顶尖系列

自主学习先锋

高中课外训练步步高

顶尖数学

必修5

人教A版

福建人民出版社

顶尖系列

自主学习先锋

高中课外训练步步高

顶尖数学

必修5

人教A版

福建人民出版社

主　　编

张鹏程（福建师范大学数学与计算机科学学院中学数学教学研究室主任）

编写人员（按姓氏笔画排序）

方秦金　叶文榕　叶青柏　汤锦德　李新岳　陆集宁　陈　言　陈　腾
陈中峰　陈天雄　陈蓓璞　卓道章　林　风　林　婷　林元武　林嘉慧
姚承佳　柯跃海　赵祥枝　倪政翔　黄　雄　黎　强

顶尖数学（必修 5）（人教 A 版）
DINGJIAN SHUXUE

出　　版：福建人民出版社
地　　址：福州市东水路 76 号　　**邮政编码**：350001
电　　话：0591-87604366（发行部）　87521386（编辑室）
电子邮件：211@fjpph. com
网　　址：http://www. fjpph. com
发　　行：福建省新华书店
印　　刷：人民日报社福州印务中心
地　　址：福州市鼓屏路 33 号　　**邮政编码**：350001
开　　本：787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张：8. 75
字　　数：218 千字
版　　次：2007 年 1 月第 1 版　　2007 年 12 月第 3 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-211-05480-0
定　　价：12. 90 元

编写说明

“高中课外训练步步高”根据课程标准，配合各版本教材进行编写。丛书以课为训练单位，以单元为测试单位建构编写体系，符合教学规律，体现课改精神。丛书不仅关注学生夯实基础知识、基本技能，还关注学生学习的自主性、探究性、合作性；不仅关注培养学生学会学习、学会反思、学会自我激励，还关注培养学生学习过程中情感、态度和价值观的形成。

为了使本丛书在理念上与最新教改理念、精神相吻合，我们在本套丛书的编写过程中，坚持“三参与”原则，即颇有造诣的课程研究专家参与，深谙当前基础教育课程改革的教研员参与和具有丰富教学实践经验的一线特、高级教师参与，从而使本丛书在质量上得到充分保证。

“高中课外训练步步高”按章（或单元）进行编写，每一章（或单元）一般设：“学习目标”、“要点透析”、“方法指津”、“自我评估”、“探究应用”、“拓展视野”、“归纳整合”、“单元评估”等栏目。

“学习目标”是根据各章（或单元）应达到的目标提出具体要求。“要点透析”是以课程标准为基准，以相应版本的教材为落脚点，较详细地分析本章（或单元）内容的重点、难点。“方法指津”通过对精选的经典题目的解析和点拨，拓展学生的思路，提升发散思维能力，掌握科学的学习方法。“自我评估”在题目设计上，特别注重吸收全国各地出现的最新题型，同时注重知识的现代化，以激活学生已有的知识、经验和方法。题目既注重基础性，又强调自主性、参与性、实践性、合作性。“探究应用”特别注重吸收密切联系生产、生活实际的有趣题目，加强探究性习题的训练。“拓展视野”对本章（或单元）知识进行拓展，通过对一些典型的探究型、开放型的题目进行解析和点拨，使学生对章（或单元）内、学科内、学科间知识结构的关系得以把握和拓展。“归纳整合”以树形图、方框图或表格等形式对本章（或单元）知识进行梳理、归纳、整合，使学生对整章（或单元）知识间的逻辑关系有个清楚的认识。经过系统的训练后，通过“单元评估”与“模块评估”对所学内容进行评价与总结。由于不同学科及不同版本的教材各有特点，因此，上述栏目及其写法允许根据实际需要适当调整，灵活掌握。

“高中课外训练步步高”实现了引导学生从预习到课外阅读全程自主学习的编写理念。我们在栏目设置上创设了科学的整合模式，将“知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观”三维目标分层次地融入书中，激发学生的自主性，使学生的自主学习效果达到最优化，促进学生的全面发展。

本丛书在编写过程中引用了一些作者的作品，在此，对这些作者表示感谢，对一部分未署名的作品的作者表示歉意，并请与我们联系。由于编写时间仓促，书中难免存在不足之处，恳望读者不吝赐教，以便我们今后不断努力改进。

