普通高中课程标准实验教材

高中数学

选修 2–3

GAOZHONG SHUXUE

新课标新精编

XINKEBIAO
XINJINGBIAN

主编　胡建军

配人教A版

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

普通高中课程标准实验教材

高中数学

选修2-3

新课标 新精编

XINKEBIAO XINJINGBIAN

顾　问　岑　申　王而治　金才华　许芬英

主　编　胡建军

编　者　金克勤　潘　青　陈　荣

浙江教育出版社

ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

新课标新精编:人教版.数学.2-3:选修/胡建军主编.—杭州:浙江教育出版社,2007.10

ISBN 978-7-5338-7195-6

Ⅰ.新… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第145590号

责任编辑 金馥菊　　封面设计 韩 波

责任校对 胡 星　　责任印务 温劲风

普通高中课程标准实验教材

新课标 新精编 高中数学 选修2-3

- 主 编 胡建军
- 出版发行 浙江教育出版社
  (杭州市天目山路40号 邮编310013)
- 图文制作 杭州富春电子印务有限公司
- 印 刷 杭新印务有限公司
- 开 本 880×1230 1/16
- 印 张 6.75
- 字 数 210 000
- 印 数 000 1—8 000
- 版 次 2007年10月第1版
- 印 次 2007年10月第1次
- 标准书号 ISBN 978-7-5338-7195-6
- 定 价 9.00元

联系电话:0571-85170300-80928

e-mail:zjjy@zjcb.com　　网址:www.zjeph.com

前 言

高中课程改革正在全国各地逐步展开。其中，高中数学新课程旨在提高学生的科学素养，改变学生的学习方式，从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面培养学生。为了深入贯彻新课程标准的精神，配合人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》的顺利使用，帮助学生实现高中数学课程的教育目标，我们组织了教学第一线的数学特级教师和优秀中青年教师，在深入研究了《高中数学课程标准》及其各种版本实验教科书的基础上，编写了这套《新课标新精编高中数学》丛书。

本丛书的编写以"讲求循序渐进，重现科学思想与科学方法，强调实践意识与探究精神，渗透情感态度与价值观的教育"为原则，与人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套。它具有以下几个鲜明的特点：

1. 同步性。本丛书的例题和练习均以课时为基本单位，根据新课程教学的要求和学生学习的特点进行编写，与教学同步，便于教师的教学和学生的使用。

2. 科学性。本丛书根据新课标学习的需要，设置了"学法指导"、"基础例说·基本训练"、"应用·拓展·综合训练"、"自我评估"、"高考链接"等栏目。"学法指导"帮助学生深刻理解教材的重点、难点和目标要求。"基础例说·基本训练"分"例说"和"训练"两部分，"例说"以典型例题为载体，教给学生思考问题、分析问题和解决问题的策略和方法；"训练"目的在于让学生通过训练，巩固所学知识，发展思维能力。"应用·拓展·综合训练"纵览全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。"自我评估"为全章知识的综合评估，分 A，B 两份试卷，其中 A 卷为基本要求，B 卷为较高要求。"高考链接"选取近几年有代表性的高考真题，让学生试做，以同步了解高考命题的基本特点。

3. 层次性。为了适应不同学习水平的学生的不同要求以及学生在不同学习阶段的不同要求，本丛书选编的训练题都分为"A 组"和"B 组"，分别反映了课程的基础性目标和发展性目标。使不同层次的学生都能够充分获益，也符合循序渐进的学习原则。

4. 新颖性。本丛书力求体现新课程的理念，突出数学探究并联系实际，注重激发学生学习的兴趣，力求反映近年来高中数学教学和命题研究的最新成果，所选习题无论是在内容上，还是在形式上，都具有一定的新颖性。

由于时间匆促，加上作者对新课程的认识有待进一步提高，本丛书在编写时难免出现一些不足之处，敬请广大师生指正。

浙江教育出版社

2007 年 10 月

QIANYAN

目　录

MULU

第一章 计数原理

学法指导

本章主要内容有：分类加法计数原理与分步乘法计数原理、排列与组合、二项式定理.

学习目标

1. 通过实例，总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理；能根据具体问题的特征，选择分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决一些简单的实际问题.

2. 通过实例，理解排列、组合的概念；能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式，并能解决简单的实际问题.

3. 能用计数原理证明二项式定理，会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

重点、难点

本章的重点是两个计数原理，排列、组合的意义及排列数、组合数的计算公式.

本章的难点是正确运用两个计数原理以及排列、组合概念分析和解决问题.

主要概念、定理、公式及规律

1. 完成一件事有两类不同方案，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N=m+n$$

种不同的方法.

2. 完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N=m\times n$$

种不同的方法.

3. 从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示.

n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列.

4. 从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素合成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

5. 排列与组合的主要公式：

(1) 排列数公式

$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ $(m\leqslant n)$，

$\mathrm{A}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ $(m\leqslant n)$，

$\mathrm{A}_n^n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$；

(2) 组合数公式

$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}$ $(m\leqslant n)$；

(3) 组合数性质

$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$ $(m\leqslant n)$，

$\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$ $(m\leqslant n)$.

6. 表示二项式的幂展开的二项式定理是 $(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n$，其中二项式系数是组合数 $\mathrm{C}_n^r(r=0,1,2,\cdots,n)$. 展开式共有 $n+1$ 项，其中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r$.

学习方法指导

1. 分类加法计数原理和分步乘法计数原理是计数的两个基本原理，是导出排列数、组合数公式的根本依据.

2. 分类加法计数原理和分步乘法计数原理，都是讨论"完成一件事"的所有不同方法种数的问题. 在具体问题的解决中，要将"完成一件事"这个抽象的概念具体化.

3. 两个计数原理的区别在于：分类加法计数原理与"分类"有关，类与类之间互不相容，用任何一类中的任何一种方法都可以完成这件事；分步乘法计数原理与"步骤"有关，只有依次完成每一个步骤才能完成这件事情.

4. 利用分类加法计数原理时，分类要根据具体问题确定一个分类标准，保证完成这件事的任何一种方法需属于且只能属于某一类，即"不重不漏".

