高职高专“十一五”规划教材

高等数学

下册

李先记 主编
于红霞 副主编

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高等数学

下册

李先记　主编
于红霞　副主编

化学工业出版社
·北京·

本书是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写的。

本书根据高职高专数学“拓宽基础、强化能力、立足应用”的特点，淡化数学理论，对一些较繁琐的定理、公式及明显的结论，或者只给出结论，或者以几何直观予以说明；书中所选例题、习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，没有单纯性的技巧和难度较大的习题，增加了富有启发性、应用型、为专业服务的题目，说理浅显，便于自学。全书共十一章，分上、下两册，下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、曲线积分、无穷级数。

本书可作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育工科类各专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/李先记主编．—北京：化学工业出版社，2008.4
高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-02460-2

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 040403 号

责任编辑：蔡洪伟 于 卉　　文字编辑：高 霞
责任校对：陶燕华　　装帧设计：史利平

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm 1/16 印张 8¾ 字数 216 千字 2008 年 6 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：16.00 元

目 录

本章导读

向量代数在以后的数学学习特别是工程技术中应用广泛．本章首先介绍三阶行列式，然后建立空间直角坐标系，引进向量的概念以及两种表示法下向量的代数运算，最后以向量为工具对空间解析几何进行研究．

用代数方法研究几何问题是数学的基本方法之一，初等数学中同学们已经学过的平面解析几何就是用代数方研究平面几何问题．本章学习的空间解析几何是以空间向量为工具，用空间向量的代数运算来对空间图形进行研究．空间解析几何除了在工程技术上有着比较广泛的应用之外，还在研究多元函数微分学时提供直观的几何解释．为此在研究多元函数微分学之前，首先要了解空间解析几何的有关知识．

第七章　向量代数与空间解析几何

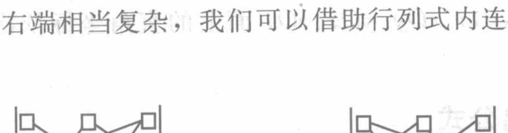
第一节　空间直角坐标系和向量的基本知识

一、空间直角坐标系

1. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

等式左端叫做三阶行列式，等式右端是它的值．行列式中每一个字母叫做元素，横排叫做行，竖排叫做列．等式右端相当复杂，我们可以借助行列式内连线得出它的计算法则（通常叫做对角线法则）：



+　　　　　　　　−

行列式中从左上角到右下角的线段叫做**主对角线**，从右上角到左下角的线段叫做**次对角线**．主对角线上的元素的乘积，以及位于主对角线的平行线上的元素与对角上元素的乘积，前面都取正号；次对角线上元素的乘积，以及位于次对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积，前面都取负号．

例 1 求行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 的值．

解 $$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5\times1\times0+0\times2\times1+3\times2\times6+0\times2\times1-6\times1\times1-3\times0\times0-2\times2\times5$$
$$=10.$$

2. 空间直角坐标系

过空间一定点 O 作以 O 为原点的三条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，且取相同的长度单位，该三条数轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）．都叫做坐标轴．这样，三条数轴就组成了一个空间直角坐标系．定点 O 叫做坐标原点．

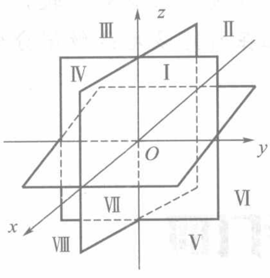


图 7-1

空间直角坐标系的各轴正向之间的顺序通常按左手法则或右手法则来确定，本书均采用右手法则．即当 x 轴正向按右手握拳方向以 $\pi/2$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的指向．

坐标轴确定的平面有三个，分别是 xOy、yOz、zOx 平面，统称之为坐标面．它们把整个空间分成 8 个部分，每一个部分叫做一个**卦限**．位于 xOy 坐标面的第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限上方部分沿逆时针方向依次叫做第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；而位于其下方部分沿逆时针方向依次叫做第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限．如图 7-1 所示．

当空间直角坐标系取定后，空间的点与有序实数组 (x,y,z) 之间就可建立起对应关系．过空间一点 M 分别作三个与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，分别交三个坐标轴于点 A、B、C，对应的三个实数分别为 x、y、z（图 7-2）．则点 M 确定了唯一一个有序实数组 (x,y,z)；反之，如果给定一个有序实数组 (x,y,z)，依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取与 x、y、z 相应的点 A、B、C，然后过 A、B、C 作三个分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，三个平面交空间一点 M，则有序实数组 (x,y,z) 与空间的点 M 一一对应．这个有序实数组 (x,y,z) 叫做点 M 的**直角坐标**，依次称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记作 $M(x,y,z)$.

