高等教育自学考试自学辅导丛书

高等数学(一)

学习指导书

（经济管理专业）

姚孟臣　主编

刘德荫　卢　刚　吴宝科　编写
韩云瑞　张清允　高　辉

高等教育出版社

（京）112 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（一）学习指导书/姚孟臣主编；刘德荫等编.
—北京：高等教育出版社，1997.5
ISBN 7-04-006280-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①姚…②刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 05881 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588
高等教育出版社发行
北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.625 字数 320 000
1997 年 5 月第 1 版 1997 年 5 月第 1 次印刷
印数 0 001—10 110
定价 16.00 元

前言

为了完善高等教育自学考试教育形式，弥补考试的局限性，促进高等教育自学考试的发展，根据全国考办的工作部署，我们组织编印了《高等教育自学考试自学辅导丛书》。

该套丛书以全国考委公布的课程自学考试大纲为依据，以全国统编教材为蓝本，相关专家、学者担任各册辅导书的主编和主审，旨在帮助自学者达到学习目标，顺利通过国家考试。

自学辅导书是高等教育自学考试教育媒体的重要组成部分，我们将在全国考办和各专业委员会的指导帮助下，根据专业的开考情况和考生的实际需要，陆续组织编写、出版文字、音像和计算机多媒体自学辅导资料，由此构成与大纲、教材相配套的，完整的学习体系。

全国高等教育自学考试指导委员会办公室

自学指导服务中心

1997 年 1 月

愿天下有志者皆成人才

——《自学辅导丛书》总序

杨学为

中国独创的高等教育自学考试，既是一种国家考试制度，又是一种个人自学、社会助学、国家考试相结合的教育形式。自20世纪80年代初创立以来，已使许多自学者获得了大专、本科文凭，这一所投资省、适应面广、质量高的没有围墙的“大学”已受到了社会各界的欢迎，引起了世界的瞩目。为了进一步完善它，帮助更多的公民实现求学的理想与成才的追求，我们将不遗余力地把“学校”送到每个自学者的面前，把成才之路铺在每一个自学者的脚下。给自考者提供高质量、有实效的自学辅导材料就是这项工作的重要组成部分。基于这样的认识，我们邀请有关专家学者编写了这套《自学辅导丛书》(以下简称《丛书》)。

《丛书》的编写者、审订者们不仅有很深的学术造诣和丰硕的研究成果，而且在长期的教书育人事业中积累了丰富的经验。在繁重的教学、研究的同时，他们还以极大的热情投入到了高等教育自学考试这一崇高的事业中。对于高等教育自学考试的基本规律，自考者学习过程中的基本特点，加强自学指导的重要意义等等，他们都有深刻的认识和独到的见解，他们从内心深处愿意为每一位有勇气踏上自学之路的人奉献出全部的智慧和力量。所有这些，就是我们这套丛书的基石。

这套《丛书》既然是以帮助考生为根本宗旨，在编写中我们就力图体现下列特征：

1. 理清脉络，建立结构。掌握一门学科，最关键的是弄清其独特的知识体系与结构，从总体上有一个明晰的框架。在此基础上，再装入基本事实、基本理论，就可以学得通、记得住、用得活。《丛书》在理清学科的脉络，帮助读者理解知识结构与体系方面想了不少办法。在编写每一部分时，都力图做到先总体后部分再回到总体。

2. 突出重点，突破难点。人们最初接触一门学科时，往往抓不住重点，找不出难点，平均使用力量，结果是费了不少力还不得要领。《丛书》根据各学科特点，把重点明确告诉读者，围绕重点把相关学科知识组织起来，把难点明确地提出来，简要地分析了其成为难点的原因及攻破难点的方法。

3. 学练结合，联系实际。学任何一门学科都必须做一定数量的习题，都必须用学科知识解决现实生活、生产中的问题。《丛书》精选了那些有代表性的、能举一反三的问题并做了适当的分析，使读者能在做习题的过程中巩固已学的知识，加深对有关知识的理解，为帮助考生联系实际，《丛书》也选择了一些实例，通过这些实例读者能够学习到理论联系实际的具体方法。

