高等数学系列教材

多元微积分与无穷级数

电子科技大学应用数学系　编

电子科技大学出版社

高等数学系列教材

多元微积分与无穷级数

电子科技大学应用数学系 编

电子科技大学出版社

内容简介

本套教材是在国家教委颁发的《高等工业学校高等数学与线性代数课程教学基本要求》基础上，本着面向21世纪深化教学内容改革的精神编写的. 本套教材编写的指导思想是：提高素质；整体优化；反映现代；重视离散；强化应用；淡化技巧.

本套教材共分三册：一元微积分与微分方程；线性代数与空间解析几何；多元微积分与无穷级数. 本册主要内容包括多元函数微分学、多元数量值函数的积分、多元向量值函数的积分与无穷级数. 每节配有习题，每章后有复习题，书末附有习题答案.

本套教材具有改革新意，结构严谨，论证简明，叙述清晰，例题典型，便于教学，可作为高等工业院校的教材或参考书，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考.

高等数学系列教材

多元微积分与无穷级数

电子科技大学应用数学系　编

出　　版：电子科技大学出版社（成都建设北路二段四号，邮编：610054）
责任编辑：唐雅邻
发　　行：新华书店经销
印　　刷：西南财经大学出版社印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　印张　13.375　字数　367 千字
版　　次：1998 年 3 月第一版
印　　次：1998 年 3 月第一次印刷
书　　号：ISBN 7—81043—922—7/TN・100
印　　数：1—5000 册
定　　价：16.55 元

前　言

本套教材是在国家教委颁发的《高等工业学校高等数学与线性代数课程教学基本要求》基础上，本着面向21世纪深化教学内容改革的精神编写的．面对21世纪，现代社会正经历着由工业社会向信息社会过渡的变革．信息社会有两个重要特点：一是计算机技术的迅速发展与广泛应用；二是数学的应用向一切领域渗透．根据21世纪对工程技术人才素质的要求，吸收国内外改革教材的长处，本套教材编写的指导思想可以归纳为以下六点：

一、提高素质．没有教育思想和观念的转变，教学内容、方法和手段的改革就不可能有突破．数学教育的目的不仅是给学生传授数学知识，而且更重要的是提高学生的数学素质．必须从应试教育与知识传授的传统教育观念转移到素质教育与能力培养的现代教育观念上来．因此，本书把提高学生的数学素质贯穿在整个内容之中，使学生掌握数学中解决问题的思想和方法，培养学生的自学能力与创新能力．

二、整体优化．要改变工科数学内容各部分互相割裂的局面，将工科数学所涉及的主要基础内容作为一个整体来处理，充分重视它们之间的相互渗透与有机结合．因此，本书充分利用线性代数知识处理微积分及微分方程的内容，注意从几何角度理解线性代数内容，阐明代数内容的几何背景．

三、反映现代．传统的经典数学内容是重要的数学基础，不可忽视，但作为21世纪的工程技术人员应该了解现代数学语言（包括思想、方法、术语及符号）．因此，本书在处理经典内容的同时，注重渗透现代数学的观念、思想、方法、术语及符号，为现代数学适度

地提供内容展示的窗口和延伸发展的接口.

四、重视离散.传统工科数学重视连续性,忽视离散性;由于计算机的飞速发展与广泛应用,越来越显示离散数学的重要性.线性代数是离散数学的基础,在线性代数中常用公理化定义、论证方法及抽象化思维等都有它自身的特色,是其他课程无法取代的.因此,本书适当地加强了线性代数的内容与应用.

五、强化应用.理解数学精髓的最佳途径是学会应用数学知识解决实际问题.工科学生学习数学后应该了解数学的应用,具有应用数学知识解决实际问题的意识和能力.因此,本书对每一重要概念都要介绍其应用背景,每一重要结果都要举出应用实例;一些典型的应用例题用数学建模形式给出;应用范围也不仅仅局限在几何与物理方面,而扩大到经济、生物、生命科学与化学等学科领域;结合数学内容还介绍了一些常用的应用数学方法如优化方法等.

六、淡化技巧.传统工科数学内容比较重视数学计算的技巧,但由于计算机技术的迅速发展,常用数学软件包的广泛应用,使得求极限、求导数与求积分的运算技巧有必要适当淡化.因此,本书在运算方面不追求繁难技巧,只要求掌握基本方法.

本套教材共分三册:一元微积分与微分方程;线性代数与空间解析几何;多元微积分与无穷级数.每节配有习题,每章后有复习题,书末附有习题答案.

