★ 2009 ★

天府高考总复习

TIANFUGAOKAO
ZONGFUXI

四七九名师主编

主编：许 勇

数学

四川出版集团
四川教育出版社

2009 天府名校 TIANFUMINGXIAO

天府高考总复习

数 学

主　编： 许　勇

副主编： 陶兴模　解传江　唐绍友

编　者：（按姓氏笔画为序）

邓　飞　邓朝阳　左　莉　龙万明　李来敏

李　自　许正川　杨志友　杨　飞　杨　培

邹仁福　杜晓雯　张太军　郑　黎　陶兴模

唐荣龙　唐绍友　唐绍伟　唐　昕　秦　勇

曹阳可　曾宏建　曾昌涛　甄振国　解传江

四川出版集团

四川教育出版社

·成都·

图书在版编目（CIP）数据

2009 天府名校·天府高考总复习. 数学/许勇编. —成都：四川教育出版社，2008.4

ISBN 978-7-5408-4874-3

Ⅰ.2… Ⅱ.许… Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP 数据核字（2008）第 049642 号

责任编辑　何　军
封面设计　SOAN 盛琳堂图书品牌机构
版式设计　王　凌
责任校对　伍登富
责任印制　黄　萍
出版发行　四川出版集团　四川教育出版社
地　　址　成都市槐树街 2 号
邮政编码　610031
网　　址　www.chuanjiaoshe.com
印　　刷　四川福润印务有限责任公司
版　　次　2008 年 8 月第 1 版
印　　次　2008 年 8 月第 1 次印刷
成品规格　210mm×295mm
印　　张　22.5 (含参考答案)
字　　数　990 千
定　　价　49.80 元

如发现印装质量问题，请与本社调换。电话：(028) 86259359
编辑部电话：(028) 86259381　邮购电话：(028) 86259694

丛书简介

《天府高考总复习》是由四川省考试研究专家和一线特级、高级教师倾力打造的高考总复习指导丛书。全套丛书由高考九个学科构成。

丛书既注重各学科基础知识、核心能力的内在联系，又注意发掘学生的学习潜能，并能兼顾地方特点；丛书及时传递高考信息，有效传播高考复习经验，最大限度地减轻学生学习负担，全面迅速地提高复习效率，在众多高考指导丛书中具有独特鲜明的特色。

本套丛书具有同类产品中无可比拟的特色和优势，体现在：

本套丛书汇集了省内权威的教育资料

- 及时准确全面的高考信息
- 第一手的教情学情和考情
- 深厚的高考教学研究功底
- 教学与科研相结合的人才资源

本套丛书集中了强大优化的编写队伍

- 坚实的学科理论基础
- 长期的资料编写经历
- 丰富的考试命题经验
- 优化的年龄职称结构
- 有效的教学复习方法
- 合理的区域学校类型

本套丛书拥有实用于高考需求的原创的学习内容

- 新（依据的信息新、栏目设置新、试题原创性强）
- 精（精心选材、科学结合；精讲精练，最大限度地减轻学生学习负担）
- 实（一切从学情、教情、考情的实际出发，突出针对性，提高实效性）

本套丛书享有独具一格的全程配套的指导服务

- 四川教育出版社网站（www.chuanjiaoshe.com）及时发布高考信息，免费下载英语听力材料文件。
- 免费配送教师参考书，及时出版配套的《天府秘卷》高考模拟试题。

