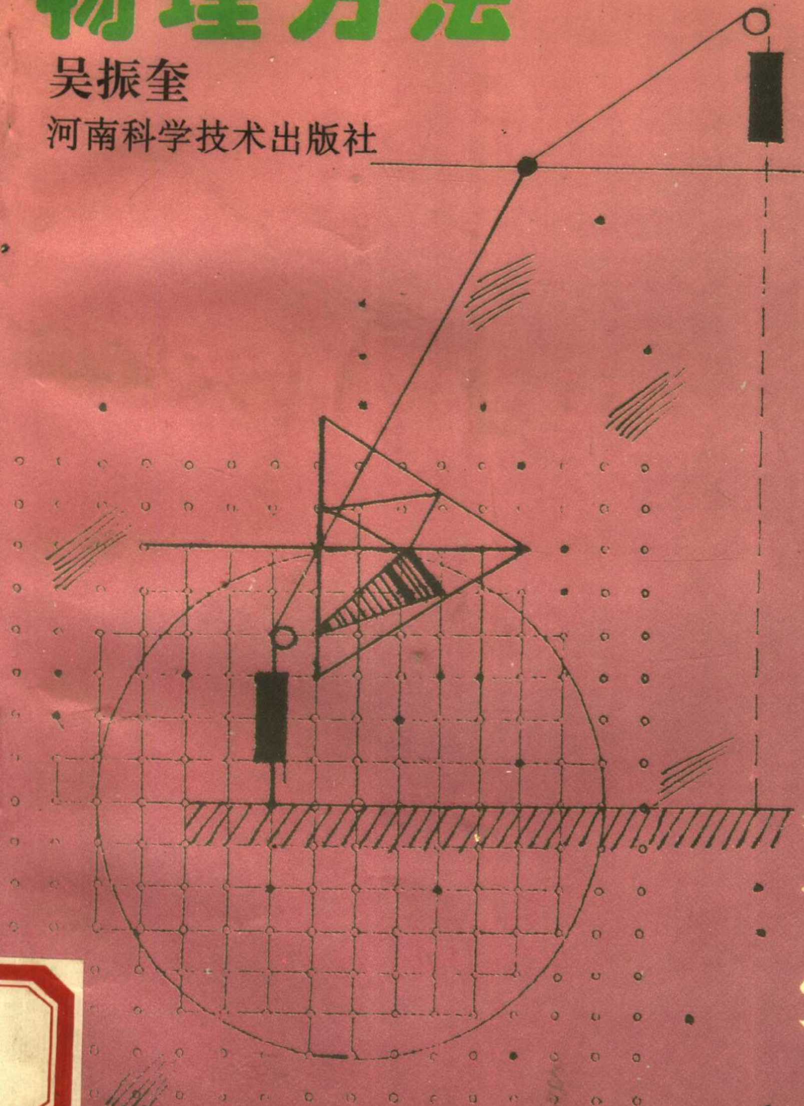
数学解题中的物理方法

吴振奎

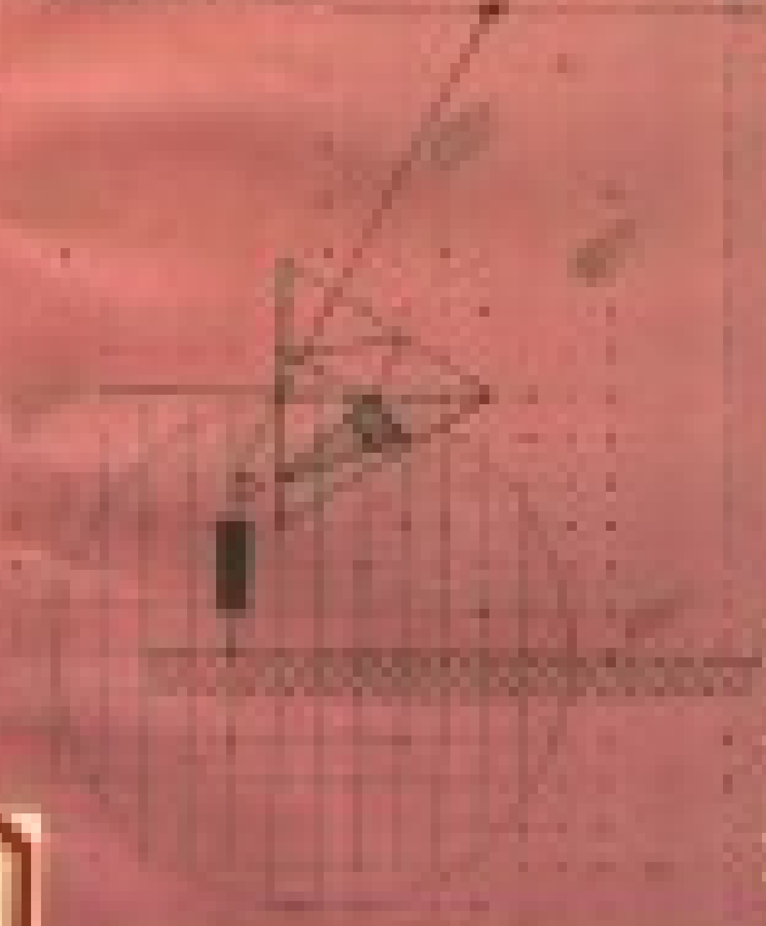
河南科学技术出版社

让你开窍的数学



数学解题中的物理方法

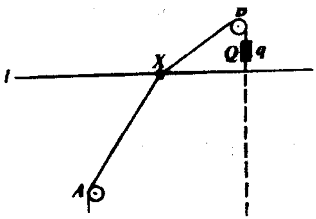
让你开窍的数学



让你开窍的数学

数学解题中的物理方法

吴振奎



河南科学技术出版社

内 容 提 要

数学与物理有着不解之缘，人们常用数学方法解答物理问题，然而反过来，用 物理方法解答数学问题却未被人们重视，但有时这不仅方便、简洁，而且巧妙、自然.

本书通过大量生动有趣的例子，介绍了中学数学解题中常用的各种物理方法（包括力学、光学、电学及其他物理方法），这不仅可以开阔读者的眼界，启发并丰富其解决数学问题的思路和手段，同时也有助于读者进一步加深对有关物理概念的理解.

让你开窍的数学

数学解题中的物理方法

吴振奎

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版

（郑州市农业路 73 号）

河南第一新华印刷厂印刷

全 国 新 华 书 店 发 行

787×1092 毫米 32 开本 6.25 印张 128 千字

1997 年 1 月第 1 版 1998 年 4 月第 2 次印刷

印数：4 001—7 000 册

ISBN 7-5349-1776-X/G · 450

定 价：6.80 元

序