编 者

目录 CONTENTS

第一章 解三角形 /1

1.1 正弦定理和余弦定理/1

1.1.1 正弦定理/2

1.1.2 余弦定理/8

1.2 应用举例/15

单元评估/36

第二章 数列 /39

2.1 数列的概念与简单表示法/39

2.2 等差数列/44

2.3 等差数列的前 n 项和/49

2.4 等比数列/54

2.5 等比数列的前 n 项和/60

单元评估/69

第三章 不等式 /72

3.1 不等关系与不等式/72

3.2 一元二次不等式及其解法/78

3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题/88

3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域/90

3.3.2 简单的线性规划问题/97

3.4 基本不等式：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$/109

单元评估/122

模块评估/126

参考答案/129

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

学习目标

1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索，运用由特殊到一般的思维方法，发现正弦定理，并会用该定理解决两类解三角形问题.

2. 会用向量法证明余弦定理，体会向量在解决三角形的度量问题时的工具作用.

3. 能够运用余弦定理及其推论解三角形，了解余弦定理与勾股定理之间的联系，知道解三角形问题的几种情形及其基本解法.

要点透析

1. 正弦定理的推广及变形

(1) 由正弦定理的推导过程可得以下三角形面积公式：

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

(2) 设 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆的半径，则$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$

有如下边角互化公式：

$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$　（边化角公式），

$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$　（角化边公式），

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c.$

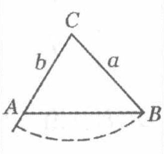
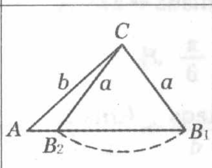
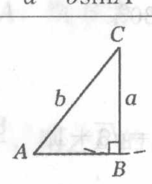
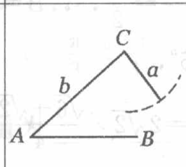
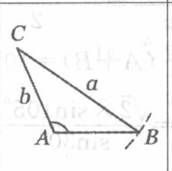
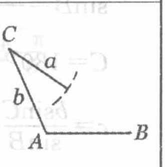
2. 正弦定理的应用

利用正弦定理可解决两类解三角形问题：

(1) 已知两角和任一边，求其他两边和未知角；

(2) 已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而可求其他的边和角.

3. 已知两边和其中一边的对角解三角形，不能唯一确定三角形的形状，解这类三角形将出现无解、一解和两解三种情况（见下表）.

<table>
<tr><td colspan="4">$A<90^\circ$</td><td colspan="2">$A\geqslant 90^\circ$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a\geqslant b$</td><td colspan="3">$a<b$</td><td rowspan="2">$a>b$</td><td rowspan="2">$a\leqslant b$</td></tr>
<tr><td>$a>b\sin A$</td><td>$a=b\sin A$</td><td>$a<b\sin A$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>一解</td><td>两解</td><td>一解</td><td>无解</td><td>一解</td><td>无解</td></tr>
</table>

4. 勾股定理指出了直角三角形中三边平方之间的关系，余弦定理则指出了一般三角形中三边平方之间的关系. 余弦定理是勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例.

5. 余弦定理的推论：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

6. 余弦定理的应用.

利用余弦定理可以解决以下两类解三角形的问题：

(1) 已知三边，求三个角；

(2) 已知两边和它们的夹角，求第三边，进而求出其他角.

1.1.1 正弦定理

课时1 正弦定理和它的基本应用

方法指津

例1 已知在△ABC中，$c=10$，$A=45°$，$C=30°$，求a、b和B（保留两个有效数字）.

解 $\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\times\sin45°}{\sin30°}=10\sqrt{2}\approx14$，

$B=180°-(A+C)=105°$，又$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\times\sin105°}{\sin30°}=20\sin75°=20\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{6}+5\sqrt{2}\approx19$.

评注 本题解答给出了应用正弦定理解三角形的第一类问题（即已知两角和一边，求另两边和一角）的方法步骤.

