

黄冈题库

丛书主编 董德松 (黄冈市教育科学研究院院长)

本册主编 杨玉东 郭树芹

学习探究拓展

高中数学

4 必修

AB版



新课标

适用人教版

中国计量出版社

卓越教育图书中心



(适用人教版·新课标)

黄冈题库

学习探究拓展

丛书主编 董德松

本册主编 杨玉东
郭树芹

高中数学4 (必修)

中国计量出版社

卓越教育图书中心

图书在版编目(CIP)数据

黄冈题库:学习探究拓展.高中数学4(必修):适用人教版新课标./董德松丛书主编;
杨玉东等分册主编. —北京:中国计量出版社,2007.11

ISBN 978-7-5026-2752-2

I. 黄… II. ①董…②杨… III. 数学课—高中—习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 161288 号

编委会

总策划 马纯良

丛书主编 董德松

执行总编 刘国普

委员 谢英 张兰珍 王清明 张书文 黄金鹏

蔡新 陈长东 朱和平 彭兆辉

本册主编 杨玉东 郭树芹

本册编写 杨玉东 郭树芹 谢化杰 杨帆 张文玲 王立朋 宋强

邱晓丽 王其伟 徐化强 王学梅 曹文莉 邓伟

版权所有 不得翻印

举报电话:010-64275323 购书电话:010-64275360

中国计量出版社 出版

北京和平里西街甲2号

邮政编码:100013

http://www.zgjl.com.cn

E-mail: jf@zgjl.com.cn

印刷 三河市灵山红旗印刷厂

发行 中国计量出版社总发行 各地新华书店经销

开本 850 mm×1168 mm 1/16

印张 14.25

字数 304千字

版次 2007年11月第1版 2007年11月第1次印刷

印数 1—5000册

定价 18.00元

(如有印装质量问题,请与本社联系调换)

编写说明

丛书特点

1. 关注课改 创新理念 本丛书以促进学生全面发展为宗旨,立足素质教育,全面体现基础教育课程改革的新理念,把课本知识学习、创新研究型实践以及思维拓展训练有机地结合起来。

2. 精心策划 权威编写 充分了解读者需求,与基础教育专家共同策划,结构设计科学,针对性强。作者是来自北京、湖北、陕西、安徽、山东等地重点中学的一线骨干教师,以及参与新课标教材编写的国家级教师、教研员等。

3. 注重实用 科学设计 内容设计以学生为本,注重实用。根据不同学科、不同年级的特点,科学设计栏目,严格控制题量和难度,创新题型。版式设计简单明了,便于使用。本书适用人教A版和B版。标有“A版适用”或“B版适用”的分别为教材A版或B版独有的内容;不标注者为两者共修内容。

本书栏目设置

知识梳理 通过讲解和辨析,梳理每课基本概念、知识点,指明学习方向。

典型例题精讲 主要针对每节知识点、重难点,选择典型例题(包括高考真题、模拟试题和竞赛题等),从切入、解析到点拨,帮助学生熟悉各类题型,掌握多种解题方法,举一反三。

一级闯关题 依据每课知识点设计题目,系统、全面且针对性强,注重能力形成训练,旨在夯实基础。提示:高考中绝大部分分值均来自这里,必须完全掌握!

二级闯关题 有较高难度要求的题,适用于学有余力的学生。其题目设计重在知识点的综合运用和能力的提升,注重思维拓展和能力提升训练,旨在盘活基础。思维延伸、创新研究性的题目,能激发学生自主学习的兴趣。提示:能破解难题是获得高分的秘诀!

