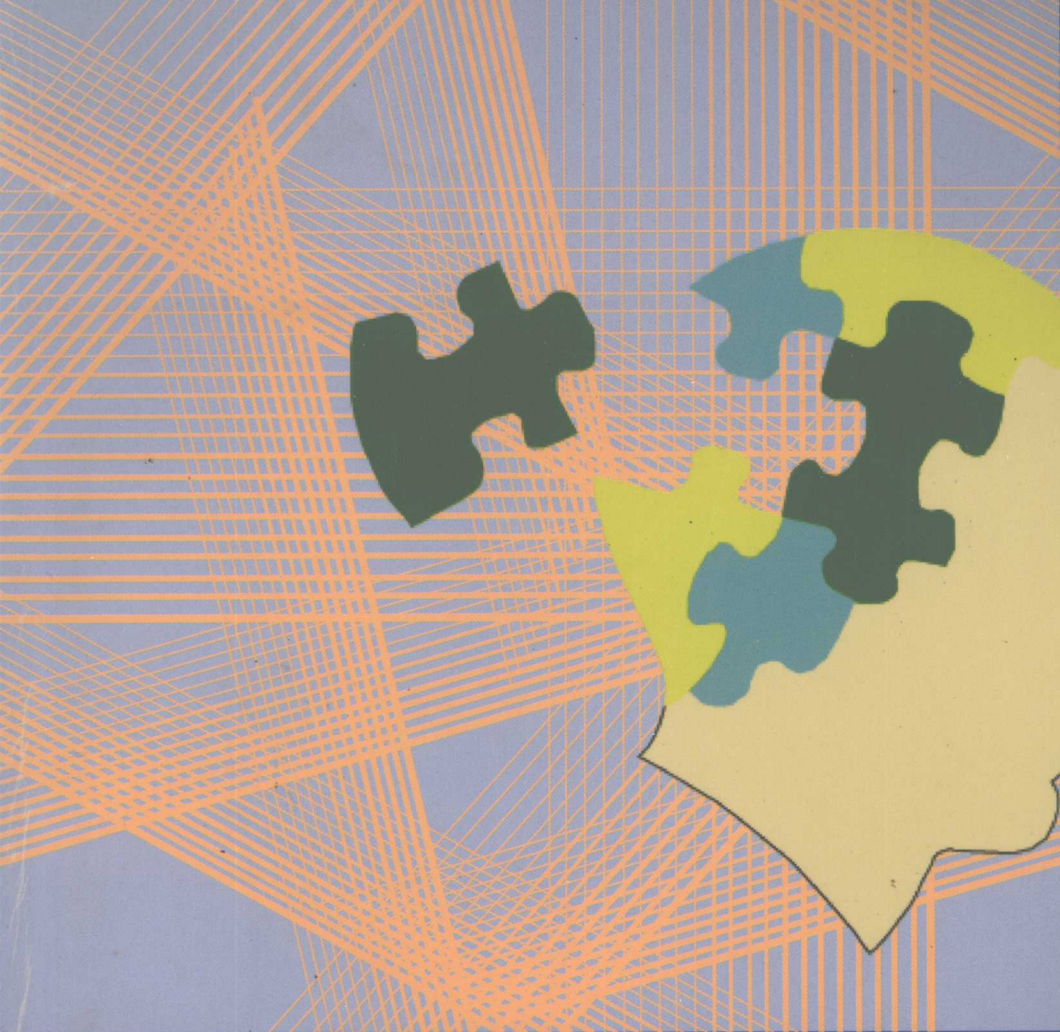
高等职业技术教育通用教材



GAODENGSHUXUE

高等数学

主编　李广全

副主编　林漪

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业技术教育通用教材

高等数学

主　编　李广全
副主编　林　漪

天津大学出版社
Tianjin University Press

内容提要

本书汲取了全国高等职业技术教育数学教学改革的经验，突出以应用为目的，必需、够用为度的原则，参照高等工科专科学校《高等数学教学基本要求》组织编写的通用教材。内容包括：函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、拉氏变换、多元函数微积分、级数、概率、数学实验。在附录中设有矩阵与计算器应用。教材配有与各章同步的练习册。

本书可作为高等职业技术教育各专业的教材，也可作为成人高等职业教育的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李广全主编.—天津：天津大学出版社，2004.9

