

素数研究与应用 参考手册

高红卫 著



科学出版社

www.sciencep.com



0156.2/7

2008

素数研究与应用 参考手册

高红卫 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是世界上第一本素数研究与应用参考手册,基于数据量为 TB 级的素数数据库,提供迄今为止较为系统、较为完整的素数序列统计分析资料。本书所列出的低端素数表和统计分析资料,主要面向基础研究和普及性研究;所列出的高端素数列表和统计分析资料,主要面向加密/解密技术应用研究;尤其是列出的部分连续素因子一阶合数表与特定连续合数完全分解表、部分 RSA 大合数完全素分割表,对于研究目前世界上比较流行的 RSA 加密技术中 $p \times q$ 合数之素因子分解问题,具有系统性的参考价值。

本书适合于相关领域研究人员、工程技术人员、软件工程师、大专院校师生、中小学数学教师、数论研究爱好者、信息加密与解密技术工作者与研究爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

素数研究与应用参考手册 / 高红卫著. —北京:科学出版社,2008
ISBN 978-7-03-021352-5

I. 素… II. 高… III. 素数—研究 IV. 0156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 032474 号

责任编辑:沈 建 / 责任校对:陈玉凤

责任印制:刘士平 / 封面设计:耕者

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 4 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2008 年 4 月第一次印刷 印张:30 1/2

印数:1—3 000 字数:714 000

定价:75.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<明辉>)

前 言

这是一本兼顾研究与应用,关于素数的数据参考手册。并且就笔者所知,这是世界上关于素数研究与应用的第一本数据参考手册。

编著这本手册的动因,可以一直追溯到笔者在清华大学学习期间受到一篇关于数论研究的著名报告文学的影响,尤其是受到曾在清华从事数学教学与研究的钟家庆老师献身数学研究的精神感染。

素数是数字基因,它本身不能被因子分解,但它却是所有合成数的因子。整数是最基本的数字,除 0 和 1 以外,全部的正整数由全部的素数及其合成数构成。人类研究素数已经有几千年的历史,获得了数不尽的研究成果,这些成果广泛地惠及几乎所有科学技术领域,但是笔者没有查到任何专门的关于素数研究成果的数据参考手册。

近些年来,由于信息技术的发展和进一步发展信息技术的迫切需要,关于素数(含合数之素因子分解)的研究异常活跃,在数论及相关领域事实上已经掀起了新一轮世界性的竞争热潮(尤其是在数字加密与解密技术领域),世界各主要国家都在竞相争夺无限数字空间的无限宝藏。自古以来,中国都是数论研究大国,但是近些年我国的数论研究成果多为高深的专业性成果,普及研究的范围和深度与当代数论大国的地位多少有些反差。

正如一国的某项竞技体育运动水平高低很大程度上与这个国家民众普及该项运动的程度呈正相关特性一样,某些基础学科的理论研究水平也与参与研究的人数多寡及平均素质情况有一定的关联度。编著这本手册的目的,一方面是为满足相关研究机构、企业 and 专业人士展开和深化数论及相关领域研究的需要,另一方面也是为了满足广大数论研究爱好者对于比较系统的素数基础数据的渴望与需求,助推我国数论及相关领域研究的均衡发展。

为同时照顾基础研究和应用研究两个方面的需要,又限于篇幅,本手册包括了 $2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 、 $(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 两个区间关于素数、孪生素数、孪生素数族(按升序排列),以及素数间隙(按升序排列)等有关统计数据,包括了范围在 $6 \times 10^5 + 1$ 以内自然数中的全部素数,以及低端区间(3×10^4 个含 ≥ 5 素数)连续一阶合数表、低端区间($3 \times 10^4 + 1$ 以内,含 ≥ 7 素数的)合数一次分解表。最后是 RSA-576、RSA-640、RSA-704、RSA-768、RSA-896、RSA-1024、RSA-1536 以及 RSA-2048 的完全素分割表。

本手册提供的数据,不仅在研究素数分布规律以及自然数的素性判定时经常用到,而且对于研究合数分解方法具有较高的应用价值。特别是给出的几个 RSA 大合数完全素分割表,能为分解 RSA 中的大合数提供有价值的参考——因为加法表达式与乘法表达式之间存在确定的转换关系。

本手册的数据来源于笔者独立发现的、不同于经典算法的新算法自行生成的数据库。由于数据库的数据量巨大(TB 数量级),无法一一列印出来,只能部分列举,需要超出本手册范围数据的读者可与笔者联系。