高考瞭望 综合能力演练,加强对知识点的理解和掌握,提高解题应试能力。

单元总结 通过“知识归纳”和“方法集粹”等栏目归纳总结本单元知识脉络,清晰思路,提炼学习探究方法。

智慧宫殿 通过链接与每章相关的知识背景,点击数学的发展前景及在各领域中的应用,加深对数学背景的认识,提高数学学习的兴趣。

综合测试 各单元综合测试、模块达标检测,题目设计系统、全面,便于学习的阶段检测,及时查漏补缺,全面提升解决问题的综合能力。

参考答案及解析 给出每题参考答案,对有一定难度的题,针对知识点、考点或解题思路等进行适当分析和点拨,以引导知识的升华。

目 录

第 1 章 基本初等函数 (Ⅱ)	(1)
导练 1 角的概念的推广	(1)
导练 2 弧度制和弧度制与角度制的换算	(5)
导练 3 三角函数的定义	(11)
导练 4 单位圆与三角函数线	(15)
导练 5 同角三角函数的基本关系式	(20)
导练 6 诱导公式 1	(26)
导练 7 诱导公式 2	(29)
导练 8 诱导公式 3	(32)
导练 9 正弦函数的图象	(37)
导练 10 正弦函数的性质	(41)
导练 11 正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$	(46)
导练 12 余弦函数的图象与性质	(51)
导练 13 正切函数的图象和性质	(57)
导练 14 已知三角函数值求角 (B 版适用)	(61)
导练 15 三角函数模型的简单应用 (A 版适用)	(65)
第 1 章总结	(73)
第 1 章综合测试	(76)
第 2 章 平面向量	(79)
导练 16 向量的概念	(79)
导练 17 向量的加法	(82)
导练 18 向量的减法	(86)
导练 19 向量数乘	(90)
导练 20 向量共线的条件与轴上向量坐标运算	(94)
导练 21 平面向量基本定理	(98)
导练 22 向量的正交分解与向量的直角坐标运算	(102)
导练 23 用平面向量坐标表示向量共线条件	(107)
导练 24 向量数量积的物理背景与定义	(110)
导练 25 向量数量积的运算律	(114)
导练 26 向量数量积的坐标运算与度量公式	(118)
导练 27 向量在几何中的应用	(123)

导练 28 向量在物理中的应用	(127)
第 2 章总结	(134)
第 2 章综合测试	(139)
第 3 章 三角恒等变换	(143)
导练 29 两角和与差的余弦	(143)
导练 30 两角和与差的正弦	(149)
导练 31 两角和与差的正切	(156)
导练 32 倍角公式	(162)
导练 33 半角的正弦、余弦和正切	(169)
导练 34 三角函数的积化和差与和差化积	(175)
第 3 章总结	(183)
第 3 章综合测试	(189)
模块达标检测	(193)
参考答案及解析	(197)

第1章 基本初等函数(Ⅱ)

导练1 角的概念的推广

导学篇

知识梳理

一、基础精讲

1. 角的概念

静态定义:把有公共端点的两条射线组成的图形叫做角,这个公共端点叫做角的顶点,这两条射线叫做角的边.

动态定义:角可以看成在平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形,它由始边、终边、顶点组成.

2. 角的分类

正角:按逆时针方向旋转而成的角.

负角:按顺时针方向旋转而成的角.

零角:当射线没有旋转时形成的角.

3. 象限角

在直角坐标系中,把角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,角的终边在第几象限,就把这个角叫做第几象限的角.这样的角称为象限角.注意:终边落在坐标轴上的角不属于任何象限.

4. 终边相同的角

在 α 和 β 终边相同,则 $\beta = \alpha + 360^\circ \cdot k (k \in \mathbb{Z})$, 变式: $\alpha - \beta = 360^\circ \cdot k (k \in \mathbb{Z})$

二、重点研习

(1)正确表示各种角是个基本要求,如:

第一象限的角: $\{\beta | k \cdot 360^\circ < \beta < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第二象限的角: $\{\beta | 90^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第三象限的角: $\{\beta | 180^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第四象限的角: $\{\beta | 270^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 360^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边落在 x 轴上的角: $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边落在 y 轴上的角: $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边落在坐标轴上的角: $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

其中,有些角的表示方法不惟一,如第四象限的角也可表示为 $\{\beta | -90^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2)注意以下概念不要混淆

锐角: $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$;

小于 90° 的角: $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$;

第一象限的角: $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(3)终边相同的角不一定相等,但相等的角终边一定相同.

(4)学习本节时,要有归纳、转化、分类讨论、数形结合的意识.

典型例题精讲

例 1—1 写出终边落在 $y = \sqrt{3}x$ 直线上的角的集合.

[切入] 如图 1—1 所示,分类讨论终边在第一、三象限时分别形成角的集合,再求出并集.

[解析] 终边落在直线 $y = \sqrt{3}x (x \geq 0)$ 和直线 $y = \sqrt{3}x (x < 0)$ 上的 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内的角为 60° 和 240° ,所以终边落在

在直线 $y = \sqrt{3}x (x \geq 0)$ 上的角的集合 $S_1 = \{\alpha | \alpha = 60^\circ +$

$k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;终边落在直线 $y = \sqrt{3}x (x < 0)$ 上的

角的集合 $S_2 = \{\alpha | \alpha = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,于是,

终边落在 $y = \sqrt{3}x$ 上的角的集合是 $S = S_1 \cup S_2 =$

$\{\alpha | \alpha = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\} = \{\alpha | \alpha = 60^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 60^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} = \{\alpha | \alpha = 60^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

[点拨] 数形结合可以使思路更清晰,分类讨论是全面解决问题的关键.要理解终边相同的角的含义,注意奇数集、偶数集的并集是整数集.