ISBN 7-5618-2023-2

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087574 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm × 260mm
印　　张 23.25
字　　数 722 千
版　　次 2004 年 9 月第 1 版
印　　次 2004 年 9 月第 1 次
印　　数 1 － 4 000
定　　价 29.00 元(附练习册)

前　言

高职教育是以培养生产第一线或工作现场的技术型人才为目的的高等教育。《高等数学》课程是高职教育中的一门重要的基础课程。职业技术教育的性质,决定了《高等数学》要以能力为本位,紧密结合专业特点,适应专业的需要。因此,不能完全依照普通大学数学课程的模式来安排高职教育中的《高等数学》课程。通过多年的教学实践,针对目前高职院校学生水平差异较大及不同专业对《高等数学》课程内容的需求存在差异的现状,我们把《高等数学》课程的内容进行筛选、重组和整合,并进行整体优化,编写了这本《高等数学》教材。

本教材具有以下特点:

1.注重基础,具有较强的弹性

教材注重从实际问题引入基本概念,并强化基本计算能力和应用数学知识解决实际问题能力的培养。在内容的选取上依照"必需、够用"的原则,并且考虑到不同的专业对数学需要程度上的差异及不同数学基础的学生对《高等数学》课程的不同需求,在内容的选取上具有较强的弹性:一方面,利用前四章及第6、7章内容构成公用基础教学平台,前四章为基本要求,后面两章为较高要求,而把第5章作为工科专业解微分方程的工具,放在微分方程之后,有利于能力的强化,各专业可以根据不同需要而灵活决定教学内容;另一方面,通过小字排版及标注"*"号来区分知识的难度和深度,这样做有利于实施因材施教的分层次个性教学,有利于满足全体学生的需要。

2.语言通俗易懂

结合高职学生认知的水平和各种不同的职业岗位对人才的实际需要,在语言描述上淡化形式化的数学语言,而采用数形结合的手段,对数学概念和定理,加强定性的描述和利用通俗语言的说明。在例题及习题的选编上,淡化抽象函数的有关讨论,不选"偏、难、怪"题,注重计算能力、数学方法和数学思维的培养。

3.突出职业教育的特征

在课程内容上,我们尽力处理好知识和能力的关系,突出数学思想和数学方法的教育。重要的数学思想和方法,在不同的知识层面上反复循环,以使学生真正掌握;突出计算能力和数学建模能力的培养。贯彻以学生为本的教育思想,从学生的实际水平出发,以"分层次逐步培养学生的能力"为主线,以保持与专业课程同步设置为原则,精心设计、认真编排。

4.注重与高中阶段知识的衔接

教材在数学符号的应用、概念的表述与延伸、方法的应用等诸方面,充分考虑到目前高中阶段的数学教育的现状,特别是中等职业教育的现状,注意做好各方面的衔接。并且应用分层次的手段,来弥合普通高中与中等职业学校在数学教育上的差异。

5.加强知识内容的更新,跟上时代的发展

针对科学技术的迅猛发展,我们在内容的选取上做了适度的更新,吸取新的科技成果。教材尽量做好与计算机(器)使用的整合。教材上安排数学实验一章介绍数学软件"mathematica",并在附录中介绍计算器在高等数学中的应用,注意到数学软件与各章教学内容的衔接和融合。

6.配备配套同步练习册

为了强化训练形成学生的数学能力,除了在教材中安排适当的习题外,我们为各专业的共性基础教育平台的内容配备了同步练习册。同步练习册采用与教材同步的章节强化训练的模式编写,每两节课为一个练习,每个练习安排选择题、填空题和解答题,并利用“*”号标清难度层次,满足全体学生不同层次的需要。习题配有答案可以及时反馈信息,有利于学生自学能力的培养和个性的发展。

7.严格执行有关的国家标准

本书适用于高职院校的各专业《高等数学》课程的教学,也可以作为成人高职院校的教学用书或教学参考书。完成本课程的公用基础教学平台内容约需130课时。

本书主编李广全,副主编林漪。参加本书编写的有王仲翔(第1章)、李广全(第2章)、王萍(第3章)、陈钢(第4章)、张丽珠(第5章)、周建华(第6章)、刘振莉(第7章)、林漪(第8章、附录1)、肖满红(第9章、附录2)。王虹、张兰青二位同志为本书的编写做了大量的工作。