5. 利用分步乘法计数原理时，应根据具体问题确定分步标准，保证完成这件事必需且只需连续做完所分的各个步骤，即"步骤完整".

6. 排列是运用分步乘法计数原理计数的一个重要而基本的模型，利用排列数计数是一种简捷的计数方法.

7. 排列数计数有两个基本特征：(1)无重复；(2)有序. 即从 n 个不同元素中取出的 m 个元素中，既没有重复的元素，也没有重复取同一元素的情况；取出的 m 个元素要按一定的顺序排列，不同的顺序是不同的排列.

8. 组合是建立在排列的基础上的另一个重要的计数模型，有两个基本特征：(1)无重复；(2)无序.

9. 要搞清排列与排列数、组合与组合数、排列与组

合这些概念的区别和联系. 如从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$个元素的排列,可以看做从 n 个不同元素中先取出 m 个元素的组合,然后把每一个组合都做全排列. 搞清这一关系,易得出$A_n^m=C_n^m A_m^m$,所以 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{m!}$.

10. 要掌握排列、组合应用题的两种基本思考方法:(1)正向思考,也就是通过"分类"或"分步",把较复杂的问题分解为若干个简单的排列、组合问题;(2)逆向思考,用集合的观点,从问题涉及的集合在全集中的补集入手,从全集中的元素个数(方法数)中剔除不符合条件的元素个数(方法数).

11. 利用计数原理分析二项式的展开过程,是二项式定理的一个难点,也是加深理解和掌握该定理的一个重要环节. 在学习过程中要进行认真细致地观察和研究. 如仔细理解展开式各项的结构、次数、二项式系数等的含义.

基础例说·基本训练

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理(1)

例 说

例 1 某公司只会英语的有15人,只会日语的有7人,只会德语的有 3 人,其余的人都不懂外语. 若要选派 1 名懂外语的人去参加一个国际交易会,问有多少种不同的选法?

解 从懂外语的人中选派 1 人,有 3 类办法. 第 1 类办法是从会英语的人中选派 1 人,有 15 种选法;第 2 类办法是从只会日语的人中选派 1 人,有 7 种选法;第 3 类办法是从只会德语的人中选派 1 人,有 3 种选法. 根据分类加法计数原理,不同选法的种数是 $N=15+7+3=25$.

注意 "从公司中选派 1 名懂外语的人"就是本例"要完成的事",从会日语、会德语或会英语的人中任选 1 人,都可以完成这件事,所以利用分类加法计数原理求解.

例 2 一家公司的办公大楼里有28个部门,如果每个部门都安装一个电话分机,那么用 1,2,3 三个数字所组成的三位数作为各分机的号码够不够?

解 用 1,2,3 三个数字组成一个三位数,可以分 3 个步骤完成:第 1 步,从 3 个数字中取 1 个数作为百位数,有 3 种不同的取法;第 2 步,从 3 个数字中取 1 个数作为十位数,有 3 种不同的取法;第 3 步,从 3 个数字中取 1 个数作为个位数,有 3 种不同的取法. 根据分步乘法计数原理,所组成的不同三位数有

$N=m_1\times m_2\times m_3=3\times3\times3=27$(个).

因为办公大楼里有 28 个分机,而能组成的三位数号码只有 27 个,所以用 1,2,3 三个数字组成的三位数作为各分机的号码是不够的.

注意 完成"用 1,2,3 组成 1 个三位数的分机号码"这件事,本例运用的是分步乘法计数原理. 这件事也可以用分类加法计数原理完成,按三位数的第 1 个位置上数字是 1,2,3 分成 3 类,每类将所有情况一一列举. 如首位是 1 的有 111,112,113,121,122,123,131,132,133 共 9 种情况,所以共有 $9\times3=27$(个)号码. 显然,本例用分步比用分类求解简捷. 一般地,分类是将产生的结果按某一标准分类,而分步则需要分析每个结果是如何产生的,可以分哪些步骤逐一完成得到.

例 3 有 A,B,C 三个城市. 上午从 A 城去 B 城有 5 班汽车,2 班火车,都能在 12:00 前到达 B 城. 下午从 B 城去 C 城有 3 班汽车,2 班轮船. 某人上午从 A 城出发去 B 城,要求 12:00 前到达,然后他下午去 C 城,问有多少种不同的走法?

解 根据分类加法计数原理,上午从 A 城去 B 城,并在 12:00 前到达,共有 $5+2=7$(种)不同的走法.

下午从 B 城去 C 城,共有 $3+2=5$(种)不同的走法.

根据分步乘法计数原理,上午从 A 城去 B 城,然后下午从 B 城去 C 城,共有 $7\times5=35$(种)不同的走法.

注意 "从 A 城出发经 B 城到 C 城"是本例要"完成的事". 本例分成两步:第 1 步,从 A 城到 B 城;第 2 步,从 B 城到 C 城,并统计各步中的不同走法总数. 但本例也可以先分类再分步. 若根据从 A 城到 B 城有两种不同的走法分类:第 1 类,从 A 城到 B 城坐汽车,有 5 种走法,再从 B 城到 C 城共有 $3+2=5$(种)不同走法,所以从 A 城到 C 城有 $5\times5=25$(种)走法;第 2 类,从 A 城到 B 城坐火车,有 2 种走法,再从 B 城到 C 城有 5 种走法,所以从 A 城到 C 城有 $2\times5=10$(种)走法. 综上所述,共有 $25+10=35$(种)不同的走法. 还可分成 4 类:汽车+汽车,汽车+轮船,火车+汽车,火车+轮船,即共有 $5\times3+5\times2+2\times3+2\times2=35$(种)不同的走法. 解题时要仔细审题,分析"要完成的事"的条件,通过探索,逐步积累经验,才能找到简捷的方法.

训 练

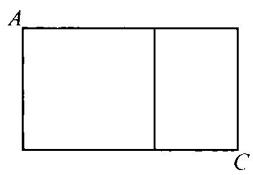
A 组

1. 某班有男生 30 人,女生 20 人,选 1 人去参加座谈会. 问:
   (1) 有几类选法?
   (2) 每类各有多少种不同的选法?
   (3) 一共有多少种不同的选法?