例 1—2 若 α 是第二象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角? 2α 是第几象限角?

[切入] 先利用终边相同的角的表达式表示出 α 的范围,然后求出 $\frac{\alpha}{2}$ 和 2α 的范围,进而判定其所在象限.

[解析] 由已知 α 是第二象限角得 $90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

(1) $45^\circ + k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$. ①当 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$ 时, $45^\circ + 2n \cdot$

$180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + 2n \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角;②当 $k = 2n+1, n \in \mathbf{Z}$ 时,

$225^\circ + 2n \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 270^\circ + 2n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

综上可知 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

(2) $180^\circ + 2k \cdot 360^\circ < 2\alpha < 360^\circ + 2k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$. 所以 2α 是第三、第四象限角或是终边落在 y 轴的负半轴上.

[点拨] 已知 α 所在象限,求 $\frac{\alpha}{n}, n\alpha (n \in \mathbf{Z})$ 所在象限时,先要确定 α 的范围(注意一般性,

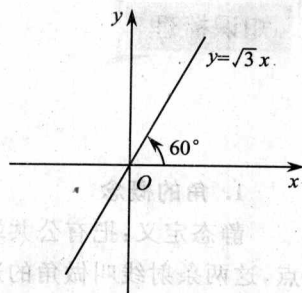


图 1—1

防止以偏概全), 后由 $\frac{\alpha}{n}, n\alpha (n \in \mathbb{Z})$ 的范围确定所在象限. 规律小结: 知道 α 所在象限, $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3} \dots$ 所在的象限可由象限等分法得到: 以 $\frac{\alpha}{2}$ 为例, 每象限二等分, 从 x 轴正向起按逆时针方向在各等分区域标数字 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4. 若 α 是第 n 象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 在标有数字 n

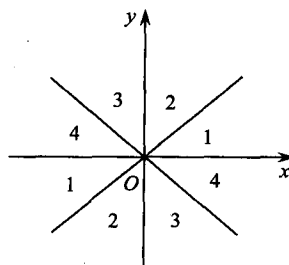


图 1-2

的区域内. 如 α 是第一象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一或三象限.

例 1-3 若集合 $M = \{\alpha \mid 30^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\alpha \mid -45^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 求 $M \cap N$.

[切入] 通过数形结合直观地解决问题.

[解析] 如图 1-3 所示, 在直角坐标系中找到集合 M , N , $M \cap N$ 即为这两个区域公共部分所表示角的集合. $M \cap N = \{\alpha \mid 30^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

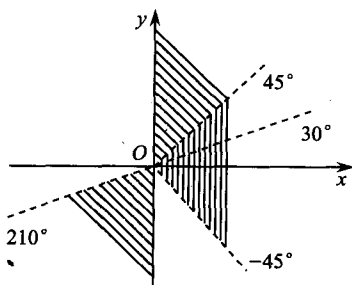


图 1-3

[点拨] 在求角的集合的关系与运算时, 我们常常利用直角坐标系找到表示角的区域, 再进行求关系或运算. 有时也可借助数轴直观地解决问题.

练

考

篇

一级闯关题

- 在 $148^\circ, 475^\circ, -960^\circ, -1601^\circ, -185^\circ$ 这 5 个角中, 属于第二象限角的个数为 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 若角 α 的终边经过点 $M(0, -5)$, 则角 α ()
A. 是第三象限角 B. 是第二象限角
C. 既是第三象限角又是第四象限角 D. 不是任何象限角
- 若 α 是第四象限角, 则 $\pi - \alpha$ 是 ()
A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角
- 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是 ()
A. 第一或二象限 B. 第二或三象限 C. 第一或三象限 D. 第二或四象限
- (2006, 杭州模拟) 设集合 $M = \{x \mid x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x \mid x = 90^\circ + k \cdot 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则必有 ()
A. $M = N$ B. $M \supsetneq N$ C. $M \subsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

