

优 化 与 决 策

图与网络

——
优化决策的图论方法

刘桂真 著

上海科学技术出版社

优 化 与 决 策

图与网络

——优化决策的图论方法

刘桂真 著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

图与网络:优化决策的图论方法/刘桂真著. —上海:
上海科学技术出版社, 2008. 4

(优化与决策)

ISBN 978—7—5323—9240—7

I. 图... II. 刘... III. 图论 IV. 0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 195650 号

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行

(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

新华书店上海发行所经销

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 889×1194 1/32 印张 3.625

字数 80 千

2008 年 4 月第 1 版

2008 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—3 200

定价: 15.00 元

本书如有缺页、错装或损坏等严重质量问题,
请向工厂联系调换

《优化与决策》丛书编委会

名誉主编 吴文俊 谷超豪

主 编 胡毓达

编 委 (以姓氏笔画为序)

王长钰 王兴华 王则柯 方伟武

石钟慈 史树中 刘源张 李 端

汪寿阳 张连生 陈光亚 茆诗松

姚恩瑜 袁亚湘 顾基发 徐利治

唐国春 章祥荪 越民义 韩继业

管梅谷 魏权龄

序



“人尽其能，物尽其用”，是人类进步的重要标志和社会发展的根本动力。

在现代社会中，小至个人事务的处理，大到国家政策的制定，无不需人们进行关于“人”和“物”的选优抉择，以求取好的结果。在科技日新月异和经济快速发展的 21 世纪，人们要日益面临各种愈来愈复杂的决策问题，因此，现代优化思想和科学决策知识，已是当今人们普遍需要具备的基本素养。

现代教育提倡对学生进行创新精神和综合能力的素质培养。在我国大中学教育中，让学生们了解某些现代优化方法和进行决策能力培养，也正是素质教育的重要内容。

为了向广大读者普及最优化和科学决策的思想和方法，在中国运筹学会及其决策科学分会、数学规划分会和排序分会，中国系统工程学会，中国数学会计算数学分会以及上海运筹学会的倡议和支持下，我们邀请了在相应领域卓有成就的有关专家，撰写了这套《优化与决策》系列丛书。

这套丛书具有以下特点：

选题实用求新 本丛书的重要特色是内容的实用性。各选题在扩大知识的同时，均注重联系实际结合应用展开讨论。不论是定量或定性的决策问题，进行选优建模和效益分析一般要归为用数量刻画和作数值计算，因此，数学是这套丛书各选题的基本工具。但是，与以往作为中学数学教科书内容补充的科普性数学读

物或抽象的数学专著不同,本丛书强调综合运用数学和有关知识去解决现实中的应用问题。另外,丛书的选题既考虑其内容是具代表性的,同时也注意对新领域和某些发展中问题的介绍。

表述浅出深入 本丛书着力于用通俗易懂的方式引导读者掌握现代优化和决策知识。书中特配置了形象的图画以帮助加深读者对内容的理解。我们计划,具有高中数学基础的读者,即可读懂其中的基本内容。但是,为了每一选题的系统性和完整性,也不放弃对一些最基本和著名理论结果的介绍。因此,主要想了解思想方法和借鉴应用手段的读者,阅读时可以略去其中某些理论和证明部分,而不会影响对主要内容的理解。然而,对于具相当数学素养并对理论结果同样有兴趣者,这些较深入的内容对他们是有价值的,其中有些结果即使对于同行学者也将具有重要的参考意义。因此,不同层次的读者,阅读本丛书后均会有所得益。

这套丛书的读者面是多层次和极广泛的,它既适用于各行业管理者,各级行政公务员,广大科技工作者,以及各专业大学生、研究生和教师们阅读,同时也可作为大专和高中学生的选读材料或课外读物。

写作这套既具科普性又基于一定理论分析的现代应用丛书,对于丛书作者是一种新的尝试。本丛书从酝酿组织、确定选题,直至现在与读者见面,曾经历了较长的时间。许国志院士和俞文鰲