天津财经大学鹿立江教授对本书进行了详细的审查,并提出了很多宝贵意见。在此表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中,得到了天津大学出版社和天津机电职业技术学院各级领导及有关部门的大力帮助,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,虽经精心编写和校对,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编者

2004年7月20日

目　　录

第 1 章　函数与极限

《高等数学》课程的重要内容之一是函数的微积分及其应用，而极限是学习微积分的重要工具．本章将在中学数学的基础上，对函数的概念做进一步阐述，讨论函数的极限，并介绍函数的连续性概念．

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念与分类

1　函数的概念

引例　(1)圆的周长 s 与半径 r 之间的关系由 $s=2\pi r$ 表示，这里 s 与 r 是两个相互依存(依赖)的变量．

(2)在本市内投寄平信，每封信不超过 20 g 时，应付邮费 0.60 元；超过 20 g 而不超过 40 g 时，应付邮费 1.20 元；依此类推，每封信的重量不得超过 60 g，则邮费 y(单位：元)与每封信的重量 x(单位：克)之间的关系可用式子

$$y=\begin{cases}0.60, & 0<x\leqslant 20,\\ 1.20, & 20<x\leqslant 40,\\ 1.80, & 40<x\leqslant 60\end{cases}$$

表示．显然，这里的 x 与 y 也是两个相互依赖的变量．

通常在某些事物的发展或现象的发生过程中，总能找到两个或两个以上相互依赖同时又相互制约的变量，这些变量的变化遵循着某种规律，使得变量间形成某种对应关系．

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集．若对任意的 $x\in D$，变量 y 总有确定的数值与之对应，则 y 叫做 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$．其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，f 叫做 x 与 y 之间的对应规则(也叫依赖关系)，数集 D 叫做**函数 $y=f(x)$ 的定义域**．

当 $x=x_0$ 时，与之对应的 y 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．

当 x 取遍 D 内所有数值时，与之对应的 y 值的集合叫做函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 M，即

$$M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

例 1.1　设函数 $f(x)=2x-3$，求 $f(a^2)$，$f[f(a)]$，$[f(a)]^2$．

解　$f(a^2)=2a^2-3$，

$$f[f(a)]=f(2a-3)=2(2a-3)-3=4a-9,$$

$$[f(a)]^2=(2a-3)^2=4a^2-12a+9.$$

由函数的定义可知，函数的定义域是自变量 x 的取值范围，一般是使函数表达式 $f(x)$ 有意义的 x 值的集合．

例 1.2 求函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg\frac{1}{x-1}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,自变量 x 必须同时满足以下条件:

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \frac{1}{x-1}>0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x>1,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

解不等式组得 $1<x\leqslant 2$.所以函数的定义域为$(1,2]$.

如果对于任意的 $x\in D$,与之对应的 y 值只有一个,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数.例如,$y=2x$ 是单值函数;而由 $x^2+y^2=1$ 可推出 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$是多值函数.以下只要没有特殊说明,本书所讨论的函数都是单值函数.

2 函数的表示法

函数的对应规则是连接 x 与 y 的纽带,当对应法则用表格给出时,叫做**表格法**;当对应法则用图形给出时,叫做**图像法**;当对应法则用解析式给出时,叫做**解析法**.

当我们用解析法表示函数时,经常会遇到下面几种情况.

(1)对于任意的 $x\in D$,因变量 y 恒为一常数.这种函数叫做**常数函数**,记作 $y=c$(c 为任意常数),例如 $y=-2$.

(2)当函数的对应法则由一个解析式表示时,这种函数叫做**显函数**,记作 $y=f(x)$.例如,

$$y=2x^2+1,\quad y=\sin x.$$

(3)当函数的对应法则由方程 $F(x,y)=0$ 所确定时,这种函数叫做**隐函数**.例如,

$$\mathrm{e}^{xy}-y=0,\quad 2xy=\ln y.$$

(4)当函数的对应法则是由几个不同的解析式表达时,这种函数叫做**分段函数**.例如,

$$f(z)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

注意分段函数是一个函数,如上例不能说成"是三个函数".它表示当自变量 x 在定义域 D 的不同范围内取值时,因变量 y 与 x 之间对应的规则不同.分段函数的定义域为各段定义域之和.