6. 经过 2 个小时, 钟表上的时针旋转了 ()
 A. 60° B. -60° C. 30° D. -30°
7. 如果角 α 与 $x+45^\circ$ 具有相同的终边, 角 β 与 $x-45^\circ$ 有相同的终边, 则 α 与 β 的关系是 ()
 A. $\alpha-\beta=90^\circ$ B. $\alpha+\beta=0^\circ$
 C. $\alpha-\beta=90^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbb{Z}$ D. $\alpha-\beta=k\cdot 360^\circ, k\in\mathbb{Z}$
8. 在 $-720^\circ\sim 720^\circ$ 之间与角 -1000° 终边相同的角是 _____.
9. 已知 α, β 的终边关于 y 轴对称, 则 α 与 β 的关系是 _____.
10. 已知角 2α 的终边在 x 轴上方, 则角 α 是第 _____ 象限角.
11. 已知 $S=\{\beta|k\cdot 360^\circ-60^\circ<\beta<k\cdot 360^\circ+60^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$, $P=\{\alpha|k\cdot 180^\circ+30^\circ<\alpha<k\cdot 180^\circ+150^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$ 求 $S\cap P$.
12. 写出终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合.

二级闯关题

13. 设集合 $A=\{x|x=180^\circ\cdot k+(-1)^k\cdot 90^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{x|x=360^\circ\cdot k+90^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$, 则集合 A 与 B 的关系是 ()
 A. $A\subsetneq B$ B. $A\supsetneq B$ C. $A=B$ D. $A\cap B=\emptyset$
14. 设时钟的时针在 2 点和 3 点之间. (1) 时针和分针什么时候重合? (2) 何时两针在彼此的延长线上?
15. 如图 1-4 所示, 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点, 点 P 从点 $A(1,0)$ 出发, 以逆时针方向等速沿圆周旋转, 已知点 P 在 1 s 内转过的角度为 θ ($0^\circ<\theta<180^\circ$), 经过 2 s 到达第三象限, 经过 14 s 刚好回到出发点 A , 求 θ .

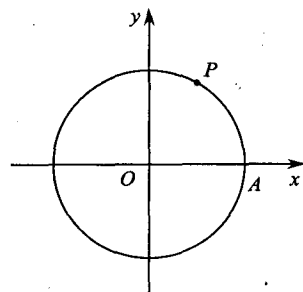


图 1-4

导练 2 弧度制和弧度制与角度制的换算

导 学 篇

知识梳理

一、基础精讲

1. 弧度制的概念

把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角, 用 1 rad 表示. 这种以弧度作为单位来度量角的单位制叫弧度制, 它是十进制. 如图 2-1 所示.

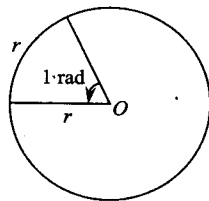


图 2-1

2. 角度制与弧度制的互化

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 18'$$

应熟记特殊角的角度数与弧度数的对应值, 如表 2-1 所示.

表 2-1

角 度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧 度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
角 度	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	—
弧 度	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	—

3. 弧长公式与扇形的面积公式

弧长公式: 在半径为 r 的圆中, 弧长为 l 的弧所对的圆心角的大小为 α (rad), 则 $l = ar$ 称为弧长公式.

注意: α 的单位是弧度, l 和 r 单位要统一. 结合变形公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 和 $r = \frac{l}{|\alpha|}$ 会知二求一.

面积公式: 在半径为 r 的圆中, 弧长为 l 的弧与半径构成的扇形面积 $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}lr$, 又

$$l = ar, \text{ 所以 } S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}ar^2.$$

二、重点研习

1. 正确理解 1 rad 角的定义的理论基础

如图 2-2 所示,在小圆中,设圆心角为 n° ,由初中学过的弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$,当 $l=r$ 时, $n = \frac{180}{\pi}$;同样,在大圆中,设圆心角为 n'° ,当 $L=R$ 时, $n' = \frac{180}{\pi}$. 可见,等于半径的弧长所对的圆心角是一定的,不因半径改变而改变.

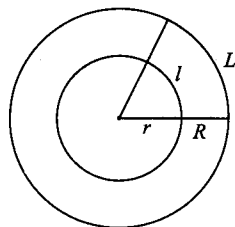


图 2-2

引入弧度制后,我们避开了角度制中 60 进制带来的不便,将角的大小与实数集建立了一一对应关系.

2. 弧度制下圆的相关公式

弧度制在角的度量时是用十进制,其弧长公式和面积公式的表达远比角度制下的公式简单,这为后面进行的有关函数的研究带来了很多方便,也增强了整体结构的和谐美.

在使用公式时要注意变用.

