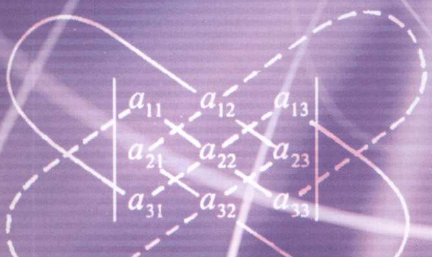
中国石油大学（华东）远程与继续教育系列教材

经济应用数学

线性代数

LINEAR ALGEBRA

何苏阳 费祥历 编



中国石油大学出版社

中国石油大学(华东)远程与继续教育系列教材

经济应用数学

线性代数

何苏阳　费祥历　编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数:经济应用数学/何苏阳,费祥历编.东营:
中国石油大学出版社,2007.5
ISBN 978-7-5636-2392-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①何…②费… Ⅲ.线性代数-高等学校-
教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 066898 号

书　　名:线性代数:经济应用数学
作　　者:何苏阳　费祥历

责任编辑:宋秀勇(电话　0546－8392139)
封面设计:霍良勇

出 版 者:中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)
网　　址:http://www.uppbook.com.cn
电子信箱:yibian@mail.hdpu.edu.cn
印 刷 者:沂南县汇丰印刷有限公司
发 行 者:中国石油大学出版社(电话　0546－8392139)
开　　本:170×230　印张:10.875　字数:205 千字
版　　次:2007 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价:13.00 元

中国石油大学(华东)
远程与继续教育系列教材编审委员会

总 序

从1955年创办函授夜大学至今，中国石油大学成人教育已经走过了从初创、逐步成熟到跨越式发展的50载历程。50多年来，我校成人教育紧密结合社会经济发展需求，积极开拓新的服务领域，为石油、石化企业培养、培训了10多万名本专科毕业生和管理与技术人才，他们中的大多数已经成为各自工作岗位的骨干和中坚力量。我校成人教育始终坚持“规范管理、质量第一”的办学宗旨，坚持“为石油石化企业和经济建设服务”的办学方向，赢得了良好的社会信誉。

自2001年1月教育部批准我校开展现代远程教育试点工作以来，我校以“创新教育观念”为先导，以“构建终身教育体系”为目标，整合函授夜大学教育、网络教育、继续教育资源，建立了新型的教学模式和管理模式，构建了基于卫星数字宽带和计算机宽带网络的现代远程教育教学体系和个性化的学习支持服务体系，有效地将学校优质教育资源辐射到全国各地，全力打造出中国石油大学现代远程教育的品牌。目前，办学领域已由创办初期的函授夜大学教育发展为今天的集函授夜大学教育、网络教育、继续教育、远程培训、国际合作教育于一体的，在国内具有领先水平、在国外有一定影响的现代远程开放教育系统，成为学校高等教育体系的重要组成部分和石油、石化行业最大的成人教育基地。

为适应现代远程教育发展的需要，学校于2001年9月正式启动了网络课程研制开发和推广应用项目，斥巨资实施“名师名课”教学资源精品战略工程，选拔优秀教师开发网络教学课件。随着由流媒体课件、WEB课件到网络课程的不断充实与完善，建构了内容丰富、形式多样的网络教学资源超市，基于网络的教学环境初步形成，远程教育的能力有了显著提高，这些网上教学资源的建设与研发为我校远程教育的顺利发展起到了支撑和保障作用。相应地，作为教学资源建设的一个重要组成部分，与网络教学课件相配套的纸质教材建

总
序

设就成为一项愈来愈重要的任务。根据学校现代远程教育发展规划，在“十一五”期间，学校将推进精品课程、精品网络课件和教材建设工作，通过立项研究方式启动远程与继续教育系列教材建设工作，选聘石油石化行业和有关石油高校专家、学者参与系列教材的开发和编著工作，计划用5年的时间，以石油、化工等主干专业为重点，陆续推出成人学历教育、岗位培训、继续教育三大系列教材。系列教材将充分吸收科学技术发展和成人教育教学改革最新成果，体现现代教育思想和远程教育教学特点，具有先进性、科学性和远程教育教学的适用性，形成纸质教材、多媒体课件、网上教学资料互为补充的立体化课程学习包。

为了保证“远程与继续教育系列教材”编写出版进度和质量，学校成立了专门的远程与继续教育系列教材编审委员会，对系列教材进行严格的审核把关，中国石油大学出版社也对系列教材的编辑出版给予了大力支持和积极配合。目前，远程与继续教育系列教材的编写还处于探索阶段，随着我校现代远程教育的进一步发展，新课程的开发、新教材的编写将持续进行，本系列教材的体系也将不断完善。我们相信，有广大专家、学者们的共同努力，一定能够创造出适合现代远程教育教学和学习特点、体系新、水平高的远程与继续教育系列教材。