四川教育出版社
2008年4月

CONGSHU JIANJIE

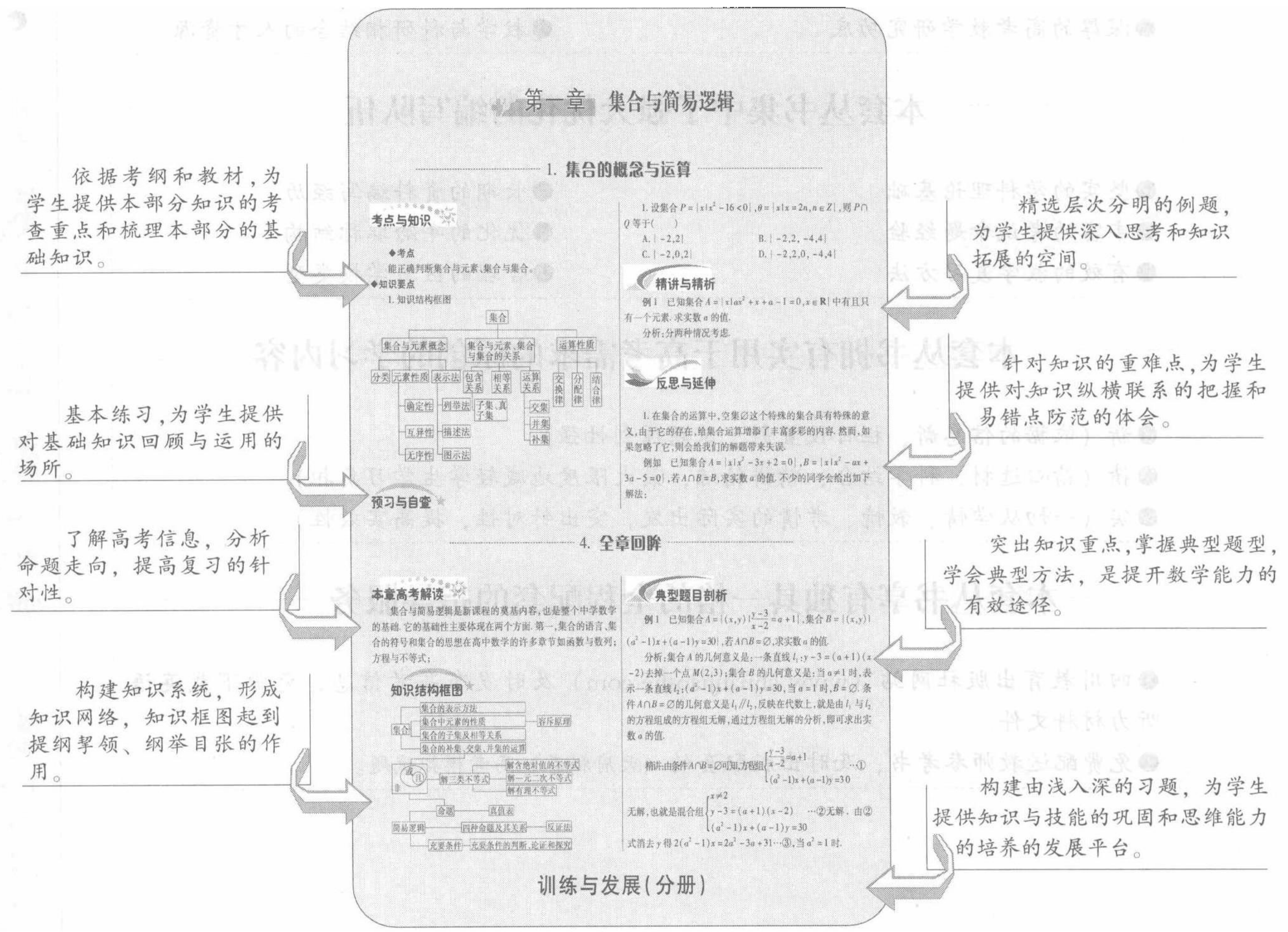
编者的话 学生版图示说明

本书是为参加“3+文/理综合”考试的学生编写的。考虑到高三教学时间的紧迫和数学学科的特点，本书内容“少而精”，对习题的质和量也作了特殊要求，博览市场上的复习资料，精编出能以一当十的试题，以减轻学生的学习负担，提高复习效率。本书的试题训练量，本着学生每个题都有时间做，教师有足够的时间逐一分析讲解每个题的原则设置。同时考虑到兴趣是学习最根本的动力，因此在试题的选择上就立足于把学生带入练习的乐园中，该书不是简单通过趣味性的练习资料吸引学生，而是通过试题中各种思维能力的组合，增强练习的趣味性，达到提高应试能力的目的。