3. 常见角的集合的弧度表示

在将角的概念推广后,理解终边相同的角的基础上,用弧度制表示常见角.

第一象限的角: $\{\alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;

第二象限的角: $\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

第三象限的角: $\{\alpha \mid 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

第四象限的角: $\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

终边在 x 轴上的角: $\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

终边在 y 轴上的角: $\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;

终边在坐标轴上的角: $\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

典型例题精讲

例 2-1 将 $92^\circ 15'$ 化为弧度;将 $-\frac{19}{36}\pi$ 化为角度.

[切入] 这是弧度制与角度制的换算问题,从 $1 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 入手.

[解析] $92^\circ 15' = 92.25^\circ = 92.25 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{41}{80}\pi \text{ rad}; -\frac{19}{36}\pi = -\left(\frac{19}{36}\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -95^\circ$.

[点拨] 正确记忆角度与弧度间的换算关系是解题关键.

例 2-2

如图 2-3 所示,用弧度表示顶点在原点,始边在 x 轴非负半轴,终边落在阴影部分的角的集合.

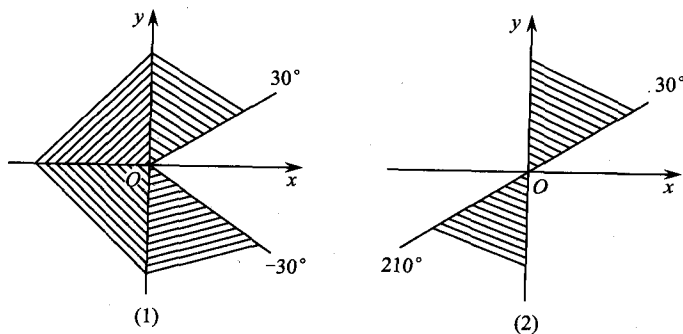


图 2-3

[切入] 先表示出边界上角的集合,再表示出终边在阴影区域的角的集合.

[解析] (1) $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, 终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) 终边在第一象限的角的集合为 $\{\alpha \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 终边在第三象限的角的集合为 $\{\alpha \mid \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 所以终边在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha \mid \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha \mid \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha \mid \frac{\pi}{6} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

[点拨] 在用弧度制表示角的集合时要注意单位统一,注意角的正确表示,如(1)不能表示成 $\{\alpha \mid -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,也不能表示成 $\{\alpha \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

例 2-3

已知一扇形的周长为 40 cm,当它的半径和圆心角取什么值时,扇形的面积最大? 最大面积是多少?

[切入] 由于扇形半径、弧长都未知,所以先利用已知将半径 r 、弧长 l 的关系列出来,再寻求解决办法.

[解析] 设此扇形半径为 r ,弧长为 l ,则有 $2r + l = 40$,得 $l = 40 - 2r$, $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \cdot$

$(40 - 2r) \cdot r = -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$ ($\frac{20}{\pi+1} < r < 20$). 可见,当 $r = 10$

时, $S_{\text{max}} = 100$,此时圆心角 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{40 - 2r}{r} = 2 \text{ rad}$.

[点拨] 找到半径、弧长的关系是解决本题的关键.求最值的途径之一是利用函数求解,设出未知数,建立关系式,配方求最值.

一级闯关题

- $-\frac{29}{12}\pi$ 所在的象限是 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 下列命题中, 不正确的是 ()
A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位
B. 一度的角是周角的 $\frac{1}{360}$, 一弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$
C. 根据定义, 180° 的角一定等于 π 弧度的角
D. 不论是用角度制量角还是用弧度制度量角, 它们与圆的半径长短有关
- 终边在第一、四象限的角的集合可表示为 ()
A. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ B. $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$
C. $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ D. $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi) \cup (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$
- 设集合 $M = \{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\alpha | -\pi < \alpha < \pi\}$, 则 $M \cap N =$ ()
A. $\{-\frac{\pi}{3}, \frac{3}{10}\pi\}$ B. $\{-\frac{7}{10}\pi, \frac{4}{5}\pi\}$
C. $\{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi\}$ D. $\{\frac{3}{10}\pi, -\frac{7}{10}\pi\}$
- 已知集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则有 ()
A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $N \subsetneq M$ D. $M \cup N = \emptyset$
- 将分针拨慢 10 min, 则分针转过的弧度数为 ()
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $-\frac{\pi}{6}$
- 某扇形的面积为 1 cm^2 , 它的周长是 4 cm, 那么该扇形圆心角为 ()
A. 2° B. 2 rad C. 4° D. 4 rad
- 一钟表的分针长 10 cm, 经过 35 min, 分针的端点所转过的长为 ()
A. 70 cm B. $\frac{70}{6} \text{ cm}$
C. $(-\frac{25}{3}\pi - 4\sqrt{3}) \text{ cm}$ D. $\frac{35}{3}\pi \text{ cm}$
- 终边落在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上的角的集合为 _____. (用弧度制表示)
- 一扇形的圆心角是 72° , 半径为 20 cm, 则扇形的面积为 _____.
- 比较大小: $\alpha = 1, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{6}$, 按从小到大顺序排列 _____.
- 半径为 $a (a > 0)$ 的圆中, $\frac{\pi}{6}$ 弧度圆周角所对的弧长为 _____, 长为 $2a$ 的弧所对的圆周角为 _____ 弧度.