编著这本手册的工作量之巨大,超出笔者初期的想象。由于笔者找到了一些不同于经典理论的(相对快速)分析方法,所以直到近期相关分析计算工作才得以迅速进展。在经历了无数个不眠之夜和紧张忙碌的周末之后,虽然摆在读者面前的只是一本不起眼的小册子,但是笔者为此投入的精力却是巨大的。

令笔者感到非常欣慰的是,毕竟它(凝聚了前人成果和本人心血的手册)出版了,能够与大家分享研究成果,实为一件快事。在此,我要特别感谢科学出版社的支持,使得这本手册能以最快的速度出版发行。当然我还要特别感谢我的妻子和家人,她和他们忍受了因为计算机满负荷运行而产生的日夜不停的噪声,并承担了全部繁琐而细致的家务,且对于不断更新计算机系统的开销和不断攀升的电费支出,以及不能陪同他们享受完整节假日及业余生活,都没有任何抱怨,使笔者能够把业余时间的主要精力和较大份额的家庭收入用于业余研究。对此,笔者十分感激。

由于本手册初次编著,限于笔者的能力,也没有成体系的参考与借鉴资料,并且在将大量原始数据表格化的过程中,笔者虽尽全力避免出现数据转录错误,但是由于数据量巨大,错误和疏漏在所难免,还望读者不吝指正,以便在将来有机会修订这个手册时充实、完善。

笔者邮件地址:gaohw191@sina.com

高红卫

2008年元旦于北京 航天大院

目 录

前言

第 1 篇 编例与查阅方法	1
第 2 篇 部分区间素数统计数据表	3
$2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 区间素数统计表	3
$2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 区间最大素数间隙与最大间隙率统计表	12
$2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 区间素数间隙升序变动表	27
$2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 区间衔接区段素数参数统计表	107
$2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 区间孪生素数参数统计表	130
$2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 区间孪生素数升序变动表	145
$2 \sim (1.26 \times 10^{12} + 1)$ 区间衔接区段孪生素数统计表	163
$(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6 \times 10^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 区间素数统计表	171
$(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6 \times 10^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 区间最大素数间隙与最大间隙率统计表	172
$(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6 \times 10^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 区间素数间隙升序变动表	174
$(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6 \times 10^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 区间衔接区段素数参数统计表	180
$(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6 \times 10^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 区间孪生素数参数统计表	183
$(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6 \times 10^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 区间孪生素数升序变动表	185
$(6 \times 10^{100} + 2) \sim (6 \times 10^{100} + 1.08 \times 10^{11} + 1)$ 区间衔接区段孪生素数统计表	187
第 3 篇 低端区间分析数据表	188
自然数 $6 \times 10^5 + 1$ 以内素数表	188
3×10^4 个含 ≥ 5 素数的连续一阶合数表	302
$3 \times 10^4 + 1$ 以内含 7 及以上素因子合数完全分解表	372
第 4 篇 合数的素分割专题	462
RSA-576 素分割 数据	462
RSA-640 素分割 数据	464
RSA-704 素分割 数据	466
RSA-768 素分割 数据	468
RSA-896 素分割 数据	470
RSA-1024 素分割 数据	472
RSA-1536 素分割 数据	473
RSA-2048 素分割 数据	476
附录 1 RSA 加密算法简介	479
附录 2 Prime_Grid 项目简介	480

第 1 篇 编例与查阅方法

1. 素数间隙统计数据的使用

需要提请读者注意的是,本手册中的“素数间隙”与其他资料中的“素数间隙”定义是不同的。前者是指:到素数 p 为止,之前有且仅有连续 n 个合数存在;而后者是指:从起点素数 p 开始,之后有且仅有连续 n 个合数存在。

本手册中的“素数间隙率”与其他资料中的“素数间隙度”定义也是不同的。前者是指间隙值 n 与间隙终点素数 p 之比 n/p ,后者则为 $g(p_n)/\lg p_n$,其中 $g(p_n)=p_{n+1}-p_n-1$, p_n 和 p_{n+1} 分别指第 n 个及第 $n+1$ 个素数, $\lg p_n$ 为在 p_n 附近的素数之间的平均间隙(理论近似值)。

2. 孪生素数族统计数据的使用

孪生素数族的定义是:如果 n 与 $n+1$ 或者 $n+2$ 同为素数,则称 n 及 $n+1$ 或者 $n+2$ 为孪生素数;如果在一组孪生素数之间只存在合数,不存在非孪生素数,称该组孪生素数为孪生素数族。由于孪生素数族内两对孪生素数之间所跨越的合数数量并不一定相同,因此在孪生素数族中,两对孪生素数之间的距离(所跨越的合数个数)可能很大。