由于各地区或学校学生学习能力存在差异，教学进度也不同，本书将二轮专题复习与一轮同步复习整合在一起，以满足个别学生超大强度的训练量，提前构建综合能力。

本套丛书配有教师用书，免费赠送授课老师；请配套使用四川教育出版社出版的《天府秘卷四川高考全真模拟试题》。

为了帮助你更好地使用本书，请阅读使用导引图



通过作者、编辑们的辛勤工作，这本书终于付梓，一方面我们感到十分欣慰，另一方面也深知书中还有值得商榷甚至错误之处，恳请老师和同学们在使用过程中提出宝贵意见，我们一定会在再版时认真考虑大家的意见和建议，使这本书臻于完善。

编 者

2008 年 4 月

目录

MULU

知识与讲解

目录

MULU

训练与发展

知识与讲解

第一章 集合与简易逻辑

1. 集合的概念与运算

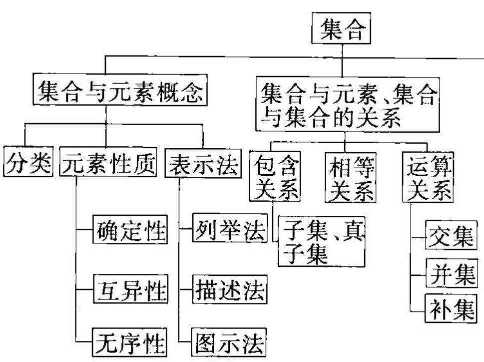
考点与知识

◆考点

能正确判断集合与元素、集合与集合之间的关系；会进行集合的并、交、补运算；能正确运用集合语言表述相关的综合问题.

◆知识要点

1. 知识结构框图



2. 重要结论与性质

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$　　$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(3) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$　　$A\cup(\complement_U A)=U$

(4) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$（德摩根律）

(5) $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$

$\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(B\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$（容斥原理）

(6) $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

(7) 若 $\text{card}(A)=n$，$(n\in\mathbf{N}^*)$，则集合 A 的所有子集的个数共有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个.

预习与自查

1. 设集合 $P=\{x|x^2-16<0\}$，$Q=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $P\cap Q$ 等于(　　)

A. $\{-2,2\}$　　B. $\{-2,2,-4,4\}$

C. $\{-2,0,2\}$　　D. $\{-2,2,0,-4,4\}$

2. 给出四个命题：①任何一个集合 A 必有两个子集；②任何一个集合 A 必有两个真子集；③若集合 A 和 B 的交集是空集，则 A,B 中至少有一个是空集；④若集合 A 和 B 的交集是全集，则 A,B 都是全集. 其中，错误命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 已知集合 $A=\{y|y=x^2-4x+3\}$，$B=\{y|y=-x^2+4x-3\}$，则 $A\cap B=$________.

4. 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是__________.

5. 设 $P=\{3,4\}$，$Q=\{5,6,7\}$，集合 $S=\{(a,b)|a\in P,b\in Q\}$，则集合 S 中元素的个数为________.

精讲与精析

例1　已知集合 $A=\{x|ax^2+x+a-1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素. 求实数 a 的值.

分析：分两种情况考虑.

①当 $a=0$ 时，方程 $ax^2+x+a-1=0$ 为一次方程 $x-1=0$. 符合条件；

②当 $a\neq 0$ 时，方程 $ax^2+x+a-1=0$ 为一元二次方程. 要使集合 A 只有一个元素，应满足方程 $ax^2+x+a-1=0$ 的判别式 $\Delta=0$.

综合①②可得实数 a 的值.

