中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材·数学系列

高等数学

（上册）

唐广阳 郭建富 主编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材 · 数学系列

高等数学

（上册）

主　编：唐广阳　郭建富
副主编：贾彩军　高淑娥　刘润辉　韦桂兰
主　审：韩云瑞
编　委：（按姓氏笔画排序）
韦桂兰　唐广阳　冯素芬　刘润辉
徐伟刚　贾彩军　高淑娥　郭建富

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/唐广阳,郭建富主编.—武汉:武汉大学出版社,2008.4
21世纪职业院校规划教材·数学系列
ISBN 978-7-307-06188-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①唐… ②郭… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第033291号

责任编辑:任 翔 责任校对:黄添生 版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务公司
开本:787×1092 1/16 印张:10.25 字数:246千字 插页:1
版次:2008年4月第1版 2008年4月第1次印刷
ISBN 978-7-307-06188-0/O·384 定价:21.00元

前　言

近年来，随着高职高专教育迅速发展，教材改革的任务更加紧迫. 根据教育部高职高专规划教材的要求，在广泛吸取同行意见的基础上，我们编写了本教材. 在编写过程中，遵循了高职高专教材够用为度的原则，体现了注重能力的特色. 在内容安排上，注意到紧密衔接初等数学，基本概念及定理与几何意义、物理意义和实际背景相联系，突出了培养学生运用能力的特色. 并增加了数学软件上机实践的内容，以提高学生运用微机解决数学问题的能力. 具体地讲，本教材主要具有以下特点：

1. 坚持高职高专教育的高层次、职业性和可衔接性的统一. 其专业基础课教材以高中或中职毕业文化为起点，为培养高等技术人才服务；区别于高等普通教育教材，突出高等技术职业教育特点，以培养高等技术应用型人才为培养目标；为高职高专教育的后续课程即专业课提供素质、知识和能力所必需的、够用的高等数学有关知识基础.

2. 坚持实用性与前瞻性的统一. 高等职业技术教育属于大众化的教育. 学生毕业后，绝大多数要进入岗位就业，或者自己去创业. 因此，教材内容必须强调实用性和针对性. 同时，为了兼顾未来岗位群的发展和学生对后续发展的需要，教材内容必须坚持前瞻性原则，在内容上要新，做到充分吸收本专业最新科研成果和最新的实践经验和案例，并把这些新内容与高等职业技术教育教学要求及学生接受能力结合起来，以强化教材的科学性、先进性和实用性.

3. 基于数学教育的需要，根据教育数学的规律，对于数学研究成果进行数学上的再创造，提供教学法加工的材料. 对于已有的数学知识在体系结构的简约性和传播的有效性上进行再创造. 以最简洁明了的、易于接受的逻辑体系向学生提供最值得传授的数学知识. 优化数学知识（概念、原理和方法）的表述方式，使得教材更加科学、更加平易，更加符合教育规律，易教易学.

4. 着眼于适应社会需要和满足职业岗位群的要求，坚持以提高学生整体素质为基础，以培养学生的适应能力，特别是以实践能力和创新能力为主线，确立专业基础课程新体系和教材内容新体系. 自觉摆脱“专科教材为本科教材的压缩饼干”的现象，克服传统教材以从理论到理论的阐述为章节结构的习惯做法，结合专业内容的特点，适度增加图、表、实例、案例等栏目的内容比例，强化理论与实际的结合、基本理论与动手操作的结合等，真正体现高等职业技术教育的特色.

5. 有较强的编委和作者阵容，编委和作者中不但有具有一定影响的跨世纪学科或专业带头人和部分高职院校的专家，还有多名高职院校从事高等数学教学的一线教师. 较好地发挥了集思广益和优势互补的作用，确保了教材的质量，能够适应高等职业技术教育的不同专业对专业基础课教材的需要.

本教材分上下两册. 上册为一元函数微积分；下册有空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程. 主要适用于理工科类高职高专各专业，还可作为专升本考试的教材或参考书.

本书在编写和统稿过程中，得到清华大学韩云瑞教授、青岛大学王益姝教授的大力支持和

指导，在此我们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，时间紧迫，错误在所难免，期望得到专家、同行和读者的批评指正，以使本书在教学实践中能够得到进一步完善.