3. 统计表的分段数据衔接

为了既保证对原始数据进行统计分析的数据连续性,又适当保证其反映原始数据中蕴含的参数分布特性,本手册采用分段分析统计加衔接区段补充统计的方法对原始数据进行“切块”式分析。

本手册统计表关于素数和孪生素数统计属于无缝衔接(不存在区间内未统计的素数和孪生素数),所以素数和孪生素数的统计数据可以无条件使用。

虽然孪生素数族统计和素数间隙统计不属于无缝衔接(孪生素数族和连续的素数间隙可能跨越不同的切块区间),但是经过理论分析与实际校验,本手册采用的切块方法未实质性损害孪生素数族统计和素数间隙统计数据的科学性——跨越区段的衔接统计数据中没有超过其前后区间最大值的统计参数(即使跨区段连续统计,这些参数也具有不显性),所以素数族统计和素数间隙统计数据在本手册的数据定义下可以安全使用。

为了方便需要详细了解衔接区段数据的读者,本手册专门提供了孪生素数族和素数间隙统计表的区段衔接数据表,需要的读者可直接查阅相关“衔接数据表”。

4. 衔接数据表的查阅方法

衔接区段数据表的数据是不连续的,首先读者需要找到自己感兴趣的衔接区间,然后查阅相关数据,衔接区段统计数据的定义与区间数据统计表的定义规则相同。

5. 素数表的范围和顺序

本手册的素数表包含 $6 \times 10^5 + 1$ 以内自然数中的全部 49098 个素数,按照升序排列。

6. 合数的阶、级定义及合数表查阅方法

两个素数相乘构成一阶合数,一个素数与一个一阶合数相乘构成一个二阶合数,两个

一阶合数相乘构成三阶合数,依次类推。 n 阶合数中,含有 $n+1$ 个素因子(不剔除重复因子)。

合数的分解深度用级来表示。一级表达式指合数的一次分解式,二级表达式指合数的二次分解式,依次类推。

合数的固有阶数与合数的完全分解表达式级数相对应。一阶合数只能进行一次分解,获得一级表达式。高阶合数可以进行低级表达,低阶合数不能进行高级表达。

“阶”代表着合数的固有分解属性,“级”代表着合数的当前分解状态。

本手册提供的低端一阶合数表包括了公共因子 7 及其以上 300 个连续素数与 5 及其以上素因子相乘形成的 100 个一阶合数(共 30000 个,分为 300 组),每组数据的最后一个数字是本组所有合数的公共素因子。为了便于查阅,每个公共因子之后紧跟一个“#”。

查阅时,可以先查找相应的合数,然后在本组数据结尾得到其素因子,也可以直接查找公共素因子,然后分析其对应的合数数组。

本手册还提供了低端区间($3 \times 10^4 + 1$ 以内,含 ≥ 7 素数的)合数完全分解表。就单个表达式而言均为一级分解式,但由于高阶合数所蕴含的低阶合数之逐次分解表达式在表中可完整查询,因此由此表可形成高阶合数的任意级次表达式,直至获得每个合数的唯一完全分解表达式。

查阅方法是,按升序查找所要查的合数,即可查到该合数的一级分解式(若存在多个分解式,则它们相互等价),然后判断一级分解式中的因子是否全为素数(如果在本表中查不到其分解式则为素数,否则为合数),直至分解式因子均为素数(达到该合数分解的最高级)为止,所记录的分解式即该合数的完全分解式。

举例:待查的数为 29939,查表得到其一级分解式为

$$4277 \times 7 = 2303 \times 13 = 47 \times 637 = 611 \times 49 = 329 \times 91 = 29939$$

进一步查表得

$$611 \times 7 = 329 \times 13 = 47 \times 91 = 4277$$

$$329 \times 7 = 47 \times 49 = 2303$$

$$91 \times 7 = 49 \times 13 = 637$$

$$47 \times 13 = 611$$

$$47 \times 7 = 329$$

$$13 \times 7 = 91$$

$$7 \times 7 = 49$$

于是,得到其完全分解式为 $29939 = 47 \times 13 \times 7 \times 7$,因此 29939 是一个 3 阶合数。

7. 合数素分割表的查阅方法

合数的素分割是指把合数表示成若干乘积项求和的表达式,每个乘积项中都至少包含一个素因子。

本手册所给出的 8 个 RSA 合数素分割表,全部由笔者发现的简单算法完成计算。基于加法与乘法之间存在确定的可转换性这一特点,因此实际上可以将素分割表进行重组表达,从而获得合数的素因子分解表达式。

