知道:一元函数 $y=f(x)(x\in D)$是实数集合 D 到实数集合的一个映射,它刻画了变量 x 与 y 之间的相互依赖关系,但更多的情况是在一个过程中同时有多个变量互相依赖,为了刻画它们之间的依赖关系,我们引进多元函数.

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,**n 元函数**

$$u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad x\in D\subset\mathbf{R}^n$$

是从 D 到实数集合 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $f:D\to\mathbf{R}$,其中,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为**自变量**,$u$ 称为**因变量**,D 称为函数的**定义域**,映射的像集

$$f(D)=\{y\mid y=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D\}$$

称为函数 $u=f(x)$的**值域**. 例如,

$$u=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2},\quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1,$$

$$z=\ln(1-x-y),\quad x+y<1,$$

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

$$u=x^2+y^2+z^2+2xy,\quad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3,$$

$$z=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2<1,\\ 1, & x^2+y^2\geqslant 1\end{cases}$$

等均是多元函数.

与一元函数相似,当用某个算式表示多元函数时,凡是使算式有意义的自变量组成的点的集合称为这个多元函数的自然定义集或**自然定义域**. 例如,函数$u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$的自然定义域是

$$x^2+y^2+z^2<1.$$

对于一元函数 $y=f(x),x\in D\subset\mathbf{R}$,称集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$为函数$y=f(x)$在 $\mathbf{R}^2$ 的**图像或图形**. 例如函数 $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$的图像是$\{(x,y)\mid y=x^2,-\infty<x<+\infty\}$,几何上表示一条抛物线. 同样,在多元函数,称集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\mid u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$$

为多元函数 $u=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的图像,例如函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}(x^2+y^2\leqslant 1)$的图像是

$$\{(x,y,z)\mid z=\sqrt{1-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

它表示空间 $\mathbf{R}^3$ 的上半单位球面,又如

$$\{(x,y,z)\mid z=x^2+y^2,(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$$

是函数 $z=x^2+y^2$ 的图像,在几何上它是 $\mathbf{R}^3$ 中的一张旋转抛物面(图 6-5).

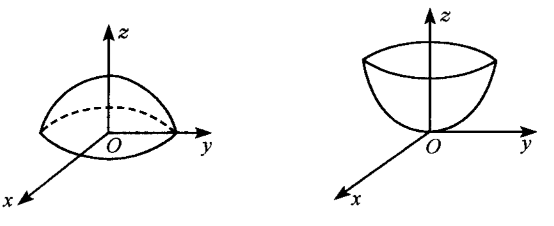


图 6-5

例 2 求函数 $u=f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-x}}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$的自然定义域.

解 函数$\sqrt{x^2+y^2-x}$的自然定义域是 $x^2+y^2-x\geqslant 0$,即$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$,函数$\sqrt{2x-x^2-y^2}$的自然定义域是 $2x-x^2-y^2\geqslant 0$,即$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$,但分母不能为零,故函数 $u=f(x,y)$的自然定义域是

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant 0\text{ 且}(x-1)^2+y^2<1\right\}$$

(图 6-6). 一般地,函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的图像$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),$

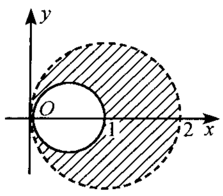


图 6-6

$(x,y)\in D\}$是 $\mathbf{R}^3$ 中的一张曲面.

例 3　若 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$. 求 $f(x,y)$的表达式.

解　令 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}$,则 $x=\dfrac{u}{1+v}, y=\dfrac{uv}{1+v}$.

当 $v\neq-1$ 时,

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

当 $v=-1$ 时,即$\dfrac{y}{x}=-1$ 时,$u=x+y=0$. 注意到

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$

可得 $f(0,-1)=0$,故

$$f(u,v)=\begin{cases}\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}, & v\neq-1,\\ 0, & u=0,v=-1.\end{cases}$$

因此,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}, & y\neq-1,\\ 0, & x=0,y=-1.\end{cases}$$

2. 向量函数

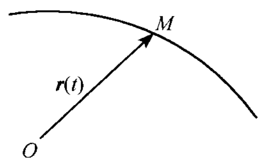


图 6-7

设质点在空间中运动,x 时刻的位置 M 可以用坐标 $(x(t),y(t),z(t))$表示,也可以用向量 $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OM}$来表示(图 6-7),即

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}.$$

通常 $\boldsymbol{r}(t)$是随着时间 t 的变化而改变其大小和方向的,称向量 $\boldsymbol{r}(t)$是 t 的一个**向量函数**或**矢量函数**. 例如,空间中的一质点 M 沿着以 z 轴为中心,底面半径为 a 的圆柱面以角速度 ω 绕 z 轴旋转,同时又以速度 v 沿平行于 z 轴的方向上升(其中 ω 和 v 都是常数),则 M 点的运动轨迹是一条螺旋线,它的参数方程是

$$x=a\cos\omega t,\quad y=a\sin\omega t,\quad z=vt,$$

用向量函数表示成

$$\boldsymbol{r}(t)=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+a\sin\omega t\boldsymbol{j}+vt\boldsymbol{k}.$$

显然 $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OM}$,由此可见,向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在几何上可表示空间曲线,它正是向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$终端运动的轨迹,所以又叫 $\boldsymbol{r}(t)$的**矢端曲线**(向量又称矢量).

给定一个定义在集合 D 的向量函数$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$,它在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的 $Oxyz$ 直角