如果我们打开科学史，研究一些卓越人物成功的经验，就会发现一个重要的事实：他们所研究的正是他们从小就喜欢的. 少年时代的达尔文数学成绩不佳，但热爱生物，结果他成为最伟大的生物学家. 反之，如果强迫他研究数学，他未必能如此成功. 由此可见，兴趣与工作一致，二者形成良性循环，是成功的重要因素. 然而兴趣又是怎样形成的呢？这固然与天赋有关，但后天的启发和培养更为重要. 数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣，这等于给了他们长久钻研数学的动力. 优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘，就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣，但这远远不够. 如果在传授知识的同时，分析重要的数学思想，阐明发展概况，指出各种应用，使学生

不仅知其然，而且知其所以然，不仅看到定理的结论，而且了解它的演变过程，不仅看到逻辑之美，而且欣赏到形象之美、直观之美，这才是难能可贵的. 在许多情况下，直观走在逻辑思维的前面，起了领路作用. 直觉思维大都是顿悟的，很难把握，却极富兴趣，正是精华所在. M. 克莱因写了一部大书《古今数学思想》，对数学发展的主导思想有精彩的论述，可惜篇幅太大，内容过深，不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷，必须深入数学本身：不仅是学者，而且是作者；不仅是观众，而且是演员. 他必须克服一个又一个的困难，不断地有新的发现、新的创造. 其入也愈深，所见也愈奇，观前人所未观，发前人所未发，这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界. 为此，他应具备很强的研究能力；而这种能力，必须从中学时代起便开始锻炼，经过长期积累，方可成为巨匠.