13. 把下列各角化成 $2k\pi + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z}$) 形式, 并指出它们是第几象限角.

(1) -1500° ; (2) 2400π

14. 如图 2—4 所示, 用弧度制表示顶点在原点, 始边与 x 轴非负半轴重合, 终边落在阴影部分的角的集合(不包括边界).

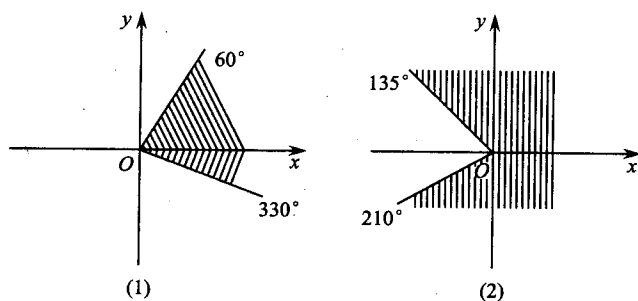


图 2—4

15. 直径为 24 cm 的轮子, 每 5 min 转 1000 圈, 试求:

(1) 它的平均角速度(1 s 经过的弧度数);

(2) 轮沿上一点一秒经过的距离;

(3) 轮沿上一点转过 1000° 所经过的距离.

二级闯关题

16. 一圆弧的长度等于该圆弧所在的圆的内接正三角形的边长,求其圆心角.

17. 如图 2—5 所示,在扇形 AOB 中, $\angle AOB=90^\circ$, 弧 $AB=l$, 求此扇形的内接圆的面积.

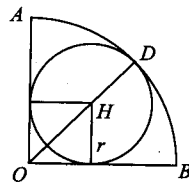


图 2—5

18. 扇形周长 c 一定时, 圆心角 θ 取何值时才能使扇形面积 S 最大? 最大值是多少?

导练3 三角函数的定义

导 学 篇

知识梳理

一、基础精讲

1. 三角函数的定义

设 α 是任意角, 在 α 的终边上任意异于原点的一点 P 的坐标是 (x, y) , 它到原点的距离是 $r = (r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$, 那么比值 $\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的正弦, 记作 $\sin \alpha$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$;

$\frac{x}{r}$ 叫做角 α 的余弦, 记作 $\cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$;

$\frac{y}{x}$ 叫做角 α 的正切, 记作 $\tan \alpha$, $\tan \alpha = \frac{y}{x}$;

$\frac{x}{y}$ 叫做角 α 的余切, 记作 $\cot \alpha$, $\cot \alpha = \frac{x}{y}$;

$\frac{r}{x}$ 叫做角 α 的正割, 记作 $\sec \alpha$, $\sec \alpha = \frac{r}{x}$;

$\frac{r}{y}$ 叫做角 α 的余割, 记作 $\csc \alpha$, $\csc \alpha = \frac{r}{y}$.

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割这六个函数统称为三角函数.

2. 三角函数的定义域

结合三角函数的定义, 抓住分母等于零比值无意义这一关键, 可以得到三角函数的定义域如表 3-1 所示.

表 3-1

三角函数	定 义	定 义 域
$\sin \alpha, \cos \alpha$	$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}$	$\mathbf{R}$
$\tan \alpha, \sec \alpha$	$\tan \alpha = \frac{y}{x}, \sec \alpha = \frac{r}{x}$	$\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
$\cot \alpha, \csc \alpha$	$\cot \alpha = \frac{x}{y}, \csc \alpha = \frac{r}{y}$	$\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

3. 三角函数值在各象限的符号

结合三角函数的定义, 得三角函数值在各象限的符号如图 3-1 所示.