(5)当 x 与 y 之间是通过第三个变量来建立对应规则时,这种函数叫做**由参数方程表示的函数**,或称**参数式函数**,其中第三个变量叫做参变量.例如,$\begin{cases}x=t,\\ y=t^2+1.\end{cases}$

3 函数的两个要素

定义域和对应规则叫做函数的两个要素.如果两个函数的定义域相同且对应规则相同,则这两个函数为同一函数.

例 1.3 判定函数 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 是否为同一函数.

解 因为函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,函数 $g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$,所以 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 不是同一函数.

如果将 $f(x)$的定义域限制在$(0,+\infty)$内,则 $f(x)$与 $g(x)$为同一函数.

1.1.2 函数的性质

1 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在常数 $M>0$，使得对于任意的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则 $y=f(x)$ 叫做在数集 X 上的**有界函数**；若这样的 M 不存在，则 $y=f(x)$ 叫做在数集 X 上的**无界函数**.

注意 函数 $y=f(x)$ 是否有界与函数的定义域有关.例如，$y=x^2$ 在数集 $(0,1)$ 内为有界函数，而在 $(0,+\infty)$ 内是无界函数.因此，在讨论函数的有界性时，必须指明讨论的范围.

2 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于 I 内任意的 $x_1<x_2$.

(1)若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上是单调增加的，区间 I 叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间**.单调增加函数的图像随自变量在 I 内的增大而自左向右上升，即自变量越大，对应的函数值越大.

(2)若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上是单调减少的，区间 I 叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调减少区间**.单调减少函数的图像随自变量在 I 内的增大而自左向右下降，即自变量越大，对应的函数值越小

在 I 上的单调增加函数或单调减少函数统称为 I 上的**单调函数**.

注意 函数 $y=f(x)$ 的单调性与区间有关.例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 是单调减少函数，在 $[0,+\infty)$ 是单调增加函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

3 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即对于任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$.

(1)若恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**，其图像关于 y 轴对称.

(2)若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**，其图像关于原点对称.

例 1.4 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$； (2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$； (3) $f(x)=\sin x+\cos x$.

解 (1)因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 为偶函数.

(2)因为
$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

(3)因为 $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$，它既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以，$f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是偶函数，也不是奇函数.

4 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T>0$，使得对于任意的 $x\in D$，且 $x\pm T\in D$，恒有 $f(x\pm T)=f(x)$，则 $y=f(x)$ 叫做以 T 为周期的**周期函数**.显然，若 T 是 $f(x)$ 的周期，则

kT 也是$f(x)$的周期($k = \pm 1, \pm 2, \cdots$).通常所说的周期都是指函数的最小正周期.

例 1.5 求函数 $f(x) = \sin 2x$ 的周期.

解 设所求周期为 T,则必有 $f(x+T) = f(x)$,即

$$\sin 2(x+T) = \sin(2x+2T) = \sin 2x.$$

因为正弦 $\sin x$ 的周期为 2π,所以应有 $2T = 2\pi$.故 $T = \pi$.

函数 $y = \sin x$ 的图像如图 1-1 所示.一般地,函数 $\sin \omega x$ 与 $\cos \omega x$ 的周期可由公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 求得.

以 T 为周期的周期函数,在每个长度为 T 的区间$[nT, (n+1)T]$上的图像是相同的.

1.1.3 基本初等函数

定义 1.1.2 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

高中阶段的数学教材中,对指数函数、对数函数、三角函数及其性质与图像均已做过介绍.在此,我们着重介绍幂函数和反三角函数,同时对已学过的三种函数加以回顾.

1 **幂函数**

函数 $y = x^\alpha$(α 为任意实数)叫做**幂函数**.

常见的幂函数有 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}$ 等.

幂函数的定义域随 α 的取值不同而不同,但它们在$(0, +\infty)$内都有定义,且图像都经过点$(1,1)$.如图 1-2 所示.

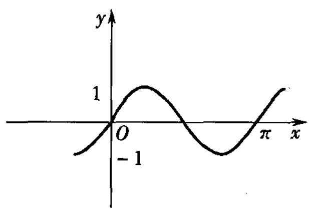


图 1-1

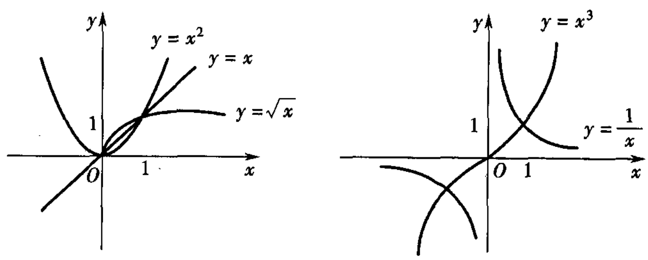


图 1-2

当 α 为正整数时,$y = x^\alpha$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$,且 α 为奇(偶)数时,x^α 为奇(偶)函数.