第 2 篇 部分区间素数统计数据表

2 ~ (1. 26 × 10¹² + 1) 区间素数统计表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
2,6000000001	279545369	0. 0465909
6000000002,12000000001	262010482	0. 023819134727272727
12000000002,18000000001	256147548	0. 01600922175
18000000002,24000000001	252482968	0. 012022998476190476
24000000002,30000000001	249819560	0. 009608444615384616
30000000002,36000000001	247750885	0. 007991964032258065
36000000002,42000000001	246041891	0. 006834496972222222
42000000002,48000000001	244605773	0. 005965994463414634
48000000002,54000000001	243365801	0. 005290560891304348
54000000002,60000000001	242267878	0. 004750350549019608
60000000002,66000000001	241289601	0. 004308742875
66000000002,72000000001	240413090	0. 003941198196721312
72000000002,78000000001	239612672	0. 00363049503030303
78000000002,84000000001	238879349	0. 0033644978732394366
84000000002,90000000001	238196124	0. 0031341595263157896
90000000002,96000000001	237574568	0. 0029330193580246913
96000000002,102000000001	236986079	0. 0027556520813953487
102000000002,108000000001	236421638	0. 002598039978021978
108000000002,114000000001	235920307	0. 0024575031979166668
114000000002,120000000001	235427816	0. 0023309684752475246

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
120000000002,126000000001	234972000	0.0022167169811320754
126000000002,132000000001	234533746	0.0021129166306306305
132000000002,138000000001	234109340	0.0020181839655172415
138000000002,144000000001	233720337	0.0019315730330578512
144000000002,150000000001	233343134	0.001851929634920635
150000000002,156000000001	232972029	0.0017784124351145037
156000000002,162000000001	232629250	0.0017105091911764705
162000000002,168000000001	232290410	0.0016474497163120568
168000000002,174000000001	231977608	0.001588877260273973
174000000002,180000000001	231670907	0.001534244417218543
180000000002,186000000001	231360107	0.001483077608974359
186000000002,192000000001	231080982	0.0014352856024844722
192000000002,198000000001	230805310	0.0013903934337349399
198000000002,204000000001	230533580	0.0013481495906432748
204000000002,210000000001	230276452	0.0013083889318181818
210000000002,216000000001	230022914	0.0012708448287292817
216000000002,222000000001	229776112	0.0012353554408602151
222000000002,228000000001	229534444	0.0012017510157068063
228000000002,234000000001	229304686	0.0011699218673469388
234000000002,240000000001	229096737	0.00113978476119403
240000000002,246000000001	228859711	0.0011109694708737864
246000000002,252000000001	228645604	0.0010836284549763033
252000000002,258000000001	228445991	0.0010576203287037038
258000000002,264000000001	228244734	0.0010327816018099547
264000000002,270000000001	228042626	0.001009038168141593
270000000002,276000000001	227852742	0.0009863755064935065

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
276000000002,282000000001	227664490	0.0009646800423728813
282000000002,288000000001	227483142	0.0009439134522821577
288000000002,294000000001	227301042	0.0009239879756097561
294000000002,300000000001	227129569	0.0009048986812749004
300000000002,306000000001	226951359	0.00088652874609375
306000000002,312000000001	226789184	0.0008689240766283525
312000000002,318000000001	226623807	0.0008519691992481203
318000000002,324000000001	226465439	0.0008356658265682656
324000000002,330000000001	226307303	0.0008199539963768116
330000000002,336000000001	226144651	0.0008047852348754449
336000000002,342000000001	225992184	0.0007901824615384616
342000000002,348000000001	225844485	0.0007760978865979382
348000000002,354000000001	225698583	0.0007624952128378378
354000000002,360000000001	225556070	0.0007493557142857143
360000000002,366000000001	225404412	0.0007366157254901961
366000000002,372000000001	225283758	0.0007243850739549839
372000000002,378000000001	225134698	0.0007124515759493671
378000000002,384000000001	225002052	0.0007009409719626168
384000000002,390000000001	224873753	0.0006897967883435583
390000000002,396000000001	224744505	0.0006789864199395771
396000000002,402000000001	224605818	0.0006684696964285715
402000000002,408000000001	224497175	0.0006583494868035191
408000000002,414000000001	224369375	0.0006484664017341041
414000000002,420000000001	224244079	0.00063887201994302
420000000002,426000000001	224126297	0.00062956825
426000000002,432000000001	224017049	0.0006205458421052631