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用. 近年来我国出版了多种数学课外读物，包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解. 这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同，其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”，风格近似于美国数学教育家 G. Polya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，但更切合我国的实际. 本丛书共 8 本，可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广. 作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平，而且大都出版过多种数学著作. 因此，他们必能得心应手，写得趣味盎然，富于启发性. 这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学，我们希望它能收到宗旨中确定的效果，为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996.7.

前 言

数学和物理有着不解之缘.自这两门学科诞生起,它们就互相启发、互相借鉴、互相帮助并一道发展.

用数学方法去解物理问题,似乎理所当然(因为数学是工具),但反过来用物理方法去解答数学问题却常被人们所忽视,实际上后者往往也能使解复杂的数学问题变得巧妙与简洁.

用物理方法解答数学问题,早在两千多年以前,古希腊学者阿基米德就已进行了开拓性的研究:他曾用力学中物体的平衡定律解一些几何问题,且将它们写入《一些几何命题的力学证明》一书.

微积分的产生是与物理(也包括工程)的研究分不开的.

近代的物理学,不仅为某些数学命题的证明提出了明确的思路和简单的办法,甚至为数

学提供了新的思想和方向，从而产生出新的数学分支.

这样，我们有必要去回顾、总结一下中学数学中那些可用物理方法来解决的问题，这不仅可开阔我们的眼界，增加解决数学问题的手段，同时对于某些物理现象（原理、定律等）会有进一步的了解与认识——这对数学和物理的学习，无疑都是有益的。

本书撰于10余年前，此次出版笔者作了较大修改：增加了某些内容，充实了某些方法，添补了某些例题，……然而这一切仍恐挂一漏万，因为要想用如此篇幅去侈谈“数学解题的物理方法”是困难的，况笔者功浅力薄。这里的目的无非是抛砖引玉而已。

但愿读者能体味这番苦心。

吴振奎

1994年末于天津

目录

1

刚性变换与压缩变换

圆是最完美的图形.

——但丁(Dante)

天气冷了,如果你细心观察就会发现,动物躺下时总要把身体缩成一团(成一个球),因为这样可以减少身体表面热量的损失.水银滚落地面,雨点打到荷叶上,都呈现球形.在表面张力的作用下,液体有力求使其表面积达到最小的趋势.这些可给我们带来一个启示(无异于要求我们去承认):

在体积一定的几何形体中,球的表面积最小.

若将一段柔软的细线两头连接起来,将它轻轻地放在一个蒙有肥皂膜的铁框上,再用小

针将曲线里面的薄膜刺破，曲线就变成了圆. 这是因为曲线里面薄膜消失后，外面的肥皂膜表面的张力收缩，牵制曲线且使曲线围成的面积尽可能地扩大. 这又启发我们：

在周长一定的平面封闭曲线中，以圆的面积为最大（等周定理）①.

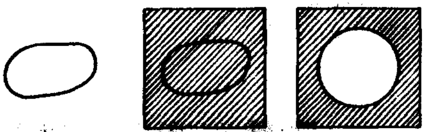


图 1.1

由以上可以看到：物理现象不仅为我们提出某些数学问题，同时也可以帮助我们理解某些数学概念和结论.

它们的证明这里姑且不谈，下面我们先谈一下利用上面的结论，且借助于所谓“刚体”的性质及变换，去证明关于多边形面积的极值问题和其他几何问题，然后再由“弹性体”谈谈压缩变换.

---

① 等周问题历史相当久远. 相传迪多(Dido)女皇曾在购买土著人土地时考虑过它(因此导致迦太基城的建立，详见第 3 章).

古希腊数学家芝诺多罗斯(Zenodorus)在公元前 2 世纪就研究过这个问题，其成果在 5 世纪之后由巴普士(Pappus)详述并加以推广.

18 世纪，拉格朗日(Lagrange)创立了变分法，这对等周问题的解决提供了有力的工具，尤其适于该问题的一般提法.