教授生前曾积极参与出版丛书的策划,并热情承担了写作任务,可惜未及如愿。值得一提的是,各位作者对分担撰写选题的内容都进行了精心选择和安排。特别是,许多作者专业造诣精深,但写作科普著作则是第一次,因此在可读性方面曾倾注了许多心血。对于他们的这种认真和奉献精神,谨致以衷心感谢和崇高的敬意!鉴于著述这套丛书对多数作者是一件新的工作,其中难免或有不足之处,期待读者们不吝指正。

最后,我们对吴文俊院士和谷超豪院士关心和支持本丛书的出版,并乐于担任名誉主编致以诚挚的谢忱!同时,感谢上海科学技术出版社对出版这套丛书所作的一系列努力。

胡毓达

2006年9月19日

前 言

有些军事目标的所在地,需要在其中的某些地方设立雷达站,以使既能探测到所有目标,并且所设的站数又尽可能少。用顶点表示目标所在地,如果两个目标在其中一个设立雷达站能够互相探测到,则在它们之间连一条边。这样,就形成了一个图,这个问题就化为在该图中求一些顶点,使得任意不是这些点的顶点都与它们有边连接。类似地,在一个核电站有一些核反应堆设在不同的地方,要设立一些观察站,使能够看到所有反应堆发出的信号,问如何设立可使观察站的数目最少?这个问题同样是本书要研究的问题。再如,对于一个城市间的通讯网络,要在某些城市建立一些发射台,使得每个城市能够从这些发射台中的某一个收到信息。用顶点表示城市,用边表示城市间的通讯线路,则形成一个通讯网络图。我们希望建立尽可能少的发射台,也是书中要讨论的问题。

实际中的许多问题,都可以用一个网络图来表示。例如,用顶点表示计算机,若两台计算机之间有信息传递,则在两个顶点之间连一条边,于是一个计算机网络就可以用一个图来表示。同样地,用顶点表示村庄,用边表示两个村庄之间有公路相连,则这些村庄之间的公路交通状况就可以用一个图来表示。用顶点表学校,若两个学校有学生交流项目,则在对应的顶点之间连一条边,一个图就表示一个校际交流关系的网络。更一般地,用顶点表示物体,两

个物体之间存在某种关系,则在对应的顶点之间连一条边,所形成的图便表示物体之间的关系。通过研究图的结构和性质,可以解决优化和决策中的许多问题。

随着现代生产和科学技术的迅猛发展,特别是计算机的出现和因特网的普及,使图论方法得到了异常快速的扩展。今天,图论已成为现代数学科学中的一门引人注目的新兴学科。它解决问题的形式千变万化,是运筹学和网络技术中使用的重要理论和方法。图论最吸引人的特色是它蕴含着大量有趣的思想、漂亮的图形和巧妙的方法,使非常困难的问题也易于表达。在现实生活中,处处存在着可用图论方法解决的难题。图论外表的简单和本质上的难以解决,使每个研究图论方法的人必须谨慎严肃地思考问题。一个看似简单的问题,往往要用极其复杂的技巧才能解决。

本书主要阐述网络最优化问题中运用的一些重要的图论方法和用图论方法解决的实际问题,如最小连接问题、最优线路问题、工作分派问题、网络流问题,以及图的染色和标号在实际中的应用等。书中附有大量的例子说明图论在自然科学和社会科学中的应用。对于图论中的某些重要结论和著名定理,本书给出了简要而精彩的证明,使得读者能够体会到图论方法的精妙之处。同时,我们也提出一些没有解决的问题。