中国石油大学(华东)远程与继续教育学院

2006 年 10 月

前　言

qian　　　　yan

为适应目前高等教育大众化趋势，针对一般经济类、管理类学生的实际水平以及职业教育的特点，我们按照线性代数的基本要求，编写了这本教材。本教材强调对基本概念、基本理论和基本运算的理解和掌握，在保证科学性、系统性的基础上，注意深入浅出、突出重点、强化能力、注重实用。

1. 内容体系作了较为精心的安排，如将矩阵的秩的概念提前讲授，并立即介绍用初等变换求矩阵秩的理论和方法。在讨论向量的线性相关性时，着重强调用矩阵的秩来判断相关性的理论，这样处理的好处是分散了难点，也降低了难度。

2. 为了便于教学和自学，将习题分为两大类：一类列于每章的各小节之后，这类习题可作为学完相应小节后的练习和作业使用；另一类列于每一章之后，作为复习题，其中复习题中 A 类题是一份自测题，读者可借此检查自己对内容的掌握情况，B 类题的难度较前者稍大一些，主要供读者进一步加深、提高使用。

3. 书中例题、习题较多，并尽量体现出层次感。在教材的内容安排上避免了一些难度较大的定理的证明。书中一些章节加了星号“*”，有一些定理的证明也加了星号，这部分内容供学习中选用，不作为课程的基本要求。

编者衷心感谢中国石油大学数学与计算科学学院领导、成人（网络）教育学院领导和中国石油大学出版社对本书的关心和扶植。

编　者

2007 年 3 月

目 录

第 1 章 ⇨ n 阶行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念，也是讨论许多问题的一个基本工具. 本章通过解二元和三元线性方程组引入二阶和三阶行列式的定义，进而归纳出 n 阶行列式的定义，并讨论其性质及计算方法，最后给出应用行列式解线性方程组的克莱姆法则.

1.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

用消元法解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & ② \end{cases}$$

$a_{22}\times$①式$-a_{12}\times$②式，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

类似地有

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

现记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

称 D 为**二阶行列式**，横排的称**行**，竖排的称**列**，它包含两行两列. 数 a_{ij}（$i=1,2;j=1,2$）称为二阶行列式的**元素**，其第 1 个下标 i 为**行标**，第 2 个下标 j 为**列标**，表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行、第 j 列.

如果把 a_{11}，a_{22} 的连线称为**主对角线**，把 a_{12}，a_{21} 的连线称为**副对角线**，则二

阶行列式的值等于主对角线上元素的乘积减去副对角线元素的乘积，这种算法称为二阶行列式的**对角线法则**. 按此法则，上述方程组的解可用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

其中 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}.$

称行列式 D 为方程组的**系数行列式**，行列式 D_1,D_2 分别是将 D 的第 1 列、第 2 列换为常数项 b_1,b_2 得到的.

应注意的是：

1）二阶行列式的结果是一个数，如 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

2）由上面的例子可见，在二元线性方程组中，只要变量系数所构成的二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0, \tag{1.1}$$

则方程组有解，且解可用行列式表示出来.

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+x_2=1,\\2x_1-3x_2=8.\end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1\\2&-3\end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

所以方程组有解，又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1\\8&-3\end{vmatrix}=-11,\quad D_2=\begin{vmatrix}3&1\\2&8\end{vmatrix}=22,$$

故得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-11}{-11}=1,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{22}{-11}=-2.$$

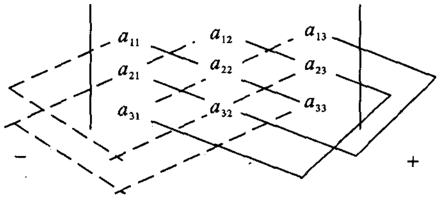
2. 三阶行列式

类似地，在用消元法解三元一次方程组时，可引入三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.2}$$

三阶行列式的上述计算法也称为“**对角线法则**”，即沿着主对角线方向(从左上至右下)得到的 3 个元素的乘积前带“+”号，而沿副对角线方向(从右上至左下)得到的 3 个元素的乘积前带“—”号. 示意图如下：



例 1.2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则，知

$$\begin{aligned} D &= 1\times3\times(-2)+1\times2\times2+0\times(-1)\times4-1\times2\times4 \\ &\quad -1\times(-1)\times(-2)-0\times3\times2 \\ &= -6+4+0-8-2-0 \\ &= -12. \end{aligned}$$

例 1.3 问行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

解 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1.$

$a^2-1>0 \Leftrightarrow |a|>1,$

因此 $D>0$ 的充分必要条件是

$$|a|>1.$$

对角线法则仅适用于二阶、三阶行列式，为将行列式的定义推广到 n 阶行列式，我们先介绍有关排列的逆序数、对换的一些知识.