例2 根据下列条件解三角形：

(1) $a=7$，$b=9$，$A=100°$；　　(2) $a=10$，$b=20$，$A=60°$；

(3) $a=2$，$b=\sqrt{2}$，$A=45°$；　　(4) $a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$A=30°$.

分析 本题主要探究已知两边和其中一边的对角解三角形的解的个数问题，应根据不同的情况加以判断.

解 (1) $\because a=7$，$b=9$，$\therefore a<b$. $\therefore A<B$.

又$A=100°$，∴本题无解.

(2) $\because b\sin A=20\cdot\sin60°=10\sqrt{3}$，$\therefore a<b\sin A$，∴本题无解.

(3) $\because a>b$，$A=45°<90°$，$\therefore B<A<90°$.

∴所求的三角形有一解.

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\sin45°}{2}=\frac{1}{2}$，$\therefore B=30°$.

$C=180°-(A+B)=105°$，

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\times\sin105°}{\sin30°}=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$.

(4) $a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$A=30°<90°$，

又∵$b\sin A=6\cdot\sin30°=3$，∴$b\sin A<a<b$. ∴本题有两解.

由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{6\sin30°}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$B=60°$或$120°$.

当 $B=60°$时，$C=90°$，边 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}\sin90°}{\sin30°}=4\sqrt{3}$.

当 $B=120°$时，$C=30°$，边 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=2\sqrt{3}$.

评注 （1）$\sin105°=\sin75°=\sin(45°+30°)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

另外，$\sin15°=\sin(45°-30°)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

（2）在判断解的个数时，注意运用三角形中大边对大角的性质.

例 3 在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B:\sin C=m:n:l$，且$a+b+c=s$，求$a$.

解 设$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则$a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$，

∴$\sin A:\sin B:\sin C=m:n:l$.

令 $a=mk$，$b=nk$，$c=lk$.

由 $a+b+c=s$，得 $k=\dfrac{s}{m+n+l}$，

∴$a=km=\dfrac{ms}{m+n+l}$.

评注 由于三角形的各边和它所对的角的正弦比相等，故可设比值为一个值k，这样可使解题过程简化. 今后我们还可以知道这一比值为三角形的外接圆直径$2R$.

自我评估

1. 在$\triangle ABC$中，已知$a=8$，$B=60°$，$C=75°$，则b等于（　　）.

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $\dfrac{32}{3}$

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$B=45°$，则A为（　　）.

A. $60°$或$120°$　　B. $60°$

C. $30°$或$150°$　　D. $30°$

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$的对边分别为a、b，且$\angle A=60°$，$a=\sqrt{6}$，$b=4$，那么满足条件的$\triangle ABC$（　　）.

A. 有一个解　　B. 有两个解　　C. 无解　　D. 不能确定

4. 在$\triangle ABC$中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则B为（　　）.

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$

5. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}$，则$\angle B$的值为________.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$，则$a=$__________.

7. 已知三角形的两角分别是 $45°$ 和 $60°$，它们夹边的长是 1，求最小边长.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知三内角的正弦之比为 $4:5:6$，又周长为 $\frac{15}{2}$，求三边长.

9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，求证 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

探究应用

10. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，问 a、b、c 三边的比是多少？为什么？

11. 如图 1-1①，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边 AB 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径（设 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R），则 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，这个结论对钝角三角形（图②）、锐角

三角形（图③）是否也成立呢？你能否结合图形及初中所学知识作出相应的解释？

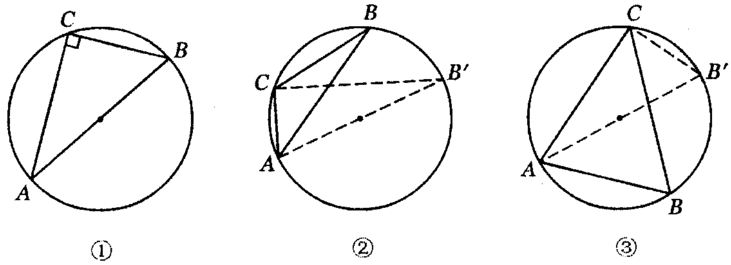


图 1-1

12. 已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之和等于两根之积，且 a、b 为△ABC 的两边，A、B 为两个内角，试判断这个三角形的形状.