2. 某班有男生 23 人，女生 22 人，选男生、女生各 1 人去参加座谈会. 问：
   (1) 这个事件可以分几步完成？
   (2) 每一步各有多少种不同的选法？
   (3) 一共有多少种不同的选法？

3. 完成某项工作原需 4 个步骤，每一步骤中的方法数相等，完成这项工作共有 81 种方法. 革新后完成这项工作减少了其中一个步骤，且其他步骤中的方法数保持不变，问有多少种不同的方法数？

4. 一个街区的道路如图所示，如果从 A 地去 C 地，每段路只能经过一次，那么有多少种不同的走法？



(第 4 题)

5. 已知直线 $l_1 /\!/ l_2$，A,B,C 是直线 l_1 上的 3 个点，D,E,F,G 是直线 l_2 上的 4 个点. 若从 A,B,C 中取 1 个点，再从 D,E,F,G 中取 1 个点，过所取的两点作直线，则可以作出多少条不同的直线？

6. 一种号码锁有 3 个拨盘，每个拨盘上数的个数相等. 若要生产 200 把这种号码锁，则每个拨盘至少要配置多少个不同的一位数的数字？

7. 在一条线段上取 6 个点(不包括线段的两端)，以这 6 个点和线段的两个端点为端点的不同线段有多少条？

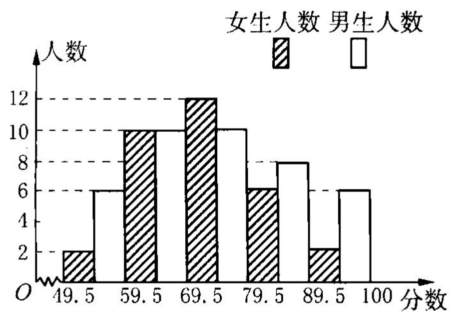
8. 从 1,2,3 三个数中取 1 个数作分子，从 4,5,6,7 四个数中取 1 个数作分母，组成一个分数. 这样能组成多少个值不相等的分数？写出这些分数.

B 组

9. (1) 十位数字是 1 的两位数有多少个？
   (2) 用 0～9 这 10 个数字组成的两位数字有多少个？

10. 由 26 个英文字母中的两个可组成一个单词，通常由一个辅音字母和一个元音字母构成. 如 in, at, to. 已知 26 个英文字母中共有 5 个元音字母：a, o, e, i, u，求由一个元音字母和一个辅音字母构成的单词最多可以有多少个？

11. 对一次数学测验的 72 名学生的成绩统计如图所示(成绩取整数). 现要从 60 分以下(不包括 60 分)，60 分～79 分，80 分～100 分的各分数段中抽男、女生各 1 名参加一个座谈会，问有多少种不同的抽取方法？



(第 11 题)

12. 一座山前面有 3 条山路，后面有 2 条山路. 问：
    (1) 某游客从前面上山，然后从后面下山，有多少种走法？
    (2) 某游客先上山再下山，有多少种走法？

第 2 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理(2)

例说

例 4　书架的第1层放有 4 本不同的计算机书，第 2 层放有 3 本不同的文艺书，第 3 层放有 2 本不同的体育书.

(1) 从书架上任取 1 本书，有多少种不同的取法？

(2) 从书架的第 1,2,3 层各取 1 本书，有多少种不同的取法？

(3) 甲、乙两位同学从书架上各取 1 本书，取到同一学科的书有多少种取法？

解　从书架上任取 1 本书，可以分成 3 类：第 1 类，取 1 本计算机书，有 4 种取法；第 2 类，取 1 本文艺书，有 3 种取法；第 3 类，取 1 本体育书，有 2 种取法. 所以共有 $4+3+2=9$(种)取法.

(2) 从书架的第 1,2,3 层各取 1 本书，可以分成 3 步：第 1 步，从第 1 层取 1 本书，有 4 种取法；第 2 步，从第 2 层取 1 本书，有 3 种取法；第 3 步，从第 3 层取 1 本书，有 2 种取法. 所以共有 $4\times3\times2=24$(种)取法.

(3) 甲、乙两位同学从书架上各取 1 本书，取到同一学科的情况有 3 类：都取到计算机书、都取到文艺书或都取到体育书. 其中甲、乙都取到计算机书要分 2 步：第 1 步，甲取 1 本计算机书，有 4 种取法；第 2 步，乙取 1 本计算机书，有 3 种取法. 所以共有 $N_1=4\times3=12$(种)取法. 而甲、乙都取到文艺书也分 2 步：第 1 步，甲取到 1 本文艺书，有 3 种取法；第 2 步，乙取 1 本文艺书，有 2 种取法. 所以共有 $N_2=3\times2=6$(种)取法. 同理，甲、乙都取到体育书有 $N_3=2\times1=2$(种)取法. 所以共有 $N_1+N_2+N_3=4\times3+3\times2+2\times1=20$(种)取法.

注意　计数时最重要的是弄清楚完成某件事(如取书)需分几类(步)进行. 如第(1)题中取到 1 本计算机书便独立完成了取 1 本书的事，取到 1 本文艺书或 1 本体育书也是独立完成了这件事，所以运用分类加法计数原理，将各类的方法数相加. 而第(2)题中取到 1 本计算机书不能完成从第 1,2,3 层各取 1 本书这件事，只有将取 1 本计算机书，然后取 1 本文艺书，再取 1 本体育书 3 步都完成后，才能完成"从第 1,2,3 层各取 1 本书"这件事，所以要使用分步乘法计数原理，将各步中的方法数相乘. 问题(3)需要根据具体条件进行分析，把比较复杂的条件(2 本书是同一学科)分解成若干个具体而简单的条件(2 本书都是计算机书或都是文艺书或都是体育书)后，再进行分步计数.