当 α 为负整数时,$y = x^\alpha$ 的定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

当 α 为分数时,情况较为复杂,要根据 x^α 的具体表达式而定.

当 α 为无理数时,规定 x^α 的定义域为$(0, +\infty)$,当 $\alpha > 0$ 时规定 x^α 的定义域为$[0, +\infty)$.

2 **指数函数**

函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$叫做**指数函数**.指数函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.其图像都经过点$(0,1)$,且函数值恒大于零.当 $a > 1$ 时,函数单调增加.当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少.其图像如图 1-3 所示.

3 **对数函数**

函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$叫做**对数函数**.对数函数与指数函数互为反函数,其定义域为

$(0,+\infty)$,图像都经过点$(1,0)$,特别当 $a=\mathrm{e}$,将 $\log_{\mathrm{e}} x$ 记为 $\ln x$,称为自然对数,其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$为无理数.对数函数的图像如图 1-4 所示.

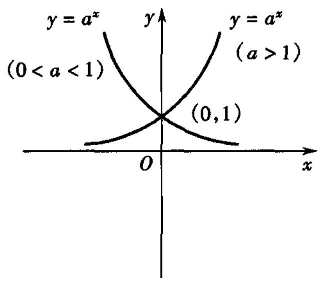


图 1-3

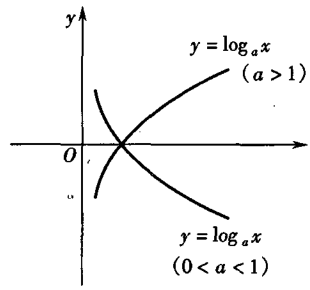
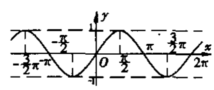
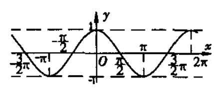
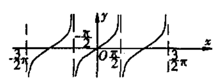
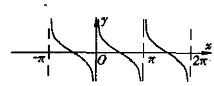


图 1-4

4 三角函数

常用三角函数的函数表达式及其图像与性质见表 1-1.

表 1-1

函　数	定 义 域	图　像	周期	有界性	奇偶性
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		2π	有界	奇
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		2π	有界	偶
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $n=0,\pm1,\pm2\cdots$		π	无界	奇
$y=\cot x$	$x\neq n\pi$ $n=0,\pm1,\pm2\cdots$		π	无界	奇

5 反三角函数

由于不同角的同名三角函数值有可能相等,即三角函数的依赖关系非"一一对应".为保证三角函数存在反函数,就需要改变三角函数的定义域,使之在所定义的区间上为单值函数,所以将反三角函数定义如下.

正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫做**反正弦函数**,记作 $y=\arcsin x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数叫做**反余弦函数**,记作 $y=\arccos x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$.

$y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上的反函数叫做**反正切函数**,记作 $y=\arctan x$,其定义域为

$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$上的反函数叫做**反余切函数**，记作 $y=\text{arccot } x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$.

根据互为反函数的两个函数图像间的关系，不难得到反三角函数的图像(图 1-5).熟练掌握基本初等函数的表达式、定义域、图像及其性质，对于学好后续课程极为有益.