4. 纵横联系，指导方法。每门学科内部各章节之间，它与相关学科之间都有内在的联系，只有把握了这种纵横联系，才能加深理解，融会贯通，使各章节、各学科的学习相互补充、相得益彰。《丛书》充分考虑了读者在这一方面的困难，把应揭示的联系都予以揭示，但又把握了分寸，不至于使读者不知云里雾里。每门学科都有自己独特的学习、研究方法，只有掌握了这些方法，才算找到了打开该学科知识宝库的钥匙，才能收到既掌握知识又培养能力的实效，才能提高学习的效果与效率。《丛书》在指导方法上，密切结合学科内容，力求简明易懂，便于操作。

为了使考生读得懂，喜欢读，见成效，《丛书》在文字上力求简明扼要，通俗易懂；在行文上力求生动流畅，不绕弯子；在形式上力求灵活变化，适合自学者的情趣。

通过这些努力，我们期望达到的目的是：

1. 减缓坡度。在实现一个知识点转到另一个知识点、从这一章转到下一章的转折时，借助各种中介而不至于使考生感到太吃力，太困难。

2. 减小难度。在学习新知识时有旧知识的铺垫，有相关的背景知识做向导，有深入浅出的分析，有一定的实例。这样，学习者所遇到的困难和压力就相应地得到缓解。

3. 拓展深度。在掌握一门学科时，不止于只知道一些表皮的东西，对一些基本理论、基本概念，要既知其然，又知其所以然；既知其一，又知其二。同时，对一些前沿问题也有所涉猎。

4. 实现高度。既能通过国家考试，获得文凭；又学到了知识，培养了能力，实现了个人素质的提高，这才是我们理解的高等教育自学考试，这才是我们助学的终极目标。

我们尽了绵薄之力来体现自己的宗旨，但能否如愿，应由广大考生去评定。我们诚恳地欢迎每一位考生提出意见和建议，从而进一步改进我们的工作，使每一个考生都能得到更切合实际，更有成效的指导与帮助。

作为高等教育自学考试的一名工作者，我有义务不厌其烦地告诫参加自考的朋友们：一定要在钻研大纲、教材的基础上使用《丛书》。那种平时不在大纲、教材上下功夫，只寄希望于突击背诵辅导材料以应付考试的办法是不足取的，它已使不少人走了弯路。“以大纲为纲，以教材为本”是我们自学者应遵循的基本原则。

人类的知识是无穷无尽的，自学之路也因之曲折而漫长。愿我们的工作能助自学者一臂之力，愿天下有志者皆成人才。

1996年冬

编者的话

根据全国高等教育自学考试指导委员会颁发的高等教育自学考试《高等数学(一)自学考试大纲》和所使用的教材，我们编写了高等教育自学考试自学辅导丛书《高等数学(一)》学习指导书及同步练习册，本书是学习指导书。

本书内容包括：函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、积分、无穷级数、多元函数及其偏导数、微分方程初步等八章。

各章的内容包括以下几个部分：

一、基本要求

以简要文字对该章的内容，提出由低到高依次为"了解"、"理解或掌握"、"熟练掌握"三个不同层次的考核要求。

二、考核知识点

分条列出本章有关的考核知识点，使读者对所学知识内容的范围做到心中有数。

三、主要内容

以考纲为依据，按节列出本章所涉及到的主要概念、定义、性质、定理及公式等内容。

四、答疑辅导

解答本章中的一些疑难问题，辅导读者正确理解重要的概念及定理，指出解题思路和必要的技巧，起到拨开迷雾、释疑解惑的作用。

五、典型例题

这里，我们精选了有代表性和覆盖面较大的题目做为典型例题，通过对例题的分析与解答，使读者弄清基本概念，掌握解题思

路，提高解题的能力。

书的最后附有三套综合练习题，是供读者复习所学知识，检查学习效果而设的。

我们希望通过本书的学习，能有助于广大读者理解和掌握《高等数学(一)自学考试大纲》规定的内容，正确理解基本概念、基本理论，提高基本计算能力，解惑答疑，培养自学能力方面起到一定的作用。