编　者

2007年10月

目　　录

第1章　函　　数

在我们的生活中，变化的量随处可见，例如温度、湿度、降雨量、国民经济增长率、商品价格等，这些变化的量都有一个共同的特点，那就是它们之所以变化，是因为受到其他一些变化的量的制约或与其他一些变化的量相互制约，这种相互制约的关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的数学概念 —— 函数. 函数是微积分学的主要研究对象.

函数是微积分学的主要研究对象.

1.1　函数的概念

一、函数的定义

在我们观察各种现象或过程的时候，经常会遇到两种不同的量：一种是在整个过程中保持一个固定不变的数值的量，这种量称为常量. 如物体的重力加速度. 另一种是在整个过程中不断变化、在不同范围内取不同数值的量，这种量称为变量. 如某日某地的气温、湿度等. 函数所要讨论的主要是两个变量之间的一种确定的依赖关系. 下面通过实例来加以说明.

例 1.1.1　圆的面积 S 与圆的半径 r 之间有着如下的关系：

$$S = \pi r^2 \tag{1.1.1}$$

每给定一个半径 r 就确定一个圆面积 S，即圆面积 S 的大小随着圆半径 r 的变化而变化. 式(1.1.1) 则反映了 S 与 r 之间的对应关系.

例 1.1.2　物体在空中自由下落时，如果忽略空气阻力不计，则落体所经过的路程 S 将随着时间 t 的变化而变化，其关系式如下：

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.1.2}$$

其中：重力加速度 $g = 9.8\text{m/s}^2$. 假定物体开始下落的时刻为 $t = 0$，物体着地的时刻为 $t = t_0$，则当 t 在闭区间 $[0, t_0]$ 上变化时，式(1.1.2) 就确定了 S 的相应数值，反映出了自由落体运动的运动规律.

定义 1.1.1　设有两个变量 x 与 y，当变量 x 在某一给定的数集 D 中任意取定一值时，另一个变量 y 就按某一确定的法则有一个确定的值与 x 的这个值相对应，那么变量 y 称为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，记作 $D(f)$ 或 D. 数集

$$R(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\},$$

称为函数 $f(x)$ 的值域，简记为 R_f.

注意：函数的概念包括二要素；定义域和对应法则. 因此两个函数 f 与 g 相等，当且仅当它们的定义域相同，且对应法则也相同.

例如：一次函数 $f(x) = 2x + 3$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域也是 $\mathbf{R}$，对应法则 f 就是“自变量 x 乘 2 加 3”.

例 1.1.3 求函数 $f(x)=\sqrt{2x+3}$ 的定义域.

解 因为要使$\sqrt{2x+3}$有意义，必须 $2x+3\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\frac{3}{2}$. 所以该函数的定义域就是 $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

例 1.1.4 求函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+1$ 的定义域.

解 使得$\sqrt{1-x}$有意义的实数x的集合是$(-\infty,1]$，而使$\sqrt{1+x}$有意义的实数x的集合是$[-1,+\infty)$，所以该函数的定义域就是

$$(-\infty,1]\cap[-1,+\infty)=[-1,1].$$

二、函数的图形

我们知道，函数可以用公式、表格和图像三种方法表示. 通常我们所讨论的函数，常用公式来表示.

对于任一确定的函数 $y=f(x)$，定义域 D 中的每一个 x 与其函数值 $f(x)$ 可构成数组 $(x,f(x))$，当 x 取遍其定义域 D 时，这些数组$(x,f(x))$在平面直角坐标系中所对应的点集称为该函数的图形，函数的图形一般是一条曲线或一些散点.

例如：一次函数 $y=x+2$ 的图像便是如图 1.1 所示的一条直线.