本册教材中,在多元函数微分学部分我们利用线性代数处理了有关问题,介绍了向量值函数及其导数;在求多元函数极值部分介绍了最优化方法初步如最速下降法及线性规划问题。在多元函数积分学部分我们将重积分、第一类曲线积分与曲面积分统称为多元数量值函数的积分,这样处理概念与性质统一,简明清晰;此外,我们还将第二类曲线积分和曲面积分统称为多元向量值函数的积分,并且用第一类曲线积分与曲面积分来定义第二类曲线积分与曲面积分,将比较复杂的有向投影转化为向量的内积,便于学

生接受。

本书精选例题和习题，难易适度，具有典型性与新意；文字叙述力求清晰流畅，简明易懂，深入浅出，循序渐进，便于学生学习.

本套教材220学时左右可以讲完(本册70学时左右)；带＊的内容可根据专业需要酌情取舍. 本套教材可作为高等工业院校高等数学与线性代数课程的教材或教学参考书，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考.

本套教材由谢云荪、李正良主编. 本册的编者是：傅英定(第一章)、曾勇(第二章、第三章)、钟守铭(第四章).

本套教材的指导思想经过编者集体讨论确定，在编写过程中我们感到要贯彻好这些指导思想难度较大，需要不断地探索，不断地实践，不断地完善，因此，我们恳切地欢迎同行专家及读者提出宝贵的意见.

编　者

1997年10月

目　录

第一章　多元函数微分学

第二章 多元数量值函数积分学

第三章 多元向量值函数的积分

第四章　无穷级数

第一章　多元函数微分学

在一元函数微分学的基础上，本章讨论多元函数的极限、连续，并重点研究偏导数、全微分及它们的一些简单应用. 多元函数是一元函数的推广，我们将重点研究二元函数，三元和三元以上的函数完全可以类推.

§1.1　多 元 函 数

一、邻域

与直线上的邻域类似，可引进 n 维 Euclid 空间 R^n 内的邻域.

设点 $a\in R^n$，对任意一个实数 $\delta>0$，记

$$N(a,\delta)=\left\{x\in R^n\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\},$$

称 $N(a,\delta)$ 是点 a 的 δ **邻域**，或称它是以点 a 为中心、以 δ 为半径的 n **维开球**. 若点 a 不包含在 $N(a,\delta)$ 内，则称 $N(a,\delta)$ 为点 a 的**空心邻域**，记为 $N(a,\delta)-\{a\}$. 这里 a 和 x 都是 R^n 中的点，$|\cdot|$ 是 R^n 中的 Euclid 范数.

用坐标表示出来，若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$N(a,\delta)=\left\{x=x(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\,\middle|\,\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\delta\right\}.$$

在 R^3 中，它是一个不包含边界球面的开球体；在 R^2 中，它是一个不包含边界圆周的开圆盘. 如图1.1所示. $P_0(x_0,y_0)\in R^2$，

$N(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$. 在直线上它是一个开区间. 图 1.1($a$)是包含点 P_0 的邻域 $N(a,\delta)$；图 1.1(b)是不包含点 a 的空心邻域 $N(a,\delta)$.

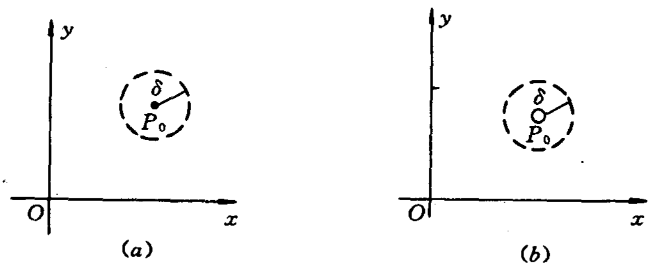


图 1.1

因此，R^n 中的邻域 $N(a,\delta)$ 无非是通常的开区间、开圆盘、开球的一个自然推广.

二、内点、外点、边界点、聚点

设 $P_1\in D$，若存在点 P_1 的某个邻域 $N(P_1,\delta)\subset D$，则称点 P_1 为 D 的**内点**(图 1.2). 若 P_2 的任一邻域内既有属于 D 的点，又有不属于 D 的点(不论 P_2 是否属于 D)，则称 P_2 为 D 的**边界点**(图 1.2). D 的边界点的集合称为 D 的边界. 设 $P_3\overline{\in} D$，并且存在 P_3 的一个邻域 $N(P_3,\delta)$，使 $N(P_3,\delta)\cap D=\varnothing$，则称 P_3 是 D 的一个**外点**(图 1.2). 设点 x，它可能属于 D 也可能不属于 D，如果在点 x 的任何邻域 $N(x,\delta)$ 内总含有 $D-\{x\}$ 中的点，则称 x 是 D 的一个**聚点**. 在二维时，例如 D

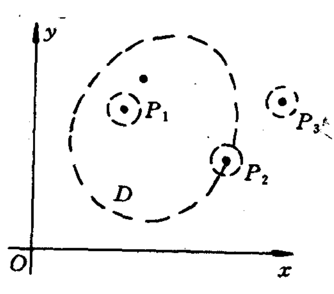


图 1.2

$=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$，那么点$(0,0)$是$D$的边界点也是$D$的聚点.