《高等数学(一)》学习指导书及同步练习册是由北京大学数学科学学院姚孟臣副教授任主编。他负责全书结构的策划并编写了各章的知识点和基本要求以及部分练习题。在本书成稿后，由他进行了初审并与编者多次进行讨论研究，纠正了不妥之处。本书由北京电视大学刘德荫教授编写，参加本书编写工作的还有中国人民大学卢刚副教授、北京大学吴宝科副教授、清华大学韩云瑞副教授、北京大学张清允副研究馆员和中国人民大学附属中学高辉老师等。

本书由中国人民大学信息学院胡显佑先生主审。他不仅仔细地阅读了全部书稿，同时提出了许多宝贵的修改意见和建议。这里我们向他表示衷心的感谢。

书中的历年自学考试试题是由全国高等教育自学考试指导委员会办公室命题处提供的，在此，我们向自考命题处的领导及有关同志深表谢意。

由于编者水平所限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

1997 年 2 月

目　录

第一章　函数及其图形

一、基本要求

理解函数概念、函数的四个简单性质，熟记基本初等函数的定义域和图象，理解反函数、复合函数、分段函数及初等函数等概念，了解经济学中的一些常用函数．

二、考核知识点

1．集合及其运算
2．绝对值、区间、邻域
3．映射及函数概念
4．函数的性质
5．反函数
6．复合函数
7．基本初等函数和初等函数
8．分段函数和绝对值函数
9．经济学中的一些常用函数
10．建立函数关系式

三、主要内容

第一节　集　合

1．集合的概念及其运算

集合是现代数学中一个重要的基本概念．集合就是指具有某种共同属性的一些对象的全体．构成集合的每一个对象叫做集合的元素．例如：

(1) 1997 年春季参加高等教育自学考试的考生的全体为一集合；

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的全体为一集合；

(3) 所有自然数的全体为一集合；

(4) 一直线上所有点的全体为一集合．

在上述前两个例子中，每个集合只有有限多个元素，这种集合叫做有限集．后两个例子中所给出的集合不是由有限个元素组成，这种集合叫做无限集．

通常用大写字母 A,B,C 表示集合，其元素用小写字母 a,b,c 表示．

设 A 是一个集合，如果 a 是 A 的元素，就记作

$$a\in A$$

如果 a 不是 A 的元素，就记作

$$a\overline{\in}A(\text{或 } a\notin A)$$

变量 x 的取值范围构成的集合 X 叫做变量 x 的变化域，记作 $x\in X$.

集合一般有两种表示法：**列举法**和**描述法**．列举法就是把集合的元素都列举出来．例如，A 是由 1,3,5,7,9 这五个数组成的集合，记作

$$A=\{1,3,5,7,9\}$$

也就是说{　}中将 A 的元素都一一列举出来了．所谓描述法就是给出集合元素的特性．一般用

$$A=\{a|a\text{ 具有性质 }P\}$$

来表示具有某种性质 P 的全体元素 a 构成的集合．如上述的集合 A 也可以记作

$$A=\{2n-1 \mid n<6, n\in \mathbf{N}_+\}^{①}$$

只含有一个元素 a 的集合叫做**单元素集**，记为$\{a\}$.