»»» 习题 1.1 «««

1. 用对角线法则计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}$ （其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$）.

2. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

1.2　排列的逆序数与对换

1. 全排列及其逆序数

定义 1.1　由数 1,2,…,n 组成的一个有序数组,称为一个 n **级排列**.

引例　用 1,2,3 三个数字可以组成多少个没有重复的 3 位数？

解　这相当于说把 3 个数字分别放在百位、十位与个位,有几种不同的放法？显然,百位上可以从 1,2,3 三个数字中任选一个,所以有 3 种放法,十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有 2 种放法.而个位上只有 1 种放法.因此,共有 6 种放法.这 6 种排法列出如下：

$$123,\ 132,\ 231,\ 213,\ 312,\ 321.$$

在数学上把考察的对象叫做**元素**,例如上述引例中的数字 1,2,3 叫做元素.上述问题就是:把 3 个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法？

n 级排列的一般形式可设为

$$p_1 p_2 \cdots p_n,$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 分别为 $1,2,\cdots,n$ 中的某一数且互不相等.n 个不同元素排成一列,叫做这 n 个元素的**全排列**,n 个不同元素的所有排列的种数为

$$\begin{aligned} P_n &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1 \\ &= n!. \end{aligned}$$

定义 1.2　对于 1 至 n 的 n 个自然数,规定从小到大的顺序为**标准顺序**.在一个 n 级排列中,当某两个元素的先后顺序与标准顺序不同时,就说有 1 个**逆序**.一个排列中所有逆序的总数叫做这个**排列的逆序数**.逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**,逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**.

下面介绍一个求逆序数的方法：

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为一个 n 级排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果排在它前面且大于它的元素的个数为 t_i,则称元素 p_i 的逆序数为 t_i.全体元素的逆序数之和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数. 简言之,依次向前比较求出各元素的逆序数,然后累加.

例 1.4 求排列 32514 的逆序数.

解 在此排列中, 3 在首位,故 $t_1=0$;

2 的前面比 2 大的数有一个 3,构成一个逆序,$t_2=1$;

5 的前面没有比 5 大的数,$t_3=0$;

1 的前面比 1 大的数有 3 个,构成 3 个逆序,$t_4=3$;

4 的前面比 4 大的数有一个 5,构成一个逆序,$t_5=1$.

于是这个排列的逆序数为

$$t(32514) = 0+1+0+3+1 = 5.$$

例 1.5 计算排列 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 的逆序数,并判别其奇偶性.

解 n 排在首位,其逆序数为 0;

$n-1$ 的逆序数为 1;

……………………

2 的逆序数为 $n-2$;

1 的逆序数为 $n-1$.

于是这个排列的逆序数为

$$t(n(n-1)\cdots 2\cdot 1) = 0+1+\cdots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k+2, 4k+3$ 时,为奇排列,当 $n=4k+1, 4k+4$ 时,为偶排列,其中 k 为正整数.

2. 排列的对换及其性质

定义 1.3 在一个排列中,将其中某两个元素的位置对调,而其余元素不动,这种做出新排列的过程叫做**对换**,将相邻两个元素对换,叫做**相邻对换**.

定理 1.1 **一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性(对换改变排列的奇偶性).**

* **证** 先证相邻对换的情形.

设排列为

$$a_1 a_2 \cdots a_l a b b_1 b_2 \cdots b_m,$$

对调 a 与 b 后,变为

$$a_1 a_2 \cdots a_l b a b_1 b_2 \cdots b_m.$$

显然，$a_1, a_2, \cdots, a_l; b_1, b_2, \cdots, b_m$ 这些元素的逆序数在对换后并不改变，而 a, b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，对换后的 a 逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情况.

设排列为

$$a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n,$$

先作 m 次相邻对换，将其调成

$$a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n,$$

再作$(m+1)$次相邻对换，调成

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n.$$

即经过$(2m+1)$次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成了排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

»»»» 习题 1.2 ««««

1. 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性：

(1) 542163；　　(2) 4123；

(3) 3172456；　　(4) $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\cdot2\cdot4\cdot6\cdots(2n)$.

2. 选择 i, j 使

(1) 排列 $6i51j4$ 为偶排列；

(2) 排列 $3972i15j4$ 为奇排列.

1.3 n 阶行列式

1. 三阶行列式的特征

为给出一般的 n 阶行列式的定义，我们再进一步考察三阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

注意到上式右边的每一项皆为 3 个元素的乘积，并且这 3 个元素是位于不