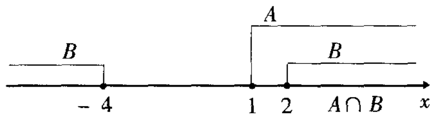
答案：$a=0$，$a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

例2　已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{y|y=x^2+2x+2\}$，$B=\{x|x^2+2x-8\geqslant 0\}$，求：(1) $A\cap B$；(2) $A\cup\complement_U B$；(3) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

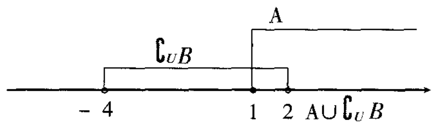
分析：先对集合 A,B 进行化简，然后根据交集、并集和补集

的定义，再利用数轴即可直观地得出答案.

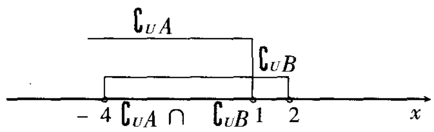
精讲：$A=\{y|y=x^2+2x+2\}=\{y|y=(x+1)^2+1\}=\{y|y\geqslant 1\}$，$B=\{x|x^2+2x-8\geqslant 0\}=\{x|(x+4)(x-2)\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant 2\}$，$\complement_U A=\{y|y<1\}$，$\complement_U B=\{x|-4<x<2\}$.



(1)将集合 A,B 表示在数轴上，如上图所示，由交集的定义可得 $A\cap B=\{x|x\geqslant 2\}$.



(2)将集合 A 和$\complement_U B$ 表示在数轴上，如上图所示，由并集的定义可得 $A\cup\complement_U B=\{x|x>-4\}$.



(3)将集合$\complement_U A$ 和$\complement_U B$ 表示在数轴上，如上图所示，由交集的定义可得$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|-4<x<1\}$.

评析：1. 集合 A 表示的是二次函数 $y=x^2+2x+2$ 的值域，要注意它与集合 $M=\{(x,y)|y=x^2+2x+2\}$ 的区别，集合 A 是数集，集合 M 是点集.

2. 求数集的并集、交集和补集，借助数轴可直观地得出相关的结果.

3. 第(3)问的求解可利用德摩根律$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$，先求出 $A\cup B=\{x|x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant 1\}$，再求 $A\cup B$ 的补集$\complement_U(A\cup B)=\{x|-4<x<1\}$，这种转化在处理某些题目时可以使问题得到简化.

例3 已知 $A=\{x||2x-1|\geqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

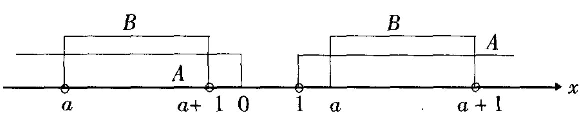
分析：先求出集合 A 的最简形式，再对集合 B 进行分析化简，然后利用包含关系 $B\subseteq A$，借助数轴的直观性即可求得 a 的取值范围.

精讲：由 $|2x-1|\geqslant 1$ 得 $2x-1\leqslant -1$ 或 $2x-1\geqslant 1$，由此得 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$，$A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1\}$.

$B=\{x|x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0\}=\{x|(x-a)[x-(a+1)]<0\}=\{x|a<x<a+1\}$.

将集合 A,B 表示在数轴上，如图所示，由条件 $B\subseteq A$ 可知，实数 a 应满足条件：

$a+1\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 1$，解之得，$a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$.

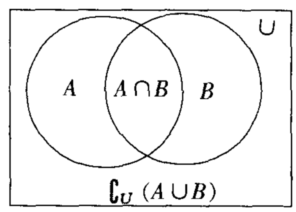


评析：1. 由于集合 B 含有参数 a，它的取值范围由参数 a 确定，借助数轴的直观性容易看出，满足关系 $B\subseteq A$ 的集合 B 应有两种情况. 因此，a 的取值应有两个范围.