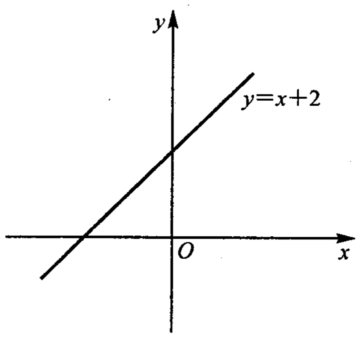

图 1.1

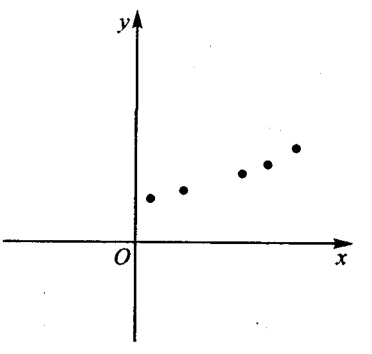

图 1.2

例 1.1.5 中华人民共和国成立以来共进行了五次全国人口普查，各次普查的结果如下表所示(单位:亿). 普查的结果是普查年份的函数. 其图像(如图 1.2 所示)是一些散点.

年(x 年)	总人口数(y 亿)
1953(4 年)	5.2 亿
1964(15 年)	6.9 亿
1982(33 年)	10.1 亿
1990(41 年)	11.0 亿
2000(51 年)	13.0 亿

例 1.1.6 作函数 $y = x^2$ 的图像.

如图 1.3 所示，其图像是一条光滑的曲线.

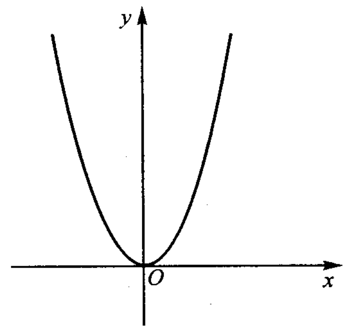

图 1.3

函数的图像有利于我们全面了解函数的性质. 特别是现在我们可使用计算机技术，根据公式和数据作出函数的图像，很容易发现函数的性质.

习题 1.1

1. 已知 $f(x) = 2x + 3x - 2$，求 $f(2), f(0), f(-x), f(1+x)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$； (2) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$；

(3) $g(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt{5-x}$ (4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + x - 6}$.

3. 作出下列各函数的图像：

(1) $y = x$； (2) $y = 2x + 3$；

(3) $y = \dfrac{1}{x}$； (4) $y = -x^2 + 3$.

4. 一年中，月份构成的集合为 A，每月天数构成的集合为 B，f 为月份与每月天数间的对应法则，求 $f(1), f(2), f(7), f(9), f(10)$.

5. 判断下列各对函数是否相同：

(1) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$；

(2) $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x) = x + 1, g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$；

(4) $f(x) = x, g(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

1.2 函数的性质

一、函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果对于 I 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是单调递增的；如果当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是单调递减的. 一个函数如果在 I 内是单调递增的，则称此函数为单调增函数；一个函数如果在 I 内是单调递减的，则称此函数为单调减函数，单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

增函数的图像沿 x 轴的正向，即从左向右逐渐上升，如图 1.4 所示. 减函数的图像沿 x 轴的正向，即从左向右逐渐下降，如图 1.5 所示.

例如函数 $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增，是一个单调函数. 又如 $y = x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数，但在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递减，在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

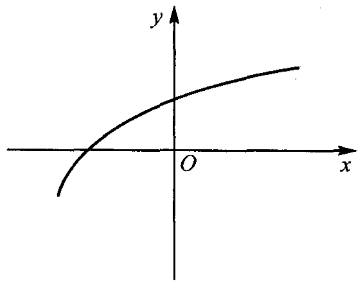

图 1.4

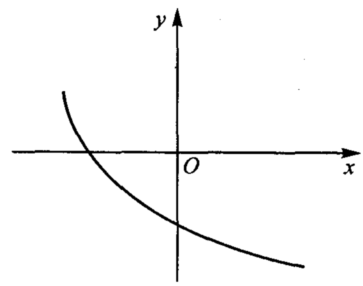

图 1.5

二、函数的奇偶性

若对于函数 $y=f(x)$ 定义域内任一点 x，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数. 奇函数的图像关于原点对称，如图 1.6 所示.

若对于函数 $y=f(x)$ 定义域内任一点 x，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 偶函数的图像关于 y 轴对称. 如图 1.7 所示.