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
432000000002,438000000001	223897012	0.0006117404699453551
438000000002,444000000001	223769627	0.0006031526334231806
444000000002,450000000001	223666516	0.000594857755319149
450000000002,456000000001	223553038	0.0005867533805774278
456000000002,462000000001	223445716	0.0005788749119170984
462000000002,468000000001	223335417	0.0005711903248081841
468000000002,474000000001	223232195	0.0005637176641414141
474000000002,480000000001	223113169	0.0005563919426433916
480000000002,486000000001	223024251	0.000549320815270936
486000000002,492000000001	222923608	0.000542393206812652
492000000002,498000000001	222811704	0.0005356050576923077
498000000002,504000000001	222717697	0.0005290206579572446
504000000002,510000000001	222625146	0.0005225942394366198
510000000002,516000000001	222519703	0.0005162870139211137
516000000002,522000000001	222427501	0.0005101548188073395
522000000002,528000000001	222337281	0.0005041661700680272
528000000002,534000000001	222242624	0.0004983018475336323
534000000002,540000000001	222147085	0.000492565598669623
540000000002,546000000001	222053481	0.00048695938815789474
546000000002,552000000001	221961697	0.00048147873535791754
552000000002,558000000001	221875169	0.00047612697210300427
558000000002,564000000001	221788599	0.00047088874522292995
564000000002,570000000001	221696298	0.000465748525210084
570000000002,576000000001	221614901	0.0004607378399168399
576000000002,582000000001	221532515	0.00045582822016460906
582000000002,588000000001	221429300	0.0004509761710794297

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
588000000002,594000000001	221366555	0.0004463035383064516
594000000002,600000000001	221278810	0.00044167427145708584
600000000002,606000000001	221198952	0.0004371520790513834
606000000002,612000000001	221109326	0.00043269926810176126
612000000002,618000000001	221035505	0.0004283633817829457
618000000002,624000000001	220954125	0.00042409620921305183
624000000002,630000000001	220881816	0.0004199274068441065
630000000002,636000000001	220803292	0.00041582540866290016
636000000002,642000000001	220724124	0.00041179873880597013
642000000002,648000000001	220648871	0.0004078537356746765
648000000002,654000000001	220577695	0.0004039884523809524
654000000002,660000000001	220489057	0.0004001616279491833
660000000002,666000000001	220430571	0.0003964578615107914
666000000002,672000000001	220351291	0.00039278304991087346
672000000002,678000000001	220290898	0.00038920653356890457
678000000002,684000000001	220200009	0.0003856392451838879
684000000002,690000000001	220134238	0.00038217749652777775
690000000002,696000000001	220072502	0.0003787822753872633
696000000002,702000000001	219999779	0.00037542624402730373
702000000002,708000000001	219924750	0.0003721230964467005
708000000002,714000000001	219852850	0.0003688806208053691
714000000002,720000000001	219792837	0.0003657118752079867
720000000002,726000000000	219731474	0.0003625931914191419
726000000002,732000000001	219661551	0.0003595115400981997
732000000002,738000000001	219598216	0.0003564906103896104
738000000002,744000000001	219535313	0.0003535190225442834

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
744000000002,750000000001	219467546	0.0003505871341853035
750000000002,756000000001	219398391	0.00034769951030110934
756000000002,762000000001	219338343	0.00034487160849056605
762000000002,768000000001	219277670	0.00034208684867394695
768000000002,774000000001	219209610	0.0003393337616099071
774000000002,780000000001	219149813	0.0003366356574500768
780000000002,786000000001	219074687	0.0003339553155487805
786000000002,792000000001	219026386	0.00033135610590015127
792000000002,798000000001	218968330	0.00032878127627627627
798000000002,804000000001	218897791	0.00032622621609538
804000000002,810000000001	218853247	0.0003237474068047337
810000000002,816000000001	218788765	0.0003212757195301028
816000000002,822000000001	218734846	0.0003188554606413994
822000000002,828000000001	218665586	0.00031644802604920407
828000000002,834000000001	218604926	0.0003140875373563218
834000000002,840000000001	218555350	0.0003117765335235378
840000000002,846000000001	218496064	0.0003094845099150142
846000000002,852000000001	218443941	0.0003072347974683544
852000000002,858000000001	218377419	0.00030499639525139664
858000000002,864000000001	218329459	0.0003028147836338419
864000000002,870000000001	218278537	0.00030065914187327826
870000000002,876000000001	218223296	0.0002985270807113543
876000000002,882000000000	218168831	0.0002964250421195652
882000000002,888000000001	218103272	0.0002943363994601889
888000000002,894000000001	218057822	0.0002923027104557641
894000000002,900000000001	217996830	0.0002902754061251664