2. 注意考虑端点值. 在利用条件 $B\subseteq A$ 时，最容易犯的一个错误是：忽略了端点值的考虑. 误认为 $a+1<0$ 或 $a>1$ 就是问题的全部答案. 事实上，当 $a+1=0$ 或 $a=1$ 时也能满足条件$B\subseteq A$. 对于这一类问题的处理，较好的方法是将端点值代入条件中进行直接验证，符合条件的列入答案中，不符合条件的舍去.

例4 向 50 名学生调查对 A,B 两件事的态度，赞成 A 的人数是 30 人，其余的人不赞成；赞成 B 的人数是 33 人，其余的人不赞成. 另外对 A,B 都不赞成的学生比对 A,B 都赞成的学生人数的$\frac{1}{3}$多 1 人. 问对 A,B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

分析：这是一个集合的应用问题，我们可以利用文氏图来求解. 记 50 名学生组成的集合为全集 U，赞成事件 A 和事件 B 的学生组成的集合分别记作集合 A 和集合 B，则对事件 A,B 都赞成的学生构成的集合就是 $A\cap B$，对事件 A,B 都不赞成的学生构成的集合就是$\complement_U(A\cup B)$，如图所示. 设 $A\cap B$ 的人数为 x，则可在文氏图中表示出对应集合的人数，再结合题设条件即可求得问题的答案.



精讲：记 50 名学生组成的集合为全集 U，赞成事件 A 的学生组成的集合为 A，赞成事件 B 的学生组成的集合为 B. 设对事件 A,B 都赞成的学生人数为 x，即 $\mathrm{card}(A\cap B)=x$，则由题设条件可知 $\mathrm{card}[\complement_U(A\cup B)]=\frac{x}{3}+1$，$\mathrm{card}[A\cap(\complement_U B)]=30-x$，$\mathrm{card}[B\cap(\complement_U A)]=33-x$.

由题意可得：$(30-x)+(33-x)+x+(\frac{x}{3}+1)=50$，解之得 $x=21$，$\frac{x}{3}+1=8$.

由此可知，对事件 A,B 都赞成的学生人数为 21 人，对事件 A,B 都不赞成的学生人数为 8 人.

评析：1. 对于某些实际应用问题，运用集合的观点去认识，借助文氏图的直观性，可以使问题得到很方便的解决.

2. 本题也可以利用并集元素个数的计算公式 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$来解答.

已知：$\mathrm{card}(A)=30$，$\mathrm{card}(B)=33$，$\mathrm{card}(A\cap B)=x$，将这些数据代入上述公式中得 $\mathrm{card}(A\cup B)=63-x$，又因为 $\mathrm{card}[\complement_U(A\cup B)]=\frac{x}{3}+1$，$\mathrm{card}(U)=50$，所以，$(63-x)+\frac{x}{3}+1=50$，解之得 $x=21$，由此得$\frac{x}{3}+1=8$.

例5 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$.

(1)若 $A\cap B=A\cup B$，求 a 的值；

(2)若$\varnothing\subsetneqq A\cap B$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

分析：对于第(1)问，要认真分析 $A\cap B=A\cup B$ 的意义. 由于 $A\cap B\subseteq A$，而 $A\cup B=A\cap B$，所以，$A\cup B\subseteq A$，由于$A\subseteq A\cup B$，所以，$A=A\cup B\Rightarrow B\subseteq A$. 又由于 $A\subseteq A\cup B=A\cap B\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$，所以，$A=$

B. 得出 $A=B$ 之后，a 的值很容易求出. 对于第(2)问，要抓住空集$\varnothing$这个特殊集合的意义和性质进行分析，由 $\varnothing \subsetneqq A\cap B$ 可得 $A\cap B\neq\varnothing$，再联系这个条件即可求出 a 的值.

精讲：由已知条件可得：$B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$.