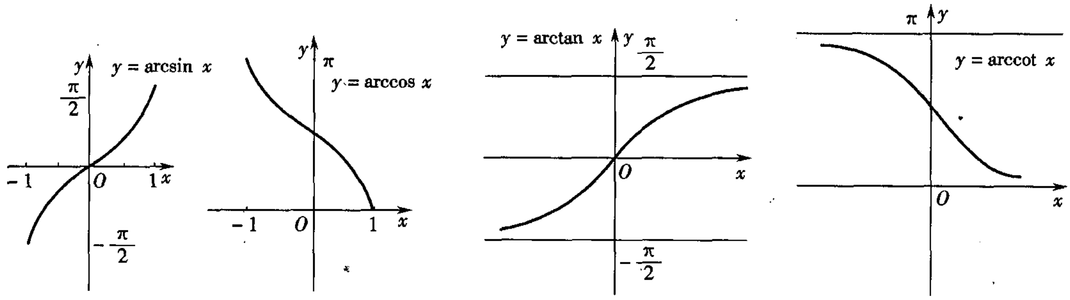


图 1-5

1.1.4 复合函数

观察函数 $y=\ln x^2$，显然它不是基本初等函数，但是，它是由基本初等函数 $y=\ln u$ 和 $u=x^2$ 通过中间媒介 u，使得 y 是 x 的函数，函数 $y=\ln x^2$ 叫做复合函数.

定义 1.1.3 设函数 $y=f(u)$是 u 的函数，$u=g(x)$是 x 的函数，如果由 x 所确定的 u 使得 y 有意义，则把 $y=f[g(x)]$叫做 x 的**复合函数**.其中 x 叫做自变量，u 叫做中间变量，f 叫做外层函数，g 叫做内层函数.

由定义不难得出如下结论.

(1)函数的复合是有条件的.

例如 设函数 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$，因为对于内层函数 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何 x 值，对应的 u 值都不小于 2，从而使得外层函数 $y=\text{arcccos } u$ 无意义，因此，形式上的复合函数 $y=\arccos(2+x^2)$是没有意义的.

事实上，两个函数可以进行复合的条件是，内层函数的值域与外层函数的定义域的交集必须是非空集合.要注意到，内层函数的定义域与复合函数的定义域是不一定相同的.

(2)函数的复合可以是多重复合.

例 1.5 设函数 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=2x$，试将 y 写成 x 的函数.

解 $y=\cos^2 v=\cos^2(2x)$.

此函数由三层函数复合而成.

外层：$y=u^2$——幂函数；

中层：$u=\cos v$——三角函数；

内层：$v=2x$——幂函数与常数的四则运算.

由上例可见，比较复杂的函数，可以看作是由几个简单函数复合而成的.这里所说的简单函数一般指基本初等函数或基本初等函数与常数的四则运算所构成的函数.正确地分析函数

的复合过程十分重要，必须掌握要领，分清层次，"由外向内"逐层复合.

例 1.6 指出下列函数的复合过程：

(1)$y=\sqrt{5+2x}$； (2)$y=e^{-x^2-1}$； (3)$y=\lg\sin^2 x$.

解 (1)函数 $y=\sqrt{5+2x}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=5+2x$ 复合而成的.

(2)函数 $y=e^{-x^2-1}$是由 $y=e^u$，$u=-x^2-1$ 复合而成的.

(3)函数 $y=\lg\sin^2 x$ 是由 $y=\lg u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成的.

初学者往往对分析函数的复合过程感到困难，不妨考虑下面的思路.

设复合函数 $y=f\{\varphi[g(x)]\}$，对于给定的 x 值，计算函数值的顺序是

(1)先计算内层函数值 $g(x)=v$；

(2)再计算中层函数值 $\varphi(v)=u$；

(3)最后计算外层函数值 $f(u)=y$.

即"由内向外"逐层计算，并且每一层都是计算一个简单函数的值.不难看出，函数的复合顺序恰好与计算函数值的顺序相反.

1.1.5 初等函数

1 初等函数的定义

定义 1.1.4 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的且可以用一个式子来表示的函数，叫做**初等函数**.

由定义可知，分段函数一般不是初等函数，但有些特殊的分段函数，例如，$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，因为它可以写成 $y=\sqrt{x^2}$的形式，所以它是初等函数；而函数 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$不是初等函数.

2 建立函数关系举例

利用数学方法解决实际问题时，通常需要我们找出该问题中存在的若干变量，科学准确地分析它们之间的相互关系，并根据实际需要，将这种关系用函数表示出来.

例 1.7 已知某物体与地面的摩擦系数为 μ，其重力为 P，设有一个与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动(如图 1-6 所示).求物体开始移动时，拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

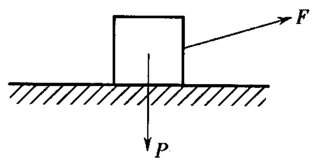


图 1-6

解 此物体对地面的压力为 $P-F\sin\alpha$，摩擦力为$(P-F\sin\alpha)\mu$，水平方向的拉力为 $F\cos\alpha$，当物体开始移动时，水平拉力与阻力相等，因此有

$$F\cos\alpha=(P-F\sin\alpha)\mu,$$

所以， $$F=\frac{P\mu}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

例 1.8 从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0(元).铁路部门的规定：1.1 m 以下的儿童免票；身高超过 1.1 m 但不足 1.4 m 的儿童购买半价票；身高超过 1.4 m 者购买全票.试写出从甲地到乙地的票价 q 与作为身高 s 的函数表达式.