三、区域

设D是R^n中的一个子集，如果D中的每一点都是D的内点，则称D是R^n中的一个**开集**. 也就是说开集是由内点组成的. 设D是R^n中的一个开集，如果对D内任何两点P和Q，都可以用D内的一条折线将P和Q相连接，则称D是一个**连通的开集**. 又称连通的开集是**开区域**(图 1.3). 开区域连同其边界称为**闭区域**. 对于一个区域D，如果$\exists\ M>0$，使得D内任何点到原点的距离都小于M，则称这个区域为**有界区域**. 否则称为**无界区域**. 如图 1.4(a)为有界区域，图 1.4(b)为无界区域.

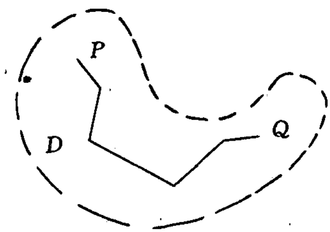


图 1.3

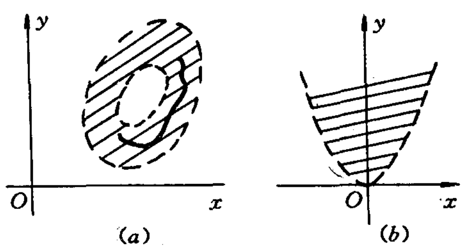


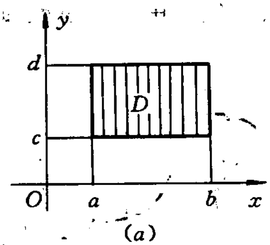
图 1.4

区域常用不等式表示，如图 1.5(a)所示的矩形区域

$$D:\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$$

和图 1.5(*b*)所示的圆环区域

$$D:\quad r^2 < x^2 + y^2 \leqslant R^2 \quad (R > r > 0).$$



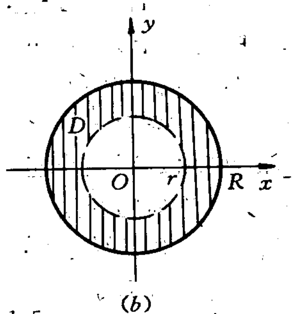


图 1.5

四、多元函数的概念

圆柱体的体积依赖于圆柱的高 h 和半径 r，其关系式是

$$V = \pi r^2 h.$$

我们说 V 是一个二元函数，它的自变量是 r 和 h.

一般地，设 D 是 R^n 中的一个子集，$Y \in R$，所谓 n 元函数实际上就是从 D 到 Y 的一个映射，记为

$$f: D \to Y,$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to y,$$

即对 D 内的每一点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，通过关系 f，在 Y 内有唯一的一个 y 与此 x 对应，则称 f 是从 D 到 Y 的一个**映射**，并记为 $y=f(x)$ 或 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由于 D 是 R^n 中的子集，R 是实数，所以又称 f 是 n **元实值函数**，简称 n **元函数**，它的定义域是 D，

记为 D_f. Y 称为**值域**,记为 Y_f.

例 1 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,$(x,y)\in D_f=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,$z$ 是二元函数,定义域是 D_f. 在几何上,它是上半单位球面的方程.

例 2 求函数 $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$ $(R>0)$ 的定义域. 如图 1.6 所示.

解 $D_f=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$,它是以原点为球心,半径为 R 的球面方程.

需要指出的是我们也可以引入多值函数的概念. 如 $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 是多值函数. 今后如无特别说明,凡说到函数都指单值函数.

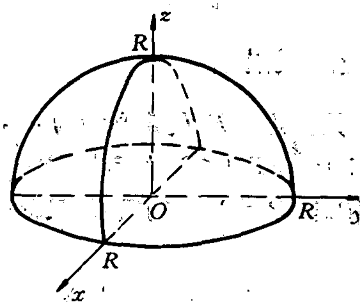


图 1.6

五、等值线

$z=f(x,y)$ 在 R^3 中为一曲面,在 D_f 上使 $f(x,y)=C$(常数)的点集:

$$\{(x,y)\mid f(x,y)=C,(x,y)\in D_f,c\in R\},$$

如果它是 xOy 平面上的曲线,则将它称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**等值线**. 当 C 取一系列值 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 时,便得多条等值线,称为**等值线族**(见图 1.7). 从等值线上大致可看出函数值变化的情况