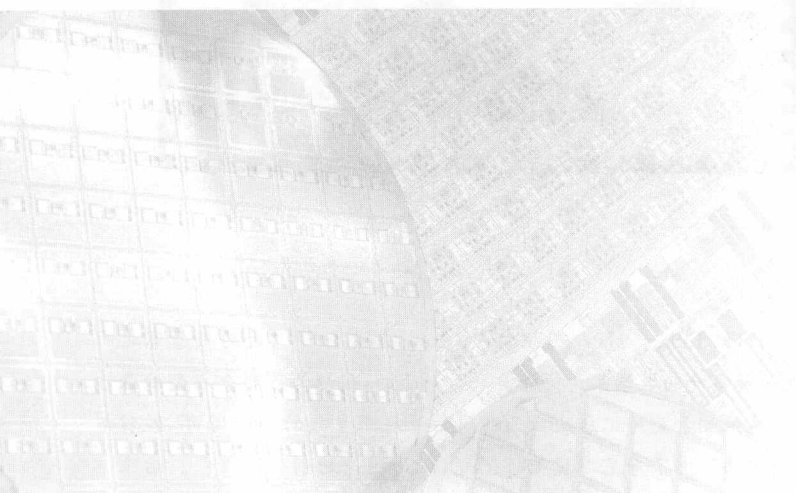
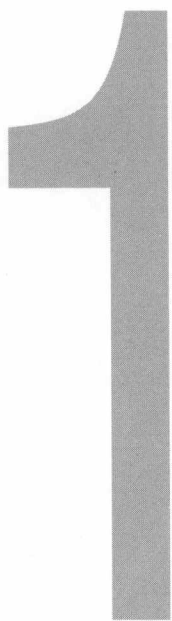
本书基本上自成体系,读者只要具备中学数学知识,便可阅读本书。它可作为中学生和大学生的课外读物,本书的读者对象是管理者和科技工作者,此外也可供中学教师和其他数学爱好者阅读和参考。另外本书对参加数学竞赛和数学建模比赛的学生也具有参考价值。

目 录

前言…… I

1. 图论方法与问题……1
 2. 最小连接问题……11
 3. 最优路线问题……21
 4. 图的匹配问题……33
 5. 图的染色……45
 6. 有向图……59
 7. 网络流……71
 8. 图的标号问题……81
 9. 图论方法应用实例……91
- 参考文献……102

图论 方法与问题





欧拉(L. Euler, 1707—1783), 瑞士人, 历史上最伟大的数学家之一, 也是最多产的数学家。他的贡献是全面的, 被称为百科全书型的数学家。这张邮票是为纪念欧拉 300 周年诞辰而发行的。1736 年, 欧拉用图论方法解决了哥尼斯堡七桥问题, 成为图论的创始人之一。后来一系列优化问题, 如扫街问题、邮路问题、迷宫问题、一笔画问题等都可利用欧拉的方法来解决。

优化与决策中的很多问题都可以用网络来表示, 如交通网络、通讯网络、计算机网络、电网络、基因网络、互联网络等。网络可以用一个图来表示。于是图论方法成为解决网络优化问题的有力工具。本节介绍优化中基本的图论方法和问题。

哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题 在哥尼斯堡城的普莱格尔(Pregel)河中有两个小岛。在河的两岸和小岛之间有七座桥,如图1-1所示。问题是能否从某地出发通过每一座桥恰好一次而回到出发地? 很多人尝试过,都没有成功,但却没有人说明为什么不能成功。直到1736年欧拉用图论方法证明了这个问题是不可能的。他将该问题转化为图1-2中的图,问能否从一个顶点开始一笔画出这个图形而回到该顶点? 由于这个图的顶点的度全为奇数,因此答案是否定的。在第3节将详细讨论有关这方面的问题。由于欧