不含有任何元素的集合叫做**空集**，记为$\varnothing$. 例如方程 $x^2+1=0$ 的实数解的解集合就是空集．但要注意，空集$\varnothing$与单元素集$\{0\}$不是一回事．

由所研究对象的全体构成的集合称为**全集**，记作 Ω. 例如当讨论一元线性方程

$$ax+b=0(\forall\ a\neq 0\in \mathbf{N}_+, \forall\ b\in \mathbf{Q})^{②}$$

的有理解集合时，有理数集 $\mathbf{Q}$ 是一个全集．需要指出的是全集是相对的．在一种条件下是全集的集合，在另一种条件下可能就不是全集．前例中，如果在实数范围内讨论一元线性方程 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$的解集合时，那么 $\mathbf{Q}$ 就不是全集了．

设 A,B 是两个集合．如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即 $a\in A$ 必有 $a\in B$，那么称 A 为 B 的**子集**，记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果 $A\subset B, B\subset C$，那么 $A\subset C$. 这说明了包含具有传递性，例如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$，于是有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$. 容易看出，对于任意的集合 A，我们约定$\varnothing\subset A$，总有 $A\subset A, A\subset\Omega$ 成立．

例 1　设 $A=\{2,4,8\}$，则集合 A 的所有子集是$\varnothing$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{8\}$，$\{2,4\}$，$\{2,8\}$，$\{4,8\}$，$\{2,4,8\}$. 注意，在考虑集合 A 的所有子集时，不要把空集$\varnothing$和它本身忘掉．

设 A,B 是两个集合．如果 $A\subset B, B\subset A$，那么称集合 A 与 B **相等**，记作

$$A=B$$

很明显，含有相同元素的两个集合相等．

例 2　设 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{x\mid x$ 为方程 $x^3-5x^2+6x=0$ 的

---

① 符号 $\mathbf{N}_+$表示集合$\{1,2,3,\cdots\}$，$\mathbf{N}$ 表示集合$\{0,1,2,3,\cdots\}$.

② 符号$\forall$ 是数理逻辑的量词符号，表示“对任意的”或“任一的”.

解$\}$,则 $A=B$.

设 A,B 是两个集合．称集合$\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$为 A 与 B 的**并集**,即由 A 与 B 的全体元素构成的集合,记作 $A\cup B$.

例 3 $\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

显然,并集具有以下性质:

(1) $(A\cup B)\supset A$;

(2) $(A\cup B)\supset B$.

设 A,B 是两个集合．称集合$\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$为 A 与 B 的**交集**,即由 A 与 B 的公共元素构成的集合,记作 $A\cap B$. 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B **互不相交**.

例 4 $\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}$;$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$.

显然,交集具有以下性质:

(1) $(A\cap B)\subset A$;

(2) $(A\cap B)\subset B$.

设 Ω 是全集．A 是 Ω 的子集．称集合$\{x|x\in\Omega$,且 $x\overline{\in}A\}$为 A 的**补集**,记作 $\complement A$,

例 5 设全集 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,9,10\}$,集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$,则 $\complement A=\{2,4,6,8,10\}$.

显然,补集具有以下性质:

(1) $A\cup\complement A=\Omega, A\cap\complement A=\varnothing$;

(2) $\complement(\complement A)=A,\complement\Omega=\varnothing,\complement\varnothing=\Omega$.

集合之间的运算,满足下列性质:

(1) 交换律:(Ⅰ) $A\cup B=B\cup A$,

(Ⅱ) $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律:(Ⅰ) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

(Ⅱ) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律:(Ⅰ) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

(Ⅱ) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 德摩根律：(Ⅰ) $\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$，

(Ⅱ) $\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$；

2. 实数与数轴

实数包括有理数与无理数．全体实数构成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$．

有理数包括零，正负整数，正负分数．概括说，有理数是形如 m/n，$n\neq0$，m、n 为整数．也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示．

我们把无限不循环小数称为无理数．如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π，e 等都是无理数．

数轴：规定了原点、方向和单位长度的直线称为数轴．如图 1-1．

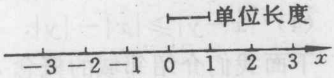

图 1-1

由于任给一个实数，数轴上就有唯一的点与它对应；反之，数轴上的任意一个点也对应着唯一的实数，可见实数集合等价于数轴上的点集．因此在以后的讨论中，我们可以把点与实数不加区分．