解 依题意,票价 q(元)与身高 s(m)的函数关系可表示为

$$q=\begin{cases}0, & 0<s<1.1,\\ \frac{1}{2}q_0, & 1.1\leqslant s<1.4,\\ q_0, & s\geqslant 1.4.\end{cases}$$

习题 1-1

1.求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$; (2) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$; (3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$;

(4) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; (5) $y=\ln(x+2)+1$; (6) $y=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$

2.判断下列各题中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x)=1$; (2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$; (4) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$;

(5) $f(x)=|\cos x|$, $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$; (6) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=x+1$.

3.求函数值.

(1) $f(x)=\sqrt{3+x^2}$,求 $f(2)$,$f(0)$,$f(x_0)$,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$;

(2) $f(x)=1+x^2$,$g(x)=\sin 3x$,求 $f(t^2-1)$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$;

(3) $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ 2 & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1)$,$f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$;

(4) $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $f(0)$,$f(3)$,$f\{f[f(-0.5)]\}$.

4.判断函数的奇偶性.

(1) $y=x+\sin x$; (2) $y=x\cos x$; (3) $y=x(x-1)(x+1)$;

(4) $y=\sin x+\cos x$; (5) $y=x^4+4x^2-1$; (6) $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

5.求下列周期函数的周期.

(1) $y=\cos\dfrac{x}{2}$; (2) $y=\sin 2x$; (3) $y=\sin^2 x$; (4) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6.写出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^3(8x+5)$; (2) $y=\tan(\sqrt[3]{x^2+5})$; (3) $y=5(x+2)^2$;

(4) $y=\mathrm{e}^{1-x^2}$; (5) $y=\ln(3-x)$; (6) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$;

(7) $y=\ln\cos^2(3x+1)$; (8) $y=\log_5\cot^3(5x^2+7)$.

7.写出由下列函数复合而成的函数,并求其定义域.

(1) $y=\ln u$, $u=4-v^2$, $v=\cos x$; (2) $y=\sin u$, $u=x^3+4$;

(3) $y=5^u$, $u=\cot v$, $v=\dfrac{1}{x}$; (4) $y=\sqrt{u}$, $u=8x^3+1$.

8.将一个底半径为 2 cm,高为 10 cm 的圆锥形杯做成量杯,要在上面刻上表示容积的刻度.试写出溶液容积和与之对应的高度之间的函数关系.

9.要建造一个容积为 V 的长方体水池,它的底为正方形.如果水池底面的单位面积造价为侧面的 3 倍,试建立总造价与底面的边长之间的函数关系.

10.已知甲乙两地间铁路行李单程运费的计费标准规定:当行李重量不超过 50 kg 时,按基本运费 0.30 元/kg 收费;当超过 50 kg 时,超过的部分按 0.45 元/kg 收费.求行李费 y(元)与行李重量 x(kg)之间的函数关系.

1.2 极限的概念

极限理论是微积分学的基础理论,它形象地刻画了自变量在某一变化过程中,对应函数值的变化趋势,揭示了一些自然规律的奥秘,对数学的发展产生过极大的推动作用.

1.2.1 数列$\{x_n\}$的极限

早在公元前 3 世纪,我国的庄子就有"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的名言,这反映了我国古代劳动人民在长期的生产和生活实践中所产生的朴素的极限思想.

1 数列的概念

定义 1.2.1 按一定顺序排列的一列数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$,叫做**数列**,记作$\{x_n\}$.其中,$x_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$叫做数列的第 i 项.

如果数列的项数 n 与数列的各项 $x_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$之间都是按照某种相同的对应规则对应的,并且这种对应规则可以用一个解析式表达,那么这个解析式叫做数列的通项公式,记作 $x_n=f(n)(n\in \mathbf{Z}^+)$.由于项数 n 的取值特点,数列$\{x_n\}$又叫做整标函数.整标函数的图像是平面上无穷多个孤立点组成的集合.