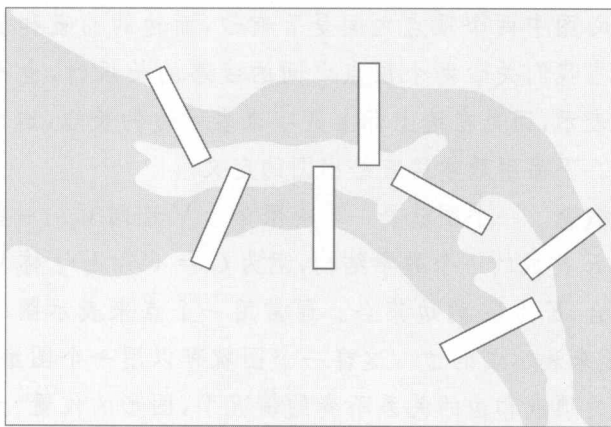


图 1-1

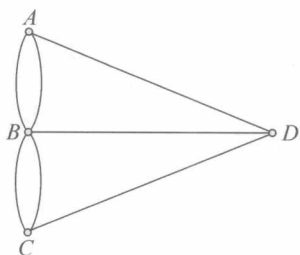


图 1-2

拉 1736 年在他的论文中解决了这个问题并得到了更一般性的结论,使他成为图论的创始人,他的论文被认为是图论方面的第一篇论文而闻名于世。

现实生活中的许多问题都可以用一个图来表示。例如,用顶点表示城市,若两个城市之间有一条铁路相连,则在

两个顶点之间连一条边,于是一个交通网络就可以用一个图来表示。同样地,用顶点表示电话,用边表示两个电话之间的线路,则通讯网络就可以用一个图来表示;用顶点表示人,若两个人认识,则在对应的顶点之间连一条边,一个图就表示一个人际关系的网络。类似地,化学中的分子结构、物理学中的电网络、计算机的联网等问题都可以用一个图来表示。将优化与决策中的实际问题用一个图来表示,通过研究图的性质并设计优化的算法来解决这些问题,这就是优化的图论方法。

由于我们感兴趣的是两个物体之间是否存在某种关系,所以我们只关心图中两个顶点之间是否有边,而边的曲直和长短则无关紧要。当我们关心两个顶点之间的线路的长短时,也不是用边的长短来表示,而是在边上标上数字来表示边的长短,这种图也称为赋权图。下面用数学语言给出图的定义。

图的概念 一个图就是一个有限集合 V 连同 V 的一些 2 元子集的集合 E 构成的一个数学结构,记为 $G = (V, E)$ 。称 V 为图 G 的顶点集合, E 为 G 的边集合。通常用一个点来表示图的某个顶点,而用线来表示图的边。这样一个图就可以用一个图形来表示。在保持图的顶点和边的关系不变的情况下,图形的位置、大小和形状都是无关紧要的。

一个网络是由点和点之间的连线构成的图形,其中每条连线对应一个实数,称为连线的权。一个网络也称为一个赋权图。没有赋权的图也可以看为每条边的权都为 1 的赋权图。例如我们用点表示城市,两个城市间有铁路相连,则在对应的点之间连一条线。这个图形就构成了城市之间的铁路交通网络,连线上的权则表示铁路的长度。类似的,用点表示城市,用连线表示城市间的通讯线路,则形成城市之间的一个通讯网络,连线上的权则可表示线路的长度或信息流量。

例如,设 $G = (V, E)$ 是一个图,其中顶点集合 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, 边集合 $E = \{v_1 v_2, v_1 v_5, v_2 v_3, v_2 v_5, v_3 v_5, v_4 v_5\}$, 则图 G 可用图 1-3 中的图形来表示。

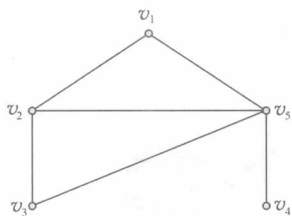


图 1-3

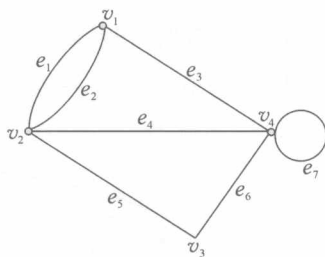


图 1-4

当我们用一个图形来表示一个图时,就使抽象的数学概念形象化。注意当用一个图形来表示一个图时,每条线段的内部自身不要相交,同时线段不要穿过表示顶点的点。若 $e = uv$ 是图 G 的一条边,则称 u 和 v 是 e 的端点,并说 e 与 u 和 v 关联。若边 e_1 和 e_2 有公共端点,则称 e_1 与 e_2 是邻接的。若两个顶点之间有边连,也称这两个顶点是邻接的。例如,在图 1-3 中顶点 v_1 与 v_2 是邻接的,边 $e_1 = v_1 v_2$ 和边 $e_2 = v_1 v_5$ 是邻接的,而边 $e_1 = v_1 v_2$ 与 v_1 和 v_2 是关联的。有时候我们允许图的两个顶点之间可以有不只一条