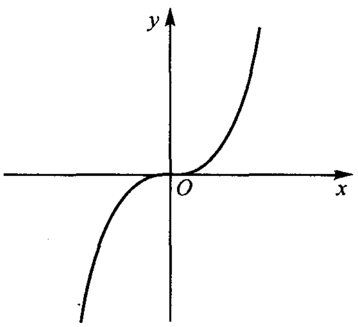

图 1.6

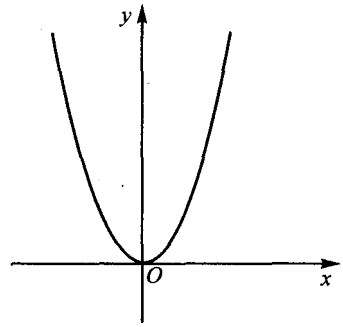

图 1.7

例如 $f(x)=x^3$，因为

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x),$$

所以 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

又如 $f(x)=x^2+1$，因为

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2+1$ 是偶函数.

类似地，如 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sin x$，$y=3x^2$ 为奇函数. $y=\dfrac{1}{x^2}$，$y=\cos x$，$y=2x^2-1$ 为偶函数. $y=2x^2-x+1$，$y=\sin x+x^2$ 既非奇函数，也非偶函数.

三、函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于其定义域内任一 x 均有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数.称 T 为 $f(x)$ 的一个周期.显然当 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期时，$\pm 2T$，$\pm 3T$，$\pm 4T$，… 也都是 $f(x)$ 的周期，通常我们所说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，是以 2π 为周期的周期函数. $y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数. 周期函数的图像每隔 T 将重复出现.

四、函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，若存在正数 M，对于任一 $x \in I$，有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界.称 $f(x)$ 为有界函数.

例如，对于 $(-\infty, +\infty)$ 内的任一 x，都有 $|\sin x| \leqslant 1$ 成立，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内有界，但在 $(0, 1)$ 内无界.

习题 1.2

1. 证明函数 $f(x)=2x+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

2. 判断下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $y=x^5$，　$x \in (0, +\infty)$；

(2) $y=x^2-2x+1$，　$x \in (-\infty, 0)$；

(3) $y=x^2-6x+5$，　$x \in (-\infty, 3)$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^{-2}$；　　(2) $f(x)=2x+x^3$；　　(3) $f(x)=\dfrac{3x^2}{1-2x^2}$；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}+2$；　　(5) $f(x)=\sqrt[3]{x}$；　　(6) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$.

4. (1) 已知 $y=f(x)$ 是偶函数，且 $f(3)=8$，求 $f(-3)$ 的值；

(2) 已知 $y=f(x)$ 是奇函数，且 $f(-2)=5$，求 $f(2)$ 的值.

5. 证明两个奇函数的代数和是奇函数.

6. 试证函数 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ 在其定义域内有界.

1.3　反函数和复合函数

一、反函数

我们知道，圆的面积 S 与圆的半径 r 之间有如下关系：

$$S=\pi r^2.$$

对于半径 $r(r>0)$ 的每一个值，面积 S 都有唯一确定的值与之对应，反过来，如果已知面积 S，则半径 r 也可由

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

求得. 在这种情况下我们就说函数 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 是函数 $S=\pi r^2(r>0)$ 的反函数.

定义 1.3.1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，如果对于 B 中每一个元素 y，都有 A 中唯一确定的元素 x 与之对应，此 x 适合 $f(x)=y$，即形成一个 x 是 y 的新的函数，称这个函数是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数. 记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，我们总是把自变量记作 x，函数记作 y，所以常把 $x=f^{-1}(y)$. 中的 x、y 对调. 这样 $y=f(x)$ 的反函数就可改写为

$$y=f^{-1}(x)\quad (x\in B).$$

反函数有以下性质：

1. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数；
2. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域与值域对调；
3. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.3.1 求下列函数的反函数：

(1) $y=2x+3$，　(2) $y=\frac{x+1}{x-1}$，$x\in\mathbf{R}$　且 $x\neq 1$；

(3) $y=x^2$，　$x\in(-\infty,0]$.

解　(1) 由 $y=2x+3$ 解得 $x=\frac{y-3}{2}$，$y=2x+3$ 的反函数 $y=\frac{x-3}{2}$，$x\in\mathbf{R}$；

(2) 由 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 解得 $x=\frac{y+1}{y-1}$，将 x，y 对调，即得函数 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 的反函数 $x=\frac{y+1}{y-1}$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1$；

(3) 由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$，因为 $x\in(-\infty,0]$，所以取 $x=-\sqrt{y}$，将 x，y 对调，即得函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上的反函数 $y=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

例 1.3.2 作出函数 $y=2x+1(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数的图像.