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
900000000002,906000000001	217951293	0.0002882953611111111
906000000002,912000000001	217900544	0.00028633448620236533
912000000002,918000000001	217849646	0.00028439901566579636
918000000002,924000000001	217799218	0.0002824892581063554
924000000002,930000000001	217740321	0.00028059319716494847
930000000002,936000000001	217695742	0.00027873974647887325
936000000002,942000000001	217644495	0.000276901393129771
942000000002,948000000001	217601058	0.0002750961542351454
948000000002,954000000001	217546480	0.0002732995979899497
954000000002,960000000001	217489245	0.00027152215355805246
960000000002,966000000001	217441149	0.0002697781004962779
966000000002,972000000001	217389465	0.00026805112823674474
972000000002,978000000001	217352275	0.00026636308210784313
978000000002,984000000001	217294152	0.00026467009987819735
984000000002,990000000001	217251928	0.0002630168619854722
990000000002,996000000001	217201909	0.00026137413838748494
996000000002,1002000000001	217156566	0.00025975665789473683
1002000000002,1008000000001	217103867	0.0002581496634958383
1008000000002,1014000000001	217061167	0.00025657348345153663
1014000000002,1020000000001	217004247	0.0002549991151586369
1020000000002,1026000000001	216970790	0.00025347054906542057
1026000000002,1032000000001	216921471	0.0002519413135888502
1032000000002,1038000000001	216870016	0.0002504272702078522
1038000000002,1044000000001	216837135	0.0002489519345579793
1044000000002,1050000000001	216789161	0.00024747621118721463
1050000000002,1056000000001	216743702	0.00024602009307604997

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
1056000000002,1062000000001	216698243	0.0002445804097065463
1062000000002,1068000000001	216663336	0.00024316872727272727
1068000000002,1074000000001	216609573	0.00024175175558035713
1074000000002,1080000000001	216559345	0.00024035443396226415
1080000000002,1086000000001	216526363	0.0002389915706401766
1086000000002,1092000000001	216477159	0.00023762586059275522
1092000000002,1098000000001	216442947	0.00023629142685589519
1098000000002,1104000000001	216384200	0.00023494484256243213
1104000000002,1110000000001	216345562	0.0002336345161987041
1110000000002,1116000000001	216311177	0.00023234283243823845
1116000000002,1122000000001	216267194	0.00023105469444444445
1122000000002,1128000000001	216226944	0.00022978421253985122
1128000000002,1134000000001	216181499	0.00022852166913319238
1134000000002,1140000000001	216144198	0.00022728096529968454
1140000000002,1146000000001	216104262	0.00022605048326359832
1146000000002,1152000000001	216066594	0.00022483516545265347
1152000000002,1158000000001	216031690	0.00022363528985507248
1158000000002,1164000000001	215984757	0.0002224353831101957
1164000000002,1170000000001	215942055	0.0002212521055327869
1170000000002,1176000000001	215892176	0.0002200735739041794
1176000000002,1182000000001	215854383	0.00021891925253549694
1182000000002,1188000000001	215814941	0.00021777491523713421
1188000000002,1194000000001	215789069	0.00021665569176706828
1194000000002,1200000000001	215738837	0.00021552331368631368
1200000000002,1206000000001	215714812	0.0002144282425447316
1206000000002,1212000000001	215658147	0.0002133117181008902

续表

区 间	区间内素数总数	区间内素数比率
1212000000002,1218000000001	215635712	0.00021223987401574804
1218000000002,1224000000001	215586432	0.00021115223506366307
1224000000002,1230000000001	215548720	0.0002100864717348928
1230000000002,1236000000001	215514783	0.00020903470708050437
1236000000002,1242000000001	215475891	0.00020798831177606177
1242000000002,1248000000001	215447109	0.00020696168011527378
1248000000002,1254000000001	215395478	0.00020592301912045888
1254000000002,1260000000001	215361454	0.0002049109933396765
合计-平均	46976989670	0.001308168527885