例 5　(1) 由数字 1,2,3 可组成多少个三位数？

(2) 由数字 1,2,3 可组成多少个各位数字都不同的三位数？

(3) 由数字 1,2,3 可组成多少个三位偶数？

解　(1) 组成一个三位数，可以分 3 步：第 1 步，取 1 个数作为百位数，有 3 种取法；第 2 步，取 1 个数作为十位数，有 3 种取法；第 3 步，取 1 个数作为个位数，有 3 种取法. 所以共有 $3\times3\times3=27$(个)三位数.

(2) 组成一个各位数字都不同的三位数可以分 3 步：第 1 步，取 1 个数作为百位数，有 3 种取法；第 2 步，取 1 个数作为十位数，因为要和百位数不同，有 2 种取法；第 3 步，取 1 个数作为个位数，因为与百位数、十位数不同，只有 1 种取法. 所以共有 $3\times2\times1=6$(个)三位数字都不同的三位数.

(3) 组成一个三位偶数，由于个位数只能是 2，只需安排百位与十位的数字. 所以分 2 步：第 1 步，取 1 个数作为百位数，有 3 种取法；第 2 步，取 1 个数作为十位数，有 3 种取法. 共有 $3\times3=9$(个)偶数.

注意　组成一个多位数常见的步骤是分步逐一安排各个位置上的数字，如本例的第(1)、(2)、(3)题所示的解法. 但要注意各个数位上数字是否能重复. 而第(3)题需先排有特殊要求的个位数字 2，否则会带来不必要的分类讨论. "优先安排有特殊要求的位置上的数"是计数中常用的一种方法，要予以充分的重视.

例 6　用 4 种不同的颜色给图 1-1 中的 A,B,C,D 四个区域涂色，要求每个区域只能涂一种颜色.

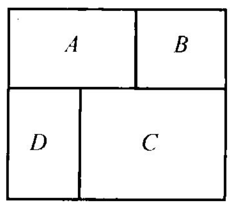


图 1-1

(1) 有多少种不同的涂法？

(2) 若相邻区域不能涂同一种颜色，有多少种不同的涂法？

解　(1) 分 4 步：依次涂 A,B,C,D 各个区域，分别都有 4 种涂法，所以共有 $4^4=256$(种)不同涂法.

(2) 分 4 步：第 1 步，涂 A，有 4 种涂法；第 2 步，涂 B，因为与 A 不能同色，只有 3 种涂法；第 3 步，涂 C，因为与 A,B 都不能同色，有 2 种涂法；第 4 步，涂 D，与 A,C 不能同色，有 2 种涂法. 所以共有 $4\times3\times2\times2=48$(种)不同涂法.

注意　涂色问题与组成多位数问题有着相似的解题思路：分步解决. 但涂色问题会像例 6 的第(2)题一样要求相邻区域不同色，这与多位数中要求的"各位数字不重复"相比，条件似乎宽松了，但情况却变得复杂. 因为各种图形的相邻情形比较多，例 6 介绍的是其中比较简单的一张填色图. 其中 A 与 B,C,D 相邻，B 与 A,C 相邻，C

与A,B,D相邻，D与A,C相邻．涂色的顺序最好先涂A或C，后涂B,D．因为A,C两个区域相邻的区域更多，所以要求更高．题中介绍的顺序$A\to B\to C\to D$比较简捷，如果按顺序$A\to B\to D\to C$涂，就会使解题难度增加．有兴趣的同学不妨试一试．

训练

A 组

13．某市的车牌号码有5位，其中首位要从A,B,C,D,E五个字母中选1个，其余各位可以从0～9共10个数字中选，求该市的车牌号有多少个不同的号码？

14．书架上有4本不同的计算机书，2本不同的语文书．从中取2本书给甲、乙两位同学．

(1) 有多少种不同的情况？

(2) 甲、乙两位同学取到的书不是同一学科的，有多少种不同的情况？

15．对数$\log_a b$中的a,b可以从1,2,3,4中任取两个不同的数字，问$\log_a b$的值有多少个？

16．书架的第1层放有2本不同的英语书和3本不同的日语书，第2层放有4本不同的英语书和5本不同的日语书，两层中没有任何两本书是相同的．

(1) 一位同学从第1层和第2层各取1本书，有多少种不同取法？

(2) 一位同学从第1层和第2层各取1本书，恰好取到的是同一种语言的书，有多少种不同的取法？

17．用1,2,3,4这4个数字组成一个四位数．

(1) 各位数字可以重复的四位数有多少个？

(2) 各位数字都不重复的四位数有多少个？

(3) 各位数字都不重复且末位是1的四位数有多少个？

(4) 各位数字都不重复且首位不能排1的四位数有多少个？

18．用0～9共10个数字组成一个四位数．

(1) 各位数字可以重复的四位数有多少个？

(2) 各位数字不能重复的四位数有多少个？

B 组

19．从1～9这9个数字中选出2个不同的数作为一个分数的分子与分母，共可组成多少个分数值不同的分数？

20．(1) 3个口袋中分别装有3个不同的白球，2个不同的红球，3个不同的黑球．从每个口袋中各取1个，有多少种不同取法？

(2) $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2)(c_1+c_2+c_3)$展开后共有多少项？

21．一个班级50名同学中有20名女生，30名男生，从中选出2名当正、副班长．

(1) 正、副班长都是男生的情况共有多少种？

(2) 正、副班长恰好是一男一女不同性别的情况共有多少种？

22．一种号码锁有4个拨号盘，每个拨号盘上有0～9共10个数字，则这4个拨号盘：

(1) 可以组成多少个四位数号码？

(2) 可以组成多少个各位数字都不同的四位数号码？

(3) 可以组成多少个大于5 000且各位数字都不相同的四位数号码？

23．将一颗骰子连抛3次．

(1) 恰有一次出现6点朝上的情况共有多少种？

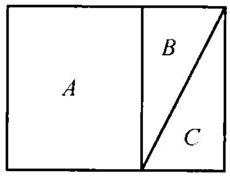
(2) 3次都不出现6点朝上的情况共有多少种？

24. 用0~9这10个数字能组成多少个没有重复数字的三位奇数?