在 $\mathbf{R}$ 的子集中，我们今后经常遇到的是各种各样的区间．**区间**就是介于某两点之间的一切点所构成的集合，这两个点称为区间的**端点**．如果两个端点都是定数，称此区间为有限的，否则称为无限的．常见的区间有：设 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，我们把集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)；把集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$；把集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 称为半开半闭区间，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$．以上各种有限区间在数轴上都可以用一条线段来表示它们．对于无限区间，例如 $\{x\mid x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$；$\{x\mid x<a\}$，记作 $(-\infty,a)$；$\{a\mid a\in\mathbf{R}\}$，记作 $(-\infty,+\infty)$．类似地，还有 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$（注意，这里的 $+\infty$，$-\infty$ 以及 ∞ 只是一种符号，既不能把它们视为实数，也不能对它们进行

运算).

设 $x\in\mathbf{R}$，x 的绝对值是一个非负实数，记为 $|x|$，其定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

例如，$|4|=4$，$|0|=0$，$|-3.2|=-(-3.2)=3.2$.

根据绝对值的定义，可知

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$$

因此，当 $|x|\leqslant r(r>0)$ 时，又可以把它写成

$$-r\leqslant x\leqslant r$$

或用闭区间 $[-r,r]$ 来表示．下面给出绝对值的几个性质：

(1) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；

(2) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$，$y\neq 0$；

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(4) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

下面我们介绍邻域的概念．

设 $a\in\mathbf{R}$，$h\in\mathbf{R}$ 且 $h>0$. 称集合

$$\{x\,|\,|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**邻域**，记作 $N_h(a)$，其中 h 为邻域半径；称集合

$$\{x\,|\,0<|x-a|<h\}$$

为 a 的一个空心邻域，记作 $N_h(\bar{a})$. 当不必指明邻域半径时，我们用 $N(a)$，$N(\bar{a})$ 表示 a 的邻域和 a 的空心邻域．称集合

$$\{x\,|\,a\leqslant x<a+h\}\text{和}\{x\,|\,a-h<x\leqslant a\}$$

为 a 的右邻域和左邻域，记作 $N_h^+(a)$ 和 $N_h^-(a)$. 若上述集合除去 a 点，就称为 a 的空心右邻域和空心左邻域，记作 $N_h^+(\bar{a})$ 和 $N_h^-(\bar{a})$. 不必指明邻域半径时，记号中可省略 h.

第二节　映　射

映射是指两个集合之间的一种对应关系．

从集合 X 到集合 Y 的一个映射 f，是指在集合 X 与集合 Y 之间建立了这样一种对应关系：

（1）对于集合 X 的每一个元素，都能按某种规则有集合 Y 中的某个元素相对应；

（2）对于集合 X 的每一个元素，集合 Y 中与它对应的元素只有一个．

从 X 到 Y 的映射 f 记为 $f:X\to Y$．

这意味着对应关系 f 将集合 X 中的每一个元素 $x\in X$ 与集合 Y 中的某个元素 $y\in Y$ 对应，通常记为 $y=f(x)$．

对上述定义，还需要说明以下两点：

（1）在映射中，并不要求集合 Y 中的所有元素都与集合 X 中的某个元素对应．

（2）尽管集合 X 中的任一元素不允许与集合 Y 中的两个或多个元素对应，但集合 Y 中的一个元素可以允许是集合 X 中的两个或多个元素的对应元素．

下面举两个映射的例子．

例 1　设某中学录取的高一新生 120 名为集合 X．Y 是每个新生升学考试所得分数构成的集合．我们将每名新生与其考试分数建立对应关系 f．例如新生 x_1 得分 527，新生 x_2 得分 539，…则每名新生都有一个对应的分数，满足映射的两个条件．故这样的对应关系构成了从 X 到 Y 的映射．

例 2　设 X 是平面上所有圆的集合，Y 是正实数集合．由于任何一个圆都有一个确定的面积（单位：cm^2）．如果在每个圆和它的面积之间建立对应关系，则这种对应关系也构成从 X 到 Y 的映射．

第三节　函　　数

1．函数．利用映射概念，我们很容易将函数定义为两个数集