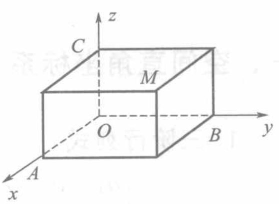


图 7-2

已知，原点的直角坐标为 $(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上的点的直角坐标依次是 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；xOy、yOz、zOx 面上的直角坐标依次是 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

二、空间两点间的距离公式

已知 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，求它们之间的距离 $d=|M_1M_2|$．过 M_1、M_2 分别作三个垂直于坐标轴的平面（三角形 M_1BM_2 和三角形 M_1AB 都是直角三角形），形成如图 7-3 所示的长方体．则

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 \\ &= |M_1B|^2+|BM_2|^2 \\ &= |M_1A|^2+|AB|^2+|BM_2|^2 \\ &= |M_1'A'|^2+|A'M_2'|^2+|BM_2|^2 \end{aligned}$$

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

因此

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (7\text{-}1)$$

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (7\text{-}2)$$

例 2　求两点 $A(1,-2,3)$，$B(2,1,-4)$ 间的距离．

解　由公式(7-1) 得

$$|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(-2-1)^2+(3+4)^2}=\sqrt{59}.$$

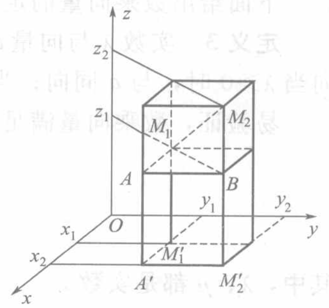


图 7-3

三、向量的概念及线性运算

在物理学中，经常会遇到有大小且有方向的量，如位移、速度、力等都是具有此特征的量，为叙述方便，我们引入如下定义．

定义 1　既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**，上述的位移、速度、力等都是向量．

图 7-4

在几何上我们用有向线段表示向量．起点为 A、终点为 B 的有向线段表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$(图 7-4)，印刷体用黑体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}\cdots$；为与数量区别起见，手写体必须在表示向量的字母上方加箭头，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}\cdots$．

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做该向量的长度或模，记作 $|\boldsymbol{a}|$．长度为 1 的向量叫做单位向量，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^\circ$．易知

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ \text{或}\ \boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

长度为零的向量叫做零向量，记作 0，其方向不确定．同向且等长的向量叫做相等向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，即把 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移后会完全重合．允许平行移动的向量称为自由向量，本书所讨论的向量均为自由向量．

定义 2　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这是向量加法的三角形法则．

若以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 首尾相连作平行四边形，则其从 $\boldsymbol{a}$ 的起点指向 $\boldsymbol{b}$ 终点的对角线所表示的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**．

从图 7-5 和图 7-6 可以看出：向量的加法满足如下两条运算律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad \text{（交换律）},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \text{（结合律）}.$$

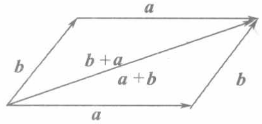


图 7-5

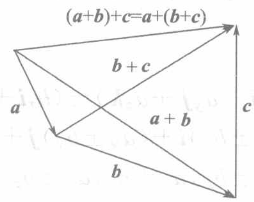


图 7-6

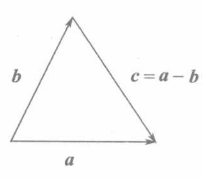


图 7-7

若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 7-7).

下面给出数乘向量的定义．

定义 3 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$，仍是一个向量，它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向．若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=0$ 时，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=0$.