课时 2　正弦定理的推广及变形

方法指津

例 1　在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $c=10$，又知 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，求 a、b 和△ABC 的内切圆半径.

分析　本题探究正弦定理及三角函数的恒等变形的综合应用，三角形内切圆半径的求法. 解决本题的关键是将 $\frac{b}{a}$ 换成 $\frac{\sin B}{\sin A}$.

解　由 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$，可得 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$.

变形为 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，$\therefore \sin 2A=\sin 2B$.

又$\because a\neq b$，$\therefore 2A=\pi-2B$. $\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

由$\begin{cases} a^2+b^2=10^2, \\ \frac{b}{a}=\frac{4}{3}, \end{cases}$

解得 $a=6$，$b=8$.

$\therefore$内切圆的半径为 $r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{6+8-10}{2}=2$.

评注 要熟练掌握正弦定理的几种等价变形，本题就是将$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$作为突破口，使问题获解.

例 2 在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$3c=4b$，求 $\sin C$.

分析 易知 $B+C=120°$，可借助正弦定理实施边角转化，再采取消元化归思想建立有关角 C 的三角方程解之.

解 $\because 3c=4b$，$\therefore 3\times 2R\sin C=4\times 2R\sin B$，

即 $3\sin C=4\sin B$.

$\because B=120°-C$，

$\therefore 3\sin C=4\sin(120°-C)=2\sqrt{3}\cos C+2\sin C$.

$\therefore \sin C=2\sqrt{3}\cos C$.

$\because \sin^2 C+\cos^2 C=1$，$\sin^2 C+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin C\right)^2=1$，$\therefore \sin^2 C=\frac{12}{13}$.

$\because \sin C>0$，$\therefore \sin C=\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

评注 解决本题的关键是运用正弦定理进行边角转化，然后利用方程思想求解.

例 3 在$\triangle ABC$中，$\tan A=\frac{2}{5}$，$\tan B=\frac{3}{7}$，且最长边为$\sqrt{58}$，求：

(1) 角 C 的大小；

(2) $\triangle ABC$最短边的长.

分析 由两角和的正切公式 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$与三角形的内角和定理可求得角 C；根据“三角形中大边对大角”可知最短边为 a.

解 (1) $\because \tan A=\frac{2}{5}$，$\tan B=\frac{3}{7}$，$\therefore \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=1$.

又$\because A+B+C=180°$，$\therefore \tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-1$，

$\therefore C=135°$.

(2) 由 (1) 可知 C 为最大角，从而由已知得 $c=\sqrt{58}$，

$\because \tan B>\tan A>0$，$\therefore B>A$，故$\triangle ABC$的最短边为 a.

$\because \tan A=\frac{2}{5}$，$\therefore \cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$. $\therefore \sin A=\tan A\cdot\cos A=\frac{2\sqrt{29}}{29}$.

又 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$由正弦定理得最短边 $a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C}=4$.

自我评估

1. 在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$C=45^\circ$，$b=2$，则此三角形的最小边长为（　　）.

A. 2　　B. $2\sqrt{3}-2$　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $2(\sqrt{2}-1)$

2. 在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$a=\sqrt{13}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$等于（　　）.

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{81}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$　　D. $2\sqrt{7}$

3. 在$\triangle ABC$中，根据下列条件，确定$\triangle ABC$有两解的是（　　）.

A. $a=18$，$b=20$，$A=120^\circ$　　B. $a=60$，$c=48$，$B=60^\circ$

C. $a=3$，$b=6$，$A=30^\circ$　　D. $a=14$，$b=16$，$A=45^\circ$

4. 在$\triangle ABC$中，若$a\cos B=b\cos A$，则$\triangle ABC$为（　　）.

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰或直角三角形　　D. 钝角三角形

5. 在$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{3}$，$\angle A=45^\circ$，$\angle C=75^\circ$，则BC的长为________.

6. 在$\triangle ABC$中，$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)$的值是________.

7. 在$\triangle ABC$中，$b=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$c=1$，求a和A、C.