利用初等几何解决该问题是 19 世纪几何学家雅谷比・斯坦纳(Jacob Steiner)完成的.

1.1 刚性变换

所谓“刚体”系指在空间移动而不改变其形状和大小的物体. 利用“刚体”的某些性质可以巧妙地处理一些问题. 我们先来看一个例子:

例 1.1 当四条边给定时,什么样的四边形面积最大?

解 我们由等周定理知道:定长曲线所围成的平面图形以圆面积最大. 设四边给定的四边形 $ABCD$ 可内接于圆,我们把圆除去四边形后剩下的部分[图 1.2(a)中阴影部分]视为刚性板,且把四边形 $ABCD$ 的四个顶点看成活动关节,当刚性板块沿活动关节变化时,便得到一个新的图形[图 1.2(b)]——但它们的外围不再是个圆. 可是图中阴影部分系刚性板块,即它位置变化时面积不变,且圆弧及弦长也不变,即它的周界长不变。由

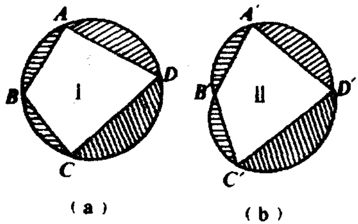


图 1.2

$$S_{\odot} > S_{图形(b)} \quad (等周定理),$$

即 $$S_{阴影} + S_{Ⅰ} > S_{阴影} + S_{Ⅱ},$$

得 $$S_{Ⅰ} > S_{Ⅱ} \quad (\because \quad S_{阴影} = S_{阴影}).$$

因此,我们得到结论:当四条边给定时,以圆内接四边形的面积为最大.

注 这个结论亦可用三角方法得到. 令四边形面积为 S,四边长为

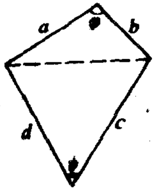


图 1.3

a,b,c,d；且 a,b 夹角为 φ；c,d 夹角为 ψ(图 1.3). 由

$$2S=ab\sin\varphi+cd\sin\psi, \tag{1.1}$$

由余弦定理有

$$\frac{1}{2}(c^2+d^2-a^2-b^2)=cd\cos\psi-ab\cos\varphi. \tag{1.2}$$

$(1.1)^2+(1.2)^2$ 再整理有

$$4S^2+\frac{1}{4}(c^2+d^2-a^2-b^2)=a^2b^2+c^2d^2+2abcd[\sin\varphi\ \sin\psi-\cos\varphi\ \cos\psi].$$

即 $$16S^2=4(a^2b^2+c^2d^2)-(c^2+d^2-a^2-b^2)-8abcd\cos(\varphi+\psi),$$

故 $$S=\frac{1}{4}[4(a^2b^2+c^2d^2)-(c^2+d^2-a^2-b^2)^2-8abcd\cos(\varphi+\psi)]^{\frac{1}{2}}.$$

显然当 $\varphi+\psi=\pi$ 时，S 最大.

仿照上面的方法，我们还可以证明：

(1)边数及周长给定的多边形，以正多边形面积最大；

(2)周长相同的两个正多边形，边数多者面积也大.

下面我们仍利用刚体的性质，证明上述结论. 为了证明(1)，我们先来证一下：周长相同、边数一样的两个多边形，以等边多边形面积最大.

这可由归纳法且通过局部调整的办法来证明. 只须注意到：给定底和两腰的三角形，以等腰三角形面积最大.（其实也可从图1.4中明显地看到这一点，注意到椭圆的性质.）

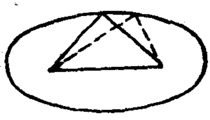


图1.4

注 这个结论还可以用下面的办法证明：

若$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，且$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=l$（常数），记$\Pi_1=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$.