(1)因为 $A\cap B=A\cup B$，所以，必有 $A=B$，于是，2 和 3 是一元二次方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可得$\begin{cases}2+3=a,\\2\times3=a^2-19,\end{cases}$解之得 $a=5$.

(2)由 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$，$A\cap C=\varnothing$得 $3\in A$，$2\notin A$，$-4\notin A$. 由 $3\in A$ 得 $3^2-3a+a^2-19=0$，解之得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，与 $2\notin A$ 矛盾，所以，$a=5$ 应舍去.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$ 符合题意. 所以，符合条件的 a 值为 $a=-2$.

评析：本题最容易出错的是：由 $3\in A$ 得出 $a=5$ 或 $a=-2$ 之后，就认为找到了符合条件的 a 值，于是就下结论：$a=5$ 或 $a=-2$. 事实上，当 $a=5$ 时，集合 $A=\{2,3\}$，$A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$，与已知条件 $A\cap C=\varnothing$矛盾. 为了避免这种错误的发生，较为稳妥的方法是验证法. 将求出的 a 值代入所给条件中进行直接验证，符合题意的作为问题的答案，不符合题意的舍去.

反思与延伸

1. 在集合的运算中，空集$\varnothing$这个特殊的集合具有特殊的意义，由于它的存在，给集合运算增添了丰富多彩的内容. 然而，如果忽略了它，则会给我们的解题带来失误.

例如　已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+3a-5=0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 a 的值. 不少的同学会给出如下解法：

解：$A=\{1,2\}$，因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$，由此得符合条件的集合 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{1,2\}$.

当 $B=\{1\}$ 时，则有$\begin{cases}1+1=a,\\1\times1=3a-5,\end{cases}$此时 $a=2$；

当 $B=\{2\}$ 时，则有$\begin{cases}2+2=a,\\2\times2=3a-5,\end{cases}$无解；

当 $B=\{1,2\}$ 时，则有$\begin{cases}1+2=a,\\1\times2=3a-5,\end{cases}$无解.

因此，符合条件的 $a=2$.

这个解法显然是错误的. 错误的原因是忽略了空集是任意集合的子集这一规定. 事实上，当 $B=\varnothing$时，也满足条件 $B\subseteq A$，此时，方程 $x^2-ax+3a-5=0$ 无实根. 由 $\Delta<0$ 得 $2<a<10$，因此，符合条件的 a 的取值范围应该是 $2\leqslant a<10$.

2. 数形结合的思想在集合运算中有着重要的作用，利用文氏图可以使问题化繁为简；求数集的并、交、补运算，借助数轴可以直观地得出结论.

3. 熟记一些集合的性质和结论，对提高解题能力有帮助. 常用的结论有：①$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，②$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，③$\complement_U(A\cap B)=(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$.

2. 含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

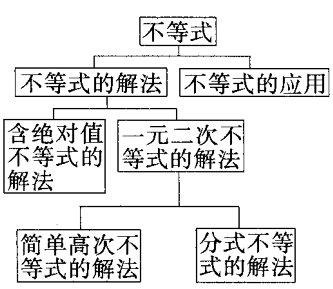
考点与知识

◆考点

含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法；简单的含参不等式的解法；含绝对值的不等式与一元二次不等式的综合应用.

◆知识要点

1. 知识结构框图



2. 几种不等式的解法

(1)含绝对值的不等式的解法.

解含绝对值的不等式的基本思路是：根据绝对值的意义，去掉绝对值符号分类求解；也可利用下列模型进行等价转化求解.

$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$

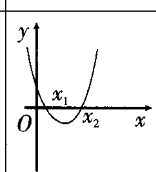
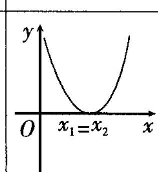
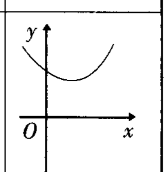
$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$

(2)一元二次不等式的解法.