8. 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

9. 如图1-2，已知$AB\perp BC$，$CD=33$，$\angle ACB=15^\circ$，$\angle BCD=75^\circ$，$\angle BDC=45^\circ$，求AB的长.

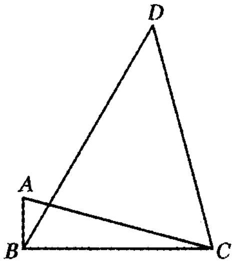


图 1-2

探究应用

10. 在$\triangle ABC$中，已知$a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断$\triangle ABC$的形状.

11. 在$\triangle ABC$中，求证 $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$.

12. 在$\triangle ABC$中，已知$A+C=2B$，$\tan A\cdot\tan C=2+\sqrt{3}$.

(1) 求A、B和C；

(2) 若顶点C的对边c上的高等于$4\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$各边的长.

1.1.2 余弦定理

课时1 余弦定理和它的基本应用

方法指津

例1 在$\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30^\circ$，求a.

分析 已知两边和其中一边的对角，可根据正弦定理求解，也可根据余弦定理解三

角形.

解法一 由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{3}\cdot\sin30^\circ}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because c>b$，$\therefore C>B$.

$\therefore C=60^\circ$或 120°.

①当 $C=60^\circ$时，$A=90^\circ$，$\therefore a=6$.

②当 $C=120^\circ$时，$A=30^\circ$，$\therefore a=3$.

解法二 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\therefore b^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2a\cdot3\sqrt{3}\cdot\cos30^\circ=9$.

$\therefore a^2-9a+18=0$.

$\therefore a=3$ 或 $a=6$.

评注 利用正弦定理，必须注意讨论解的情况，同时结合三角形大边对大角的性质，确定解的个数. 在解三角形问题时，应根据题目中给定的条件，灵活地选择正弦、余弦定理.

例 2 在$\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B:\sin C=(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):\sqrt{10}$，求最大角的度数.

分析 由正弦定理可知，$a:b:c=(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):\sqrt{10}$，根据“大边对大角”，所以 c 为最大边，则角 C 最大. 可设 $a=(\sqrt{3}-1)k$，$b=(\sqrt{3}+1)k$，$c=\sqrt{10}k$ $(k>0)$，则本题可转化为已知三边解三角形问题.

解 $\because\sin A:\sin B:\sin C=(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):\sqrt{10}$，

$\therefore a:b:c=(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):\sqrt{10}$.

设 $a=(\sqrt{3}-1)k$，$b=(\sqrt{3}+1)k$，$c=\sqrt{10}k$ $(k>0)$.

$\therefore c$ 边最长，即角 C 最大，由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore C=120^\circ$.

评注 本题关键在于把条件中的角的关系，转化为三角形边的关系，然后设出三边，利用转化的数学思想，把问题转化为已知三边求三角问题.

例 3 在$\triangle ABC$中，a、b、c 分别表示 A、B、C 所对的边长，若$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，判断$\triangle ABC$的形状.

分析 本题主要探究应用正、余弦定理判定三角形的形状. 题目条件中给出的关系式既有边也有角，需利用正、余弦定理转化为角的关系或边的关系，下面用两种方法分别求解.

解法一 $\because(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，

$\therefore(a^2+b^2)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=(a^2-b^2)(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$.

化简，得 $a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$.

$\because a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$\therefore\sin^2A\cos A\sin B=\sin A\sin^2B\cos B$，

$\therefore\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即 $\sin2A=\sin2B$.

从而 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

解法二 由条件化简得 $a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$.

$\because\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，

将其代入上式，得 $a^2\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\dfrac{b}{2R}=b^2\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\dfrac{a}{2R}$

即 $a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$.

整理得 $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$. $\therefore a=b$ 或 $a^2+b^2-c^2=0$.

故$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

评注 根据已知条件判断三角形的形状，常用如下转化方式：

①$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$；②$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$，$\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{a}{c}$；

③$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

化边为角，走三角变形之路，或化角为边，走代数变形之路.

自我评估

1. 三角形的两边长分别为 5 和 3，它们的夹角的余弦值是$-\dfrac{3}{5}$，则三角形的另一边长为（　　）.