易验证，数乘向量满足如下运算律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a},$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

其中，λ、μ 都是实数．

至此，我们已介绍了向量的加法、减法和数乘向量，它们的综合运算叫做向量的线性运算．

四、向量的坐标表示法

向量的运算仅靠几何方法来研究很不方便，所以需要用代数方法来对向量进行运算．下面首先介绍向量的坐标表示法．

在空间直角坐标系内，设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量，叫做基本单位向量．

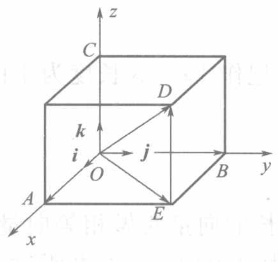


图 7-8

现有向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与坐标原点 O 重合，终点为 $D(x,y,z)$．过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 $D(x,y,z)$ 分别作三个垂直于坐标轴的平面，垂足分别为 A、B、C(图 7-8)，则点 A 在 x 轴的坐标为 x，所以向量 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$；同理，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$.

于是

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

把 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，记作

$$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}.$$

这里 x、y、z 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．

若记

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\},$$

则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

事实上

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\\&=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}.\end{aligned}$$

例 3　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$（图 7-9），求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表示式．

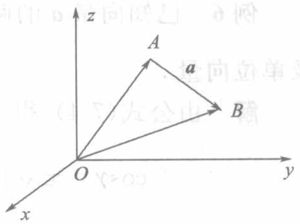


图 7-9

解　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$

$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$

$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

注意：上述结论可作为公式使用．即向量的坐标等于终点与起点的对应坐标之差．

例 4　已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,-3\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,-1,4\}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{1+2,-2-1,-3+4\}=\{3,-3,1\}$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{1-2,-2+1,-3-4\}=\{-1,-1,-7\}$，

$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\{2,-4,-6\}+\{6,-3,12\}=\{8,-7,6\}$.

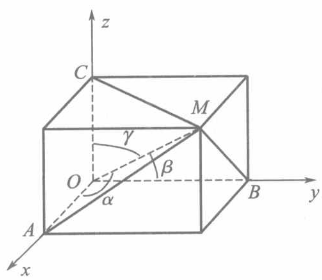


图 7-10

模和方向确定了向量．已知向量 $\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq0$）的坐标为（a_x,a_y,a_z），则它的模和方向也可以用坐标来表示．

把 $\boldsymbol{a}$ 的起点与坐标原点重合（图 7-10），则它的终点 $M(a_x,a_y,a_z)$，易知

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}. \tag{7-3}$$

显然，向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可以由它与三坐标轴的正向夹角 α、β、$\gamma(0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$（称为方向角），或 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$（称为方向余弦）来表示．

在直角三角形 OAM、直角三角形 OBM、直角三角形 OCM 中，有

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

易知

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

这里，若 $|\boldsymbol{a}|=1$，则

$$\cos\alpha=a_x,\cos\beta=a_y,\cos\gamma=a_z.$$

所以，单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

例 5　已知 $M_1(2,-1,3)$、$M_2(1,-1,2)$，求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模和方向余弦．

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,-1-(-1),2-3\}=\{-1,0,-1\}$，

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\beta=\frac{0}{\sqrt{2}}=0,\ \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 6 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦是 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，$\cos\beta=-\frac{2}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=12$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标及单位向量.

解 由公式(7-4)得

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\pm\frac{2}{3},$$

所以

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=12\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-4,$$

$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=12\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-8,$$

$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=12\times\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\pm 8.$$

$\boldsymbol{a}=\{-4,-8,8\}$ 或 $\boldsymbol{a}=\{-4,-8,-8\}$.

单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ=\left\{-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3}\right\}$.

习题 7-1

1. 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 5\\7 & 6 & 8\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}7 & -6 & 3\\2 & 0 & 1\\4 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

2. 在空间直角坐标系中作出点 $A(1,3,2)$、$B(2,1,-3)$，并写出：

(1) 关于各坐标轴的对称点的坐标；

(2) 关于原点的对称点的坐标；

(3) 关于各坐标面的对称点的坐标.

3. 已知点 $P(3,-2,4)$，求它到

(1) 坐标原点的距离，

(2) 各坐标轴的距离，

(3) 各坐标面的距离.

4. 已知点 $A(8,2,18)$、$B(20,-2,12)$、$C(4,8,6)$ 为三角形的三个顶点，求证三角形 ABC 是直角三角形.

5. 已知四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 O，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$.