25. 用红、黄、蓝、绿4种颜色给下面图中的A,B,C各个区域涂色,要求每个区域只能涂一种颜色.

(1) 颜色不能重复使用,有多少种不同的涂色方法?

(2) 相邻区域不能涂同一种颜色,有多少种不同的涂色方法?



(第25题)

第3课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理(3)

例7 4个人报名参加3项体育比赛.

(1) 每个人必须报且只能报一项,有多少种不同的报名方法?

(2) 每个体育项目必须有人报且只能报1个人,有多少种不同的报名方法?

解 (1) 设4个人分别为甲、乙、丙、丁.第1步先考虑甲,甲有3个选择;第2步考虑乙,因为甲的选择不影响乙,所以乙也有3个选择.同理,丙、丁也各有3个选择.所以共有$3\times3\times3\times3=81$(种)报名方法.

(2) 设3项体育比赛分别为A,B,C.第1步考虑A,可以选甲、乙、丙、丁中1个,有4个选择.同理,B,C也分别有4个选择.所以共有$4\times4\times4=64$(种)报名方法.

注意 第(1)题每人必须且只能报一个项目,所以依次考虑每个人的选择.若从各个项目报名的结果看,4个人虽都参加比赛,但可能几个人同时报一个项目,还可能出现某个项目无人报名的情况,每个项目中参加的人数不确定,所以不能从项目入手.

第(2)题的条件与第(1)题的条件正好相反,每个项目必须报且只能报1人,所以依次考虑每个项目的选择.若考虑每个人的选择,就可能出现1个人同时报多项,也可能不报名,所以不能从每个人的选择入手.

例8 若$f:M\to N$是从数集$M=\{1,2,3,4\}$到集合$N=\{0,1,2\}$的函数.求:

(1) 符合条件的对应关系f共有多少种?

(2) 若要使函数$y=f(x)$,$x\in M$的值域是$\{0,1\}$,则不同的对应关系f有多少种?

解 (1) 分4步:第1步,确定$f(1)$,可以是0,1,2中任何一个,有3种情况;第2步,确定$f(2)$,也有"0,1,2"3种情况;同理,确定$f(3)$和$f(4)$,各有"0,1,2"3种情况.所以共有$3\times3\times3\times3=81$(种)不同的对应关系.

(2) 由于值域为$\{0,1\}$,所以$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$,$f(4)$各有2个选择,但要排除$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$和$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$这2种情况.所以共有$2\times2\times2\times2-2=14$(种)不同的对应关系.

注意 一个函数的确定,需要确定它的定义域和对应关系f,值域是由定义域和对应关系确定的.函数$f:M\to N$的对应关系f,需满足:①M中的每个数在N中都有数与之对应,即存在$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$,$f(4)\in\mathbf{N}$;②$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$,$f(4)$唯一.但对于数集N中的"0,1,2",数集M中不一定都有自变量与之对应.所以问题的切入口应是依次确定$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$,$f(4)$这4个值.

例9 3张卡片的正、反面各写有1与2,3与4,5与6.将3张卡片排放在一起,可组成多少个不同的三位数?

解 组成一个三位数分6步:第1步,安排百位数的卡片,有3个选择;第2步,安排十位数的卡片,有2个选择;第3步,安排个位数的卡片,只有1个选择;第4,5,6步,分别安排百位数、十位数、个位数上的数字(正、反面),各有2个选择.所以共有$3\times2\times1\times2^3=48$(个)不同的三位数.

注意 "用3张卡片的6个面排出一个三位数"与"用1~6这6个数字组成一个三位数"不同,即如果百位数排1,那么"1"的反面"2"就不可能出现在十位数字、个位数字的位置上.所以要先确定卡片位置,然后确定各个位置上卡片的正、反面.

训练

A 组

26. (1) $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$的展开式中共有多少个不同的项?

(2) $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3)$的展开式中共有多少个不同的项?

27. 一个小组有5个人.现要为这5个人排班,要求每个人必须在早、中、晚3班中选择一个且只能选一个.问共有多少种不同的排法?

28. 一个班级共 50 个人，现从中选 3 个人分别担任数学、物理、化学 3 个课代表，有多少种不同的选法？

29. 一个班级某天上午的 4 节课要安排语文、数学、英语和化学，有多少种不同的排课方式？

B　组

30. $(a+b+c)^n$ 展开后，在未将同类项合并起来前，共有多少项？

31. (1) 将甲、乙、丙 3 名工人安排在一天分别值早班、中班、夜班，有多少种不同的排法？
(2) 从甲、乙、丙 3 名工人中选出 2 名分别上白班和晚班，有多少种不同的选法？
(3) 甲、乙、丙 3 人自由选择白班或夜班，每人必须且只能值一次班，有多少种不同的排法？
(4) 把 3 封信投入 4 个信箱，每封信必须投入 1 个信箱，有多少种不同的投法？

32. 从 1～20 这 20 个数字中任取 2 个不同的数，使它们的和为奇数，有多少种不同的选法？

33. 若 f 是从数集 $M=\{a,b,c\}$ 到数集 $N=\{0,1,-1\}$ 的函数对应关系，则满足 $f(a)+f(b)=f(c)$ 的函数有多少个？

34. 从 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中任取 3 个不同的数作为抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的系数，若抛物线过原点，且顶点在第一象限，则这样的抛物线共有多少条？

35. 5 名同学共同争夺 4 个比赛项目的冠军，如果每个项目的冠军没有并列，求 4 个项目冠军的结果有多少种？

36. 用 1,2,3,4 中 3 个不同的数字可以组成多少个能被 3 整除的三位数？

37. 同室 4 人各写一张贺卡，相互赠送. 每人都得到一张别人写的贺卡，有多少种不同的送法？

1.2　排列与组合

1.2.1　排列

第 1 课时　排列(1)

例说

例 1　有王、李、张、赵4人，从中每次选 2 人，排成一排拍照，可有多少种不同的排法？对此问题请回答：

(1) 所给的问题是从多少不同元素中取多少个元素的排列？

(2) 用画树形图的方法，并运用分步计数原理，求出所有排列的个数；

(3) 写出所有的排列.