又令$y_1=y_2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$y_k=x_k$ $(k=3,4,\cdots,n)$，显然$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=l$，又记$\Pi_2=\prod\limits_{i=1}^{n}y_i$，我们有$\Pi_1<\Pi_2$. 事实上，

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1x_2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2>0,$$

即$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2>x_1x_2$，从而

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\cdot\prod_{i=3}^{n}x_i>x_1x_2\prod_{i=3}^{n}x_i,$$

即
$$\prod_{i=1}^{n}y_i>\prod_{i=1}^{n}x_n.$$

由此可以看到，只要$x_i,x_j(i\neq j)$不相等就可重复上面步骤，使和$\sum x_i$不变，而积$\prod x_i$增大.

当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，就不能再调整了，因而它的积$\prod x_i$最大.

有了上面的准备，我们可用刚体的性质来证明(1). 这只须证周长相同的等边n边形，当它能内接于圆时面积最大（即为正n边形）即可.

证明的方法及步骤完全与例1.1的证明相同（图1.5）.

有了(1)我们不难证得(2)，这只须把正n边形视为特殊的$n+1$边形，即有一个顶点在某条边上而把此边一分为二. 这样它便是不等边的$n+1$边形，由(1)显然有$S_{\text{正}n\text{边形}}<S_{\text{正}n+1\text{边形}}$.

如果不太严格地讲，我们已经部分地论证了"等周定理"，

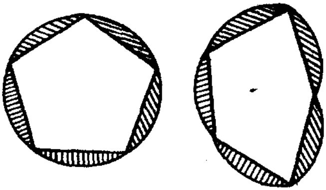


图1.5

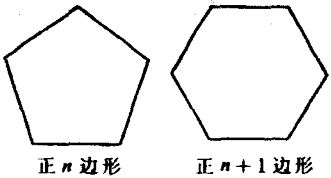


图1.6

因为圆可视为周长一定边数不断增加的正多边形的极限情形.

至于它的严格证明,可参考有关文献(比如北京大学出版社出版的《等周问题与夫妇入座问题》).

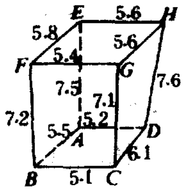
上面我们看到利用刚体性质可以处理一类几何极值问题,其实它还可以有效地模拟处理一些实际问题. 与运筹学有关的所谓"货郎担问题"(又称"推销员问题"),是一种选择最佳路径的问题,下面的例子是它的简单情形,我们可用线段的"刚性"巧妙地给以解决.

例1.2 八个城市 A,B,C,D,E,F,G,H 均匀地分布在地球上,且每相邻的三个城市间都有航线连通,它们之间的距离如图1.7(a)所标. 有一位推销员想从 F 到 D 去,他应选择哪条路才最经济?(单位里程旅费都一样)

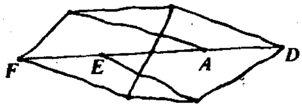
直接计算未尝不可,只是略繁. 我们可以这样处理:

解 按图中尺寸截取12根细铁线,再绑成如图1.7(a)的样子,且在各顶点处粘一记号,分别写上 $A,B,\cdots,H$,然后一手拿住 F 点,一手拿住 D 点,轻轻拉紧,便成图1.7(b)的样

子，其中最紧的一条：F-E-A-D 即为所求. 它的道理读者不难想通：因为两点间距离以直线段最短.



（a）



（b）

图1.7

注 这个问题在"运筹学"(应用数学的一个分支)上称为"最短路问题"，与之相联的著名问题是"货郎担问题"，也称"推销员问题".

当城市个数较多时(比如城市个数 $n=30$)，按照现有的方法解决它，即便使用大型电子计算机也无能为力，因而这个问题在"运筹学"中属尚未解决的问题之一.

这儿给出的模拟方法如能通过电子计算机去实现，或许是开拓性的.

蜘蛛吃苍蝇的问题为人们所熟知和喜欢. 问题是这样的：在一个长方体上 B 处落着一只苍蝇，与它邻接的面上 A 处有一蜘蛛(图1.8)，蜘蛛想吃掉苍蝇，当然希望找寻一条最短的路，应如何去找？

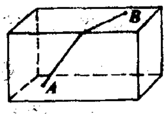


图1.8

若把长方体表面看成刚性薄板，我们把它各面展开铺平后，在 A，B 间所连的线段即为所求(图1.9)，读者不难把这个问题还原回去.