6. 用向量法证明三角形的中位线定理.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{2,3,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,2,1\}$，$\boldsymbol{c}=\{2,-1,-2\}$，求

(1) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$；　(2) $k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$.

8. 已知(1)$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$；(2)$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 求它们的模、方向余弦及与它们同方向的单位向量.

9. 已知三点 $A(1,2,3)$、$B(4,-3,5)$、$C(2,-1,7)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$ 的坐标，并验证 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$.

10. 已知 α、β、γ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，且 $\beta=\alpha$，$\gamma=2\alpha$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

第二节　向量的数量积与向量积

一、向量的数量积

1. 向量的数量积的定义及其性质

设有非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，使它们的起点重合，两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或 $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$（图 7-11），规定

$$0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180°.$$

定义 1　$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影［图 7-12(a)］；$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$ 叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影［图 7-12(b)］.

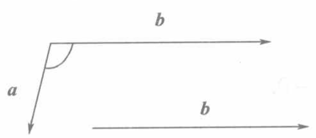
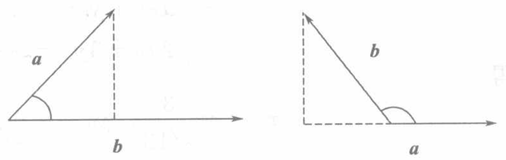


图 7-11



(a)　(b)

图 7-12

定义 2　$\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的乘积叫做向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积或点积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle. \tag{7-5}$$

易验证，数量积满足如下运算律：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\text{（交换律）},$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})\text{（结合律）},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\text{（分配律）}.$$

由数量积的定义可知，它有如下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

该性质的证明留给读者思考.

由这个结论可得

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

2. 数量积的坐标计算式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，利用数量积的运算规律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

即　$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{7-6}$$

由此可知，两向量的数量积等于它们相应坐标乘积之和.

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ 均为非零向量，则由数量积的定义可得

$$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}. \tag{7-7}$$

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$、$\cos\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$．

解 由公式(7-3)、公式(7-6) 和公式(7-7) 得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\{2,-1,0\}\cdot\{1,0,2\}=2+0+0=2,$$

$$\cos\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+2^2}}=\frac{2}{5}.$$

例 2 在 xOy 坐标面上，求一单位向量与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直．

解 设所求向量为 $\boldsymbol{b}=\{x_0,y_0,z_0\}$，由于它在 xOy 坐标面上，所以 $z_0=0$；又因为 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量，所以 $|\boldsymbol{b}|=1$；又因为 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 所以

$$\begin{cases}z_0=0,\\ x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=1,\\ 2x_0+3y_0-z_0=0.\end{cases}$$

解之得

$$x_0=\pm\frac{3}{\sqrt{13}},\ y_0=\mp\frac{2}{\sqrt{13}},\ z_0=0.$$

所以

$$\boldsymbol{b}=\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}\ \text{或}\ \boldsymbol{b}=-\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}.$$

二、两向量的向量积

1. 向量积的定义及其性质

设轴 L 上 P 点受的作用力为 $\boldsymbol{F}$，轴 L 的支点为 O，θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角［图 7-13(a)］. 由物理学知识可知，力矩 $\boldsymbol{M}$ 也是一个向量．力的大小与力臂的乘积就是力矩 $\boldsymbol{M}$ 的模，即

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

其方向垂直于 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 所在的平面，它的指向按右手法则确定，即当右手四指以小于 π 的角度从 $\overrightarrow{OP}$ 到 F 方向握拳时，大拇指伸直所指的方向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向［图 7-13(b)］.

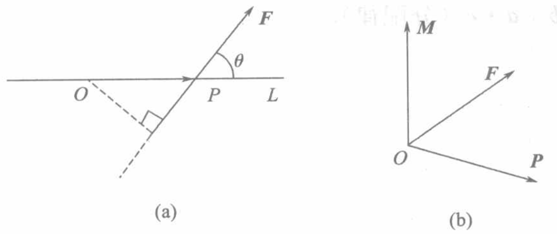


图 7-13

为了说明此类问题，我们给出两个向量的向量积概念．

定义 3 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果向量 $\boldsymbol{c}$ 满足：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\sin\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$;

(2) $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，其正方向由右手法则确定．

那么向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

因此向量积也叫做叉乘积．于是上述力矩 $\boldsymbol{M}$ 也可以表示为

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}.$$

由向量积的定义可知，其几何意义是：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积（图 7-14）.