解　(1) 是从 4 个不同元素中取 2 个元素的排列.

(2)

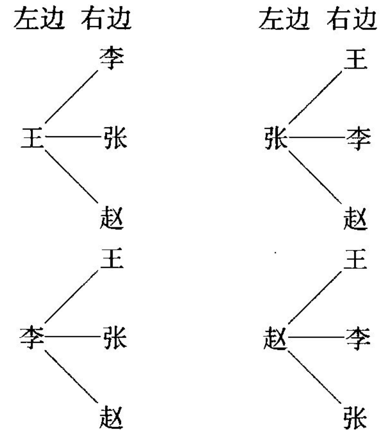


图 1-2

如图 1-2，根据分步乘法计数原理，所有排列的个数是

$$A_4^2=4\times3=12.$$

(3) 由图 1－2，得所有排列为：

王李，王张，王赵，李王，李张，李赵，张王，张李，张赵，赵王，赵李，赵张.

注意 分步乘法计数原理是求排列数的基本依据．从本例还可以看出，画树形图能把完成排列的各个步骤及每个步骤的方法数直观化，帮助我们求排列数．

例 2 说明下列问题哪些是求从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列问题，哪些不是，然后求出各题的结果.

(1) 从 2，3，4，5，6 这 5 个数字中取 2 个不同的数字作为点的坐标，可表示多少个不同的点？

(2) 从 5 名学生中选 2 名去打扫卫生，有多少种不同的选法？

(3) 用 0，1，2，3，4 中的数字组成一个两位数，可以组成多少个两位数？

解 (1) 因为用 2 个数作为点的坐标，如果顺序不同，那么对应直角坐标系中的点就不同．所以本题是求从 5 个不同元素中取出 2 个元素的排列问题．从 2，3，4，5，6 这 5 个数字中取 2 个不同的数字作为点的坐标，可以分 2 步：第 1 步，从 2，3，4，5，6 中取 1 个数字作横坐标，有 5 种不同的取法；第 2 步，从剩下的 4 个数字中取 1 个数字作纵坐标，有 4 种不同的取法．根据分步计数原理，共有 $A_5^2=5\times4=20$(种)不同的方法，即可表示 20 个不同的点.

(2) 选 2 名学生去打扫卫生，不管先选谁，都是同一结果，所以本题不是求排列数的问题．但可以先求从 5 个不同元素中取出 2 个元素的排列数 $5\times4=20$，然后求得本题的结果．先选甲，后选乙，即组成一个排列：甲乙．先选乙，后选甲，即组成另一个排列：乙甲．但这两个排列对本题来说都是相同的选法，所以本题的选法种数为 $5\times4\div2=10$.

(3) 从 0，1，2，3，4 这些数字中，取 2 个数字分别作 1 个两位数的个位数和十位数，这 2 个数字可以相同，如 11，22 等，所以本题不是求从 5 个不同元素中取 2 个元素的排列问题．作一个两位数可以分 2 步：第 1 步，从 0，1，2，3，4 中取 1 个数字作个位上的数，有 5 种方法；第 2 步，从 1，2，3，4 中取 1 个数字作十位上的数，有 4 种方法．根据分步乘法计数原理，可以组成的两位数的个数是 $5\times4=20$.

注意 判断排列问题的主要标准是：

(1) 所给的 n 个元素是不是互不相同，包括取出的 m 个元素．如本例的第(3)题取出的 2 个数可以相同，所以不是从 n 个不同元素中取 m 个的排列问题．但因为所取 2 个数互异时，就与排列顺序有关，所以也可以把它看作可重复排列问题.

(2) 取出的 m 个元素是不是与顺序有关．如本例的第(2)题选出的 2 个人与顺序无关，所以也不是排列问题．这类问题是组合问题，下一节我们就会学到.

例3 (1) 某年全国足球甲级联赛共有 14 个队参加，每队都要与其余各队在主、客场分别比赛 1 次，共进行了多少场比赛？

(2) 某一段铁路上有 14 个车站，则需要准备多少种普通车票？

(3) 从 1，2，3，4，5 这 5 个数字中选出 3 个数，可组成多少个三位数？

解 (1) 把 14 个队看成 14 个不同的元素，一场比赛中的两个队按前后顺序排成一列，排在前面的队为主场比赛．若交换顺序表示转为客场，则一场比赛对应从 14 个不同元素中选出 2 个元素的一个排列．所以共有 $A_{14}^2=14\times13=182$(场)比赛.

(2) 将 14 个车站看成 14 个不同的元素，考虑起点站与终点站顺序不同对应不同的车票，所以一张车票对应从这 14 个元素中任选 2 个元素的一个排列，共有 $A_{14}^2=182$(种)普通车票.

(3) 一个三位数对应从 1，2，3，4，5 这 5 个元素中任选 3 个的一个排列，所以共有 $A_5^3=5\times4\times3=60$(个)三位数.

注意 在计数问题中运用排列数时，要学会把具体问题转化为排列模式，如第(1)题和第(2)题中两个不同的问题(比赛场次、车票种数)可以转化为同一个模式：从 14 个不同的元素中任取 2 个元素的排列数.

训练

A 组

1. 从 4 件不同的奖品中选取 3 件，奖给 3 名优秀学生．这是否是一个排列问题？这里的元素指的是什么？排列数怎样用符号表示？排列数是多少？

2. 从 a，b，c，d 4 个字母中任取 2 个字母排成一列，写出所有的排列，并求出排列数.

3. 从 0，1，2，－1 中任选 2 个不同的数作为点的坐标，可以得到多少个点的坐标？写出这些点的坐标.

4. 计算：

(1) A_{10}^1； (2) A_5^2； (3) A_5^3；

(4) A_5^5； (5) $7!$.

5. 用排列数符号表示下列连乘积：
(1) $10\times9\times8\times7$；
(2) $8\times7\times6\times5\times4\times3$；
(3) $6\times5\times4\times3\times2$；
(4) $(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$；
(5) $(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)(n-m)$ $(m<n-1)$.