A. 52　　B. $2\sqrt{13}$　　C. 16　　D. 4

2. 若三角形三边之比为 3∶5∶7，那么这个三角形的最大角为（　　）.

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°

3. 在$\triangle ABC$中，若 $a=2b\cos C$，则这个三角形为（　　）.

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 正三角形　　D. 等腰直角三角形

4. 在$\triangle ABC$中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，则 $a\cos C+c\cos A$ 的值为（　　）.

A. b　　B. $\dfrac{b+c}{2}$　　C. $2\cos B$　　D. $2\sin B$

5. 若$\triangle ABC$三边 a、b、c 满足关系式 $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$，则$\angle A=$__________.

6. 在$\triangle ABC$中，若 $A=120°$，$AB=5$，$BC=7$，则$\triangle ABC$的面积 $S=$__________.

7. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，求角 A、B、C 和 $S_{\triangle ABC}$.

8. 在$\triangle ABC$中，已知 $a=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$B=45°$，求 b 和 A.

9. 如图 1-3，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD\perp CD$，$AD=10$，$AB=14$，$\angle BDA=60^\circ$，$\angle BCD=135^\circ$，求 BC 的长.

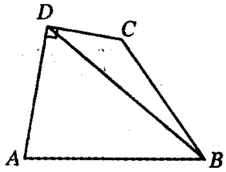


图 1-3

探究应用

10. 已知 A、B、C 是$\triangle ABC$ 的三个内角，且满足$(\sin A+\sin B)^2-\sin^2 C=3\sin A\sin B$，能否求出 $A+B$ 的和？为什么？

11. 若把一个直角三角形的三边都增加同样的长度，则这个新的三角形是什么形状的三角形？为什么？

12. 已知锐角三角形的三边长为 2、3、x，求 x 的取值范围.

课时2 正弦定理和余弦定理的综合应用

方法指津

例1 已知 a、b、c 是△ABC 中角 A、B、C 对边，S 是三角形的面积，若 $a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$S=\sqrt{3}$，求 c 的长度.

分析 由 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 及已知条件可求得角 C，再由余弦定理求 c 边.

解 $\because S=\frac{1}{2}ab\sin C$，即 $\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\times\sin C$，

$\therefore \sin C=\frac{1}{2}$. $\quad\therefore C=30°$ 或 $150°$.

若 $C=30°$，则 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=12+4-2\times 2\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4$，

$\therefore c=2$.

若 $C=150°$，则 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=12+4-2\times 2\sqrt{3}\times 2\times\cos 150°=28$，

$\therefore c=2\sqrt{7}$.

评注 选择正弦定理求角时，一定要注意分类讨论.

例2 在△ABC 中，a、b、c 分别是角 A、B、C 的对边长，已知 $b^2=ac$，且 $a^2-c^2=ac-bc$，求角 A 的大小及 $\frac{b\sin B}{c}$ 的值.

分析 由 $b^2=ac$，且 $a^2-c^2=ac-bc$ 可联系到余弦定理，利用余弦定理可求得角 A.

解 (1) $\because b^2=ac$，且 $a^2-c^2=ac-bc$，

$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$.

在△ABC 中，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle A=60°$.

(2) 在△ABC 中，由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，

$\because b^2=ac$，$\angle A=60°$，

$\therefore \frac{b\sin B}{c}=\frac{b}{c}\cdot\frac{b\sin A}{a}=\frac{b^2\sin 60°}{ac}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例3 如图1-4，在△ABC 中，已知 $BC=15$，$AB:AC=7:8$，$\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，求 BC 边上的高 AD 的长.

分析 由已知设 $AB=7x$，$AC=8x$，用正弦定理可求出角 C. 要求 AD 的长只需求出 x，在△ABC 中已知三边和一个角，根据余弦定理便可求出 x.

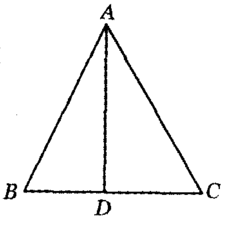


图1-4

解 在△ABC 中，由已知可设 $AB=7x$，$AC=8x$.

由正弦定理得 $\frac{7x}{\sin C}=\frac{8x}{\sin B}$，