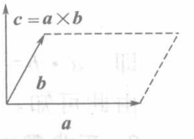


图 7-14

向量积满足下列运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

由向量积的定义可知：

(1) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$；

(2) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$；

(3) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq0,\ \boldsymbol{b}\neq0)\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

这几个等式与运算律的证明留给读者自己思考.

2. **向量积的坐标计算式**

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则由向量积的运算律可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+\\&\quad a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

我们采用行列式记号来对上式进行记忆，把上式表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}. \tag{7-8}$$

因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，所以，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件又可以表示为

$$a_yb_z-a_zb_y=0,a_zb_x-a_xb_z=0,a_xb_y-a_yb_x=0, \tag{7-9}$$

即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ （其中\ b_xb_yb_z\neq0）. \tag{7-10}$$

当 b_x、b_y、b_z 中出现零时，我们仍用式(7-10)表示，但应理解为相应分子也为零，例如，$\frac{a_x}{0}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ 应理解为 $a_x=0$，$\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$. 利用式(7-10)可以很方便地判断两向量是否平行.

例 3　已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　由公式(7-8)得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}.$$

例 4　已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}=\{3,4,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,3,1\}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{c}$ 上的单位向量 $\boldsymbol{c}^\circ$.

解　因为 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，所以，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，从而有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&4&2\\2&3&1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

因此，$\boldsymbol{c}$ 上的单位向量有两个，即

$$\boldsymbol{c}^\circ=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$$

例 5 已知三点 $A(1,-1,0)$、$B(-2,0,2)$、$C(2,2,3)$. 求以 A、B、C 为顶点的三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义可知，三角形 ABC 的面积

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

因为$\overrightarrow{AB}=\{-3,1,2\}$,$\overrightarrow{AC}=\{1,3,3\}$,所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}.$$

从而

$$S=\frac{1}{2}|-3\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+11^2+(-10)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{230}.$$

习题 7-2

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$. 求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(3) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. 求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(3) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}+18\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$. 求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. 求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求证 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

6. 设力 $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 作用在一质点上，质点由 $A(1,2,-1)$沿直线移动到 $B(3,1,2)$,求：

(1) 力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功；

(2) 力 $\boldsymbol{F}$ 与位移$\overrightarrow{AB}$的夹角的余弦.

7. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 求 $\boldsymbol{a}$.

8. 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

9. 已知 $\boldsymbol{a}=\{1,2,-1\}$,$\boldsymbol{b}=\{0,-1,1\}$. 求同时与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直的单位向量.

10. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，求与 $\boldsymbol{a}$ 和 x 轴垂直的单位向量.

11. 已知三点 $A(3,4,1)$、$B(2,3,0)$、$C(3,5,1)$，求以 A、B、C 为顶点的三角形的面积.

第三节　平面的方程

一、平面的点法式方程

如果一个非零向量垂直于一个平面，则该向量称为平面的法向量．显然，一个平面的法向量有无数个，它们都垂直于平面内的任意向量．由立体几何知识知道，已知空间一点和一直线，那么过该点且和直线垂直的平面有唯一一个．

下面我们用这个结论来建立平面的方程．

设平面 α 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$（图 7-15），下面来建立平面 α 的方程．

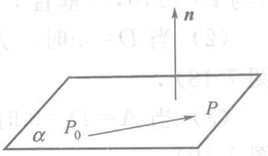


图 7-15

设点 $P(x,y,z)$ 是平面 α 内任一点，则点 P 在平面 α 上的充要条件是 $\overrightarrow{P_0P}\perp\boldsymbol{n}$，即 $\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

由于 $\overrightarrow{P_0P}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$，$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，所以

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{7-11}$$

该方程即为平面 α 的点法式方程．

例 1　已知点 $P_0(3,2,2)$ 和 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求过 P_0 且和 $\boldsymbol{a}$ 垂直的平面方程．

解　显然，我们可以取 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 作为所求平面的法向量，由于平面过点 $P_0(3,2,2)$，所以由式(7-11) 可得该平面的方程为

$$2(x-3)+(y-2)+2(z-2)=0,$$

即

$$2x+y+2z-12=0.$$

例 2　求过点 $A(2,1,-1)$、$B(1,3,2)$ 且和平面 $2x-y+3z-1=0$ 垂直的平面方程（图 7-16）.