2 数列的极限

例 2.1 观察下面的数列,当 n 无限增大时,x_n 的变化趋势.

(1)$x_n=\dfrac{n}{n+1}$; (2)$x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

解 (1)数列$\{x_n\}$:$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$,

即 $1-\dfrac{1}{2},1-\dfrac{1}{3},1-\dfrac{1}{4},1-\dfrac{1}{5},\cdots$,整标函数的图像如图 1-7 所示,当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于数值 1.

(2)数列$\{x_n\}$:$1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{(-1)^{n+1}}{n},\cdots$,整标函数的图像如图 1-8 所示,当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于数值 0.

定义 1.2.2 设数列$\{x_n\}$,若当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于同一个常数 a,则把 a 叫做当 n 趋近于无穷大时,数列$\{x_n\}$的**极限**,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

由定义可知,例 1 中的两个数列都有极限,分别记作:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$; (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=0$.

由图 1-7、图 1-8 可见,如果数列有极限,那么,数列的各项在平面上的对应点将随着项数

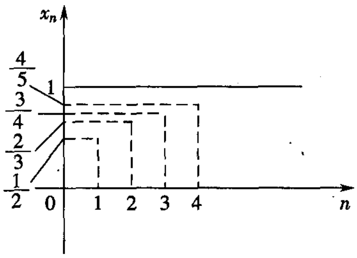


图 1-7

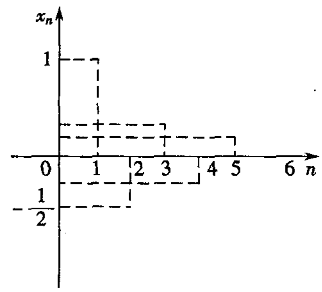


图 1-8

n 的增大无限趋近于一个确定的常数.

例 2.2 写出下列各数列的极限.

(1) $x_n = 2$; (2) $x_n = (-1)^n$; (3) $x_n = n$.

解 (1) 数列 $\{x_n\}$: 2,2,2,…,由图 1-9 知,$\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$.

各项均为同一常数的数列叫做常数列.常数列的极限仍为常数本身.即

$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$($c$ 为常数).

(2)数列 $\{x_n\}$: $-1,1,-1,1,\cdots$,由图 1-10 知,当 $n\to\infty$ 时,x_n 总是在 -1 与 1 之间跳跃,而不能无限趋近于一个确定的常数,该数列的极限不存在.

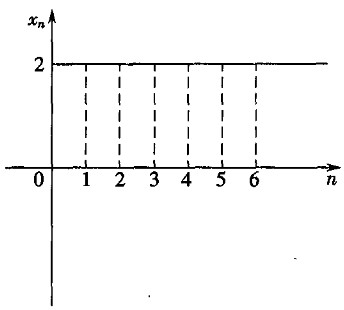


图 1-9

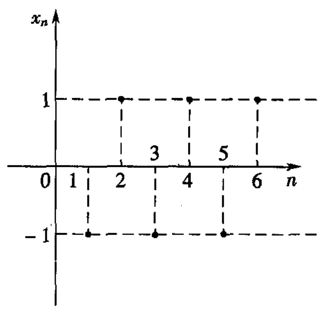


图 1-10

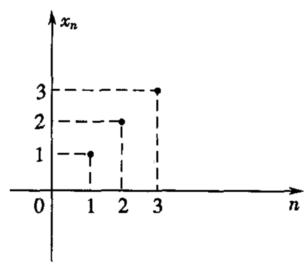


图 1-11

(3)数列 $\{x_n\}$: 1,2,3,…,由图 1-11 可见,当 $n\to\infty$ 时,$x_n\to\infty$,不符合数列极限的定义,因此该数列的极限不存在.

1.2.2 函数 $y=f(x)$ 的极限

1 $x\to\infty$ 时,$y=f(x)$ 的极限

例 2.3 观察当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,由图 1-12 可见,当 $x\to+\infty$ 时,曲线无限趋近于 x 轴,曲线上各点处的函数值无限趋近于 0,即 $\dfrac{1}{x}\to 0$.

当 $x\to-\infty$ 时,曲线无限趋近于 x 轴,曲线上各点处的函数值无限趋近于 0,即 $\dfrac{1}{x}\to 0$.