6. 有10个节目的一场文娱演出，可以排出多少个演出次序不同的节目单？

B 组

7. 说明下列问题哪些是从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列问题，哪些不是，然后求出各题的结果.
(1) 把3辆不同的轿车停到有10个车位的停车场中，有多少种不同的停法？
(2) 有10种不同的生活用品各 n $(n\geqslant3)$ 件，从中取出3件发给3个贫困的学生，每人1件，有多少种不同的发法？
(3) 从2,3,5,7四个数中任取3个不同的数相乘，可以得到多少个不同的积？

8. 从1,2,3,4这4个数字中的任取3个数.
(1) 可组成多少个没有重复数字的三位数？
(2) 可组成多少个可以重复数字的三位数？

9. 有3人去借5本不同的书，每人借1本，有多少种不同的借法？

10. 有5人去借3本不同的书，每人至多借1本，并全部借出，有多少种不同的借法？

11. 会议室里有8个座位，6名与会者有多少种不同的就座方法？

12. 有 A,B,C,D 4道题和 e,f,g,h 4个答案，分别排成两行. 现把题与答案之间一对一地连线，共有多少种不同的连法？

第2课时 排列(2)

例说

例4 计算：
(1) $A_5^2+A_5^3$；
(2) $A_{n+1}^{n+1}-n!$；
(3) $1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+7\times7!$；
(4) $A_{100}^{98}-A_{99}^{97}$.

解 (1) $A_5^2+A_5^3=5\times4+5\times4\times3=80$.
或用计算器可得
5 SHIFT nPr 2 + 5 SHIFT nPr 3=80.
(2) $A_{n+1}^{n+1}-n!=(n+1)!-n!=(n+1)n!-n!$
$=n!(n+1-1)=n\cdot n!$.
(3) $1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+7\times7!$
$=(2-1)\times1!+(3-1)\times2!+\cdots+(8-1)\times7!$
$=2!-1!+3!-2!+\cdots+8!-7!$
$=8!-1!=40\ 319$.
(4) $A_{100}^{98}-A_{99}^{97}$
$=\dfrac{100!}{(100-98)!}-\dfrac{99!}{(99-97)!}$
$=\dfrac{99!}{2!}(100-1)=\dfrac{99}{2}\times99!$.

注意 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 是求排列数最基本的公式. 当 n,m 值不大时，可直接用此公式求 A_n^m 的值，此时无需考虑最后一个因式是多少，只需记住第一个因式是 n，一共有 m 个因式，而且每一个因式都依次比前一个因式少1. 当 n,m 的值比较大时，求 A_n^m 的值可运用公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ 求解，结果允许保留阶乘的形式.

例5 用3张分别写有数字1,2,3的卡片可以排出多少个不同的正整数？

解 用分别写有1,2,3的3张卡片排出的正整数，有3类不同的方法：第1类，从3张卡片中任取1张，对应于从3个不同元素中任取1个元素的一个排列，其排列

数即是排出的正整数的个数为A_3^1;第2类,从3张卡片中任取2张,并排放,对应于从3个不同元素中任取2个元素的一个排列,其排列数即是排出的正整数的个数为A_3^2;第3类,取所有3张卡片,并排放,对应于3个不同元素的一个全排列,其排列数即为排出的正整数的个数为A_3^3.根据分类加法计数原理,所求的正整数的个数是

$$A_3^1+A_3^2+A_3^3=3+3\times2+3\times2\times1=15.$$

注意 本例先按类别,把问题分解成3个简单排列问题,然后用分类加法计数原理算出结果.另外本例与"用1,2,3三个数字可以组成多少个正整数"是不同的两个问题,后者数字可以重复,所以不是从n个不同元素中取m个元素的排列问题,但可以直接依据分步乘法计数原理和分类加法计数原理算出结果为$3+3^2+3^3=39$(个).

例6 从10人中任选3人,排成一排拍照.若选到李明时,李明不能排在中间这个位置,问有多少种不同的排法?

解法1 如图1-3,一排3个位置中的中间1个位置,因李明不能排,所以有A_9^1种排法.在中间1个位置排定后,两端的2个位置有A_9^2种排法.根据分步乘法计数原理,所求的排法数为

$$A_9^1\cdot A_9^2=9\times9\times8=648.$$

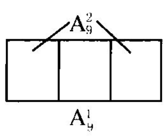


图1-3

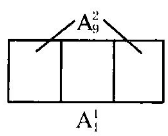


图1-4

解法2 先考虑问题的反面,即若选到李明时,李明必须排在中间的排法数为$A_1^1\cdot A_9^2=A_9^2$,如图1-4.没有任何附加限制条件的排法总数,减去李明排在中间的排法数,便是所求的李明不能排在中间的排法数,即$A_{10}^3-A_9^2=10\times9\times8-9\times8=648$.

注意 解法1根据中间这个位置不能排李明的要求,先安排中间位置,然后安排余下2个位置,原因是:①中间位置的特殊要求,使这3个位置不能看成常见3个元素的排列模式;②只有优先安排中间位置,才能避免分类讨论.这种"有特殊要求的位置(元素)优先安排"的方法在含附加条件的排列问题中应用十分广泛.解法2运用集合的思想,由$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(U)-\mathrm{card}(\complement_U A)$,通过排除不符合条件的情况数求出所求的情况数,这种方法称为排除法.当解决正面情况比较复杂而反面比较简单时,常利用排除法.

训练

A 组

13. 计算:

(1) $A_6^5+A_6^1$;　　(2) $2A_4^2-A_4^4$;

(3) $\dfrac{A_{10}^{10}}{A_3^3}-A_{10}^7$;　　(4) $\dfrac{9!}{7!}-2!$.

14. 计算:

(1) $3!\times A_7^4$;

(2) $(n-m)!\times A_n^m$;

(3) $n!\div A_n^m$;

(4) $A_{2n}^n-\dfrac{(2n-1)!}{n!}$.

15. 求证:$A_{3n}^{2n}=A_{2n}^n\cdot A_{3n}^n$.

16. 10人排成前后两排横队,每排5人,共有(　　).