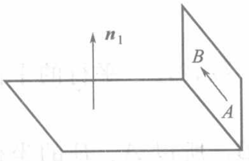


图 7-16

解　由已知条件可知，向量 $\overrightarrow{AB}=\{-1,2,3\}$ 在所求平面上，而已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(2,-1,3)$，所以可取所求平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=9\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

因为该平面过点 $A(2,1,-1)$，所以由平面的点法式方程式(7-11) 可知所求平面的方程为

$$9(x-2)+9(y-1)-3(z+1)=0,$$

即

$$3x+3y-z-10=0.$$

二、平面的一般方程

把平面的点法式方程式(7-11) 展开，得

$$Ax+By+CZ-Ax_0-By_0-Cz_0=0.$$

令 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$，则该方程为

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{7-12}$$

这是关于 x,y,z 的三元一次方程，所以平面可用关于 x,y,z 的三元一次方程来表示；反之，是否任意的关于 x,y,z 的三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都表示平面呢（其中 A,B,C 不全为零）？假设 x_0、y_0、z_0 是方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的一组解，则得

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

用式(7-12) 减去上式得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

这就是方程式(7-11)，它表示过点 (x_0,y_0,z_0)，且法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 的平面．
所以，关于 x,y,z 的三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都表示平面．式(7-12) 称为平面的一般方程．

下面我们来讨论方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的一些特殊情况．

(1) 当 $A=0$ 时，方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 变为 $By+Cz+D=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=\{0,B,$

$C\}$与$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$垂直．因此，该平面与x轴平行（图 7-17）．

（2）当$D=0$时，方程$Ax+By+Cz+D=0$变为$Ax+By+Cz=0$．易知平面过原点（图 7-18）．

（3）当$A=D=0$时，方程$Ax+By+Cz+D=0$变为$By+Cz=0$．显然，平面通过x轴（图 7-19）．

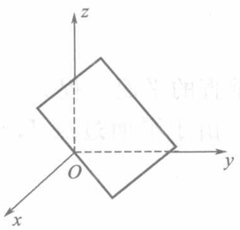


图 7-17

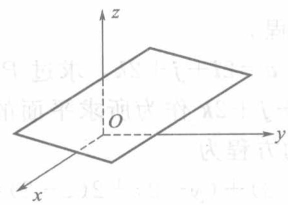


图 7-18

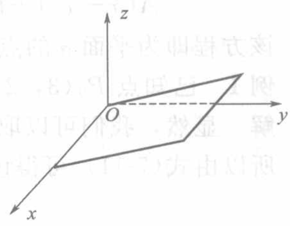


图 7-19

其他情况留给读者自己讨论．

例 3 已知点$A(2,0,-4)$、$B(2,4,4)$，求过点A，B且与向量$\boldsymbol{a}=\{2,2,2\}$平行的平面方程．

解 设所求平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$．因为平面过点A、B，所以A、B的坐标满足方程，从而有

$$2A-4C+D=0,$$
$$2A+4B+4C+D=0.$$

又因为所求平面与向量$\boldsymbol{a}$平行，所以它的法向量与$\boldsymbol{a}$垂直．因此

$$2A+2B+2C=0.$$

联立方程组解得

$$A=\frac{1}{2}D,\ B=-D,\ C=\frac{1}{2}D.$$

因此有

$$\frac{1}{2}Dx-Dy+\frac{1}{2}Dz+D=0,$$

消去D，得

$$x-2y+z+2=0,$$

即为所求平面方程．

例 4 求通过点$P(2,-1,-3)$和x轴的平面方程．

解 由于所求平面过x轴，故可设它的方程是

$$By+Cz=0$$

因为平面又通过点P，所以点P的坐标满足方程，所以

$$-B-3C=0.$$

解得$B=-3C$，将其代入$By+Cz=0$并化简得

$$3y-z=0,$$

即为所求平面方程．

三、两平面的夹角

设两平面α_1、α_2的方程分别为