边,如图 1-4 所示的图中 v_1 与 v_2 之间有两条边 e_1 和 e_2 ,称这样的边为重边。有时候也允许一条边的两个端点是同一个顶点,如图 1-4 中的边 e_7 ,称这种边为图的环。同时称有重边或环的图为多重图。没有环和重边的图称为简单图。在本书中一般所说的图皆指简单图。提出多重图的概念也是有其应用背景的。如果用一个图表示一个公路交通网络,两个城市之间有两条以上的路,则在对应两个城市的顶点之间有两条以上的边。如果某个城市有一条环城公路,则可以用一个环来表示。在图 G 中与顶点 v 关联的边的数目称为顶点 v 的度,记为 $d_G(v)$,有时简记为 $d(v)$ 。如在图 1-3 中顶点 v_1 的度为 2,顶点 v_2 的度为 3 等等。

下面给出用图论方法可以解决的几个实际问题。

(1) 效用问题 设有 3 个商场和 3 个仓库(图 1-5),问能否从每个商场到每个仓库修一条路,使这些路互不交叉? 记 x_1 、 x_2 和

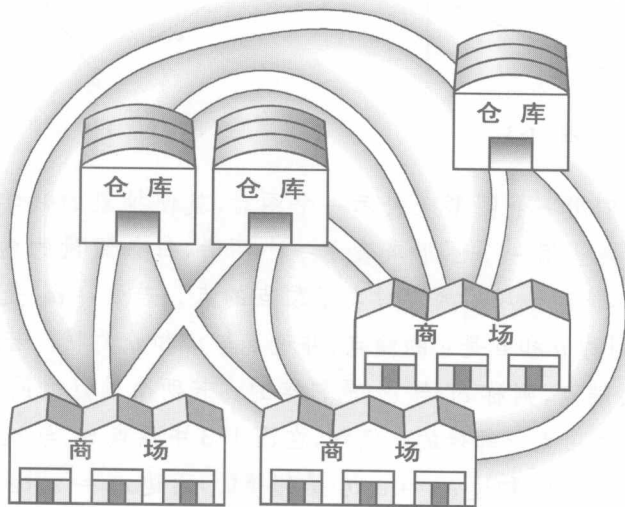


图 1-5

x_3 依次表示 3 个商场, y_1 、 y_2 和 y_3 表示 3 个仓库(图 1-6)。该问题抽象为图论中的问题,即为在图 1-6 中能否将该图画在平面上使边互不交叉?读者可以试一下,你肯定找不到一种画法使图中的边互不交叉。这个问题的答案是否定的。可以用图论方法说明图 1-6 中的图不是平面图。

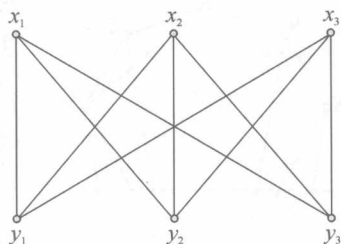


图 1-6

(2) 座位安排问题 一个俱乐部有若干个成员,他们每天中午围坐在一张圆桌旁吃饭(图 1-7)。他们希望每天中午吃饭时每个人的两边的邻座人员都不相同。问这种安排最多可安排多少天?



图 1-7

这个问题也可以用图论方法来解决。我们就用 9 个顶点的图来表示这种安排。每个顶点表示一个成员,当两个成员是邻座时在对应的顶点之间连一条边。图 1-8 表示了两种可能的座次安排。分别