(A) 10! 种不同排法

(B) $A_5^5\cdot A_5^5$种不同排法

(C) $2\times(5!)^2$种不同排法

(D) $2A_{10}^5\cdot A_5^5$种不同排法

17. 从8人中选5人排成一排拍照,每次拍照时李明或王涛2人中要有1人排在中间,有多少种不同的排法?

18. 从8人中选5人排成一排拍照,若选到李明或王涛时,他们两人都不能排在中间的位置,有多少种不同的排法?

B　组

19. 连乘积 $6\times8\times10\times12\times14\times16$ 可表示成(　　).

(A) A_{16}^{6}　　(B) $A_{16}^{6}-A_{5}^{5}$

(C) $2^{6}\times A_{8}^{6}$　　(D) $2^{5}\times A_{8}^{6}$

20. 已知 $2<\frac{A_{n+1}^{n+1}}{A_{n-1}^{n-1}}\leqslant42$,求 A_{n}^{n-2} 的值.

21. 甲、乙、丙、丁、戊 5 人排成一排拍照.

(1) 甲必须排在中间,有多少种不同的排法?

(2) 丁不能排在中间,有多少种不同的排法?

(3) 丙、丁必须排在两端,有多少种不同的排法?

22. 用 0,1,2,3,4 这 5 个数能组成多少个各位数字都不相同的五位数?其中奇数有多少个?

23. 用 0,1,2,3,4,6 这 6 个数中不同的两个作为一个分数的分子和分母,能组成值不相等的分数有多少个?

24. 5 个人排成一排,其中甲、乙两人都不能排在首末两个位置的排法有多少种?

第 3 课时　排列(3)

例说

例 7　甲、乙、丙、丁排成一排拍照.

(1) 如果甲、乙两人必须排在中间,那么有多少种不同的排法?

(2) 如果甲不能排在首、末两端,那么有多少种不同的排法?

(3) 如果甲、乙两人必须相邻,那么有多少种不同的排法?

(4) 如果甲、乙两人不相邻,那么有多少种不同的排法?

解　(1) 可以分 2 步完成:第 1 步,排甲、乙两人,有 A_{2}^{2}种排法;第 2 步,排丙、丁两人,有 A_{2}^{2}种排法. 根据分步乘法计数原理,所求的排法数为 $A_{2}^{2}\cdot A_{2}^{2}=2\times2=4$.

(2) 可以将排法分 2 类:第 1 类,甲排左起第 2 位,有 A_{3}^{3}种排法;第 2 类,甲排左起第 3 位,有 A_{3}^{3} 种排法. 根据分类加法计数原理,所求方法数为 $A_{3}^{3}+A_{3}^{3}=2A_{3}^{3}=2\times3\times2=12$.

(3) 由于甲、乙两人必须相邻,不妨把它们看成 1 个元素,先作 3 个元素的全排列,然后甲、乙两人交换位置. 根据分步乘法计数原理,所求的排法数为 $A_{2}^{2}\cdot A_{3}^{3}=2\times3\times2=12$.

(4) 甲、乙两人不相邻的排列数可以从总的排列数中减去甲、乙相邻的排列数,即 $A_{4}^{4}-A_{2}^{2}\cdot A_{3}^{3}=12$(种).

或采用插入的方法,先将甲、乙以外的丙、丁两个人排好,有 A_{2}^{2}种排法,然后将甲、乙两人插入丙、丁的 3 个间隔中去,有 A_{3}^{2}种插法,则有 $A_{2}^{2}\cdot A_{3}^{2}=12$(种)排法.

注意　对有条件限制的排列可以按分步或分类将它分解成若干个简单排列,然后运用分步乘法计数原理或分类加法计数原理算出结果. 若条件中要求若干元素彼此相邻,可以先把相邻的元素看作 1 个元素,求出相应的排列数,然后把彼此相邻的元素作全排列,求出相应的排列数,最后根据分步乘法计数原理算出结果. 对于要求若干元素彼此不相邻的问题,除了 2 个元素时用排除法比较方便外,3 个或 3 个以上的元素不相邻问题常用插入法,即先安排其他可以相邻的元素的排列,然后将不能相邻的元素插入已经排好的元素的各个间隔中去. 如 7 个元素排成一排,求其中 a,b,c 三个元素不能相邻的排列个数. 其解法为:先排其余 4 个元素,有 A_{4}^{4}种排法,然后将 a,b,c 三个元素插入 4 个元素的 5 个间隔中去,即 A_{5}^{3},则有 $A_{4}^{4}\cdot A_{5}^{3}=1\ 440$(种)排法. 若用排除法,从总数 A_{7}^{7} 中减去 3 个元素相邻的种数 $A_{3}^{3}\cdot A_{5}^{5}$是不够的,还要排除 3 个元素中 2 个元素相邻与另 1 个元素不相邻的排列数.

例 8　用1,2,3,4,5,6,7 这 7 个数字组成没有重复数字的四位数.

(1) 如果组成的四位数是偶数,那么这样的四位数有多少个?

(2) 如果组成的四位数大于6 500,那么这样的四位数有多少个?

解　(1) 第 1 步,排个位上的数,因为组成的四位数是偶数,个位数字只能从 2,4,6 中取,所以有 A_{3}^{1} 种排法;第 2 步,排千、百、十 3 个数位上的数,有 A_{6}^{3}种排法,如图1-5. 根据分步乘法计数原理,适合条件的四位数个数是

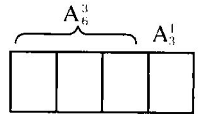


图 1-5

$$A_{3}^{1}\cdot A_{6}^{3}=3\times6\times5\times4=360.$$

(2) 因为组成的四位数要大于 6 500,所以千位上的数字只能取 7 或 6. 排法可以分 2 类:第 1 类,千位上排 7,有 A_{6}^{3}种不同的排法,如图 1-6;第 2 类,千位上排 6,则百位上可排 7 或 5,十位和个位可从余下的数字中任取 2 个来排,共有 $A_{2}^{1}\cdot A_{5}^{2}$种不同的排法,如图 1-7. 根据分类加