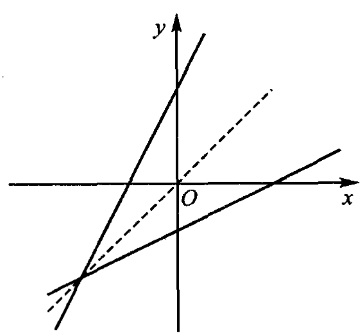

图 1.8

解　由 $y=2x+1$ 得 $x=\frac{y-1}{2}$，将 x，y 对调，得函数 $y=2x+1(x\in\mathbf{R})$ 的反函数 $y=\frac{x-1}{2}$，$(x\in\mathbf{R})$.

从图 1.8 可以看出：函数 $y=2x+1$ 与其反函数 $y=\frac{x-1}{2}$ 上的点关于直线 $y=x$ 对称. 由此可知，函数 $y=2x+1$ 与其反函数 $y=\frac{x-1}{2}$ 的图像是以直线 $y=x$ 为对称轴的对称图形.

注意：并不是每一个函数都有反函数.

例如 函数 $y=x$，对于每一个 y 的值，在 $(-\infty,+\infty)$ 内所对应于 x 的值并非唯一确定，所以 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数.

二、复合函数

定义 1.3.2 设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，定义域为 U，而 u 又是 x 的函数，即 $u=\phi(x)$. 定义域为 X，值域为 U，且 $U^x\subseteq U$，那么对于 X 中的每一个 x 经过中间变量 u，相应地

有唯一确定的一个 y 与之对应，记为 $y=f[\phi(x)]$. 我们称其为函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\phi(x)$ 的复合函数.

例 1.3.3 已知 $y=\sin u$，$u=2x^2$，则其复合函数为 $y=\sin 2x^2$.

例 1.3.4 已知函数 $y=e^{\sqrt{x}}$，试分析它由哪些函数复合而成.

解 函数 $y=e^{\sqrt{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{x}$ 复合而成.

复合函数的中间变量可以不止一个. 有的复合函数可由两个或更多个中间变量复合而成. 例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\tan x$，则其复合函数为 $y=\sqrt{\ln\tan x}$.

习题 1.3

1. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt{x-1}\ (x\geqslant 1)$；　(2) $y=2x^2+1\ (x\geqslant 1)$；

(3) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}\ (x\neq 1)$；　(4) $y=\dfrac{1}{x}+1\ (x\neq 0)$.

2. 下列函数中哪些互为反函数？

$y=x^3$，　$y=x+5$，　$y=2x$，　$y=-4x$，

$y=-\dfrac{1}{4}x$，　$y=\dfrac{x}{2}$，　$y=x-5$，　$y=\sqrt[3]{x}$.

3. 求函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的反函数并画出函数及反函数的图像.

4. 指出下列函数是由哪些简单的函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　(2) $y=\cos 2x$；　(3) $y=\tan(2x+1)$；

(4) $y=\ln\sin x^2$；　(5) $y=e^{\sin x}$；　(6) $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

5. 试将 y 表示成 x 的复合函数：

(1) $y=\sin u$，$u=5^v$，$v=x^3$；　(2) $y=e^u$，$u=\cot v$，$v=\ln x$.

1.4 基本初等函数和初等函数

一、基本初等函数

所谓基本初等函数，就是指我们在中学已经学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这里仅对这些函数的有关性质作简要复习.

1. 常数函数

$$y=C.$$

这是所有函数中最简单的一类，其定义域是 **R**，对于 **R** 上任一 x 的值，对应于函数 y 的值始终是 C. 其图像为平行于 x 轴且在 y 轴上的截距为 C 的直线，见图 1.9.

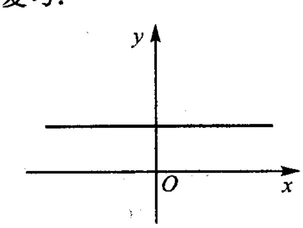

图 1.9

2. 幂函数

$$y=x^a\quad(a\in\mathbf{R})$$