先计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值. 若 $\Delta<0$，则直接根据下表写出一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集；若 $\Delta\geqslant0$，则先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，再根据下表写出解集.

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个相异实根 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

(3)简单高次不等式的解法.

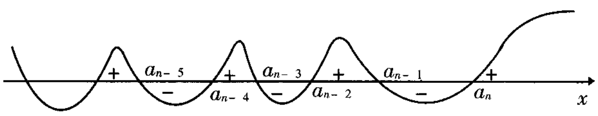
基本思路是:降次;基本方法是:数轴标根法.

设多项式$p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})(x-a_n)$且$a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n$,

则$p(x)>0\Leftrightarrow x\in\cdots\cup(a_{n-2},a_{n-1})\cup(a_n,+\infty)$;

$p(x)<0\Leftrightarrow x\in\cdots\cup(a_{n-3},a_{n-2})\cup(a_{n-1},a_n)$.

上述结论可用如图所示的曲线给予说明,此方法称为数轴标根法.



如果$p(x)>0$或$p(x)<0$的左边有完全平方因式$(x-m)^2$,则需要单独检验$x=m$是否满足不等式.

(4)分式不等式的解法.

基本方法是:转化为整式不等式求解(也可直接利用数轴标根法求解).

$\frac{p(x)}{q(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}p(x)q(x)\leqslant0,\\q(x)\neq0,\end{cases}\frac{p(x)}{q(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}p(x)q(x)\geqslant0,\\q(x)\neq0.\end{cases}$

预习与自查

1. 设不等式$|2x-1|<1$的解集为A,不等式$|x-3|<2$的解集为B,则$A\cup B=$(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{x\mid 1<x<5\}$

C. $\{x\mid 0<x<1$ 或 $1<x<5\}$　　D. $\{x\mid 0<x<5\}$

2. 一元二次不等式$ax^2+bx+c\leqslant0$的解集为全体实数的充要条件是(　　)

A. $\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}a>0\\\Delta\leqslant0\end{cases}$

C. $\begin{cases}a<0\\\Delta\leqslant0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$

3. 不等式$\frac{x-3}{x-2}\leqslant0$的解集为$A$,不等式$(x^2+1)(x-a)>0$的解集为$B$,若$A\subsetneqq B$,则$a$的取值范围是________.

4. 不等式$(x+2)(2x^2-7x+3)<0$的解集是________.

5. 不等式$\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$对任意实数$x$都成立,则实数$k$的取值范围是________.

精讲与精析

例1　解不等式$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant1$.

分析:将原不等式转化为不等式组$\begin{cases}\frac{3x}{x^2-4}\geqslant-1\\\frac{3x}{x^2-4}\leqslant1\end{cases}$求解.

答案:原不等式的解集为$\{x\mid x\leqslant-4$ 或 $-1\leqslant x\leqslant1$ 或 $x\geqslant4\}$.

例2　解不等式$|x+1|>2-x$.

分析:解形如$|f(x)|>g(x)$的绝对值不等式,基本思路是:先去掉绝对值符号再求解,去绝对值符号的操作步骤是:根据绝对值的定义,分$f(x)\geqslant0$和$f(x)<0$两种情况,分别去掉绝对值符号,将原不等式转化为两个不等式组来求解.

精讲:根据绝对值的定义可知:$|x+1|=\begin{cases}x+1(x\geqslant-1)\\-x-1(x<-1)\end{cases}$,

于是,原不等式可等价变形为$\begin{cases}x+1\geqslant0\\x+1>2-x\end{cases}$…①或$\begin{cases}x+1<0\\-x-1>2-x\end{cases}$…②,由①得$\begin{cases}x\geqslant-1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}$,即$x>\frac{1}{2}$;由②得$\begin{cases}x<-1\\-1>2\end{cases}$,此不等式组无解.

由此可得原不等式的解集为$\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$.

评析:1. 本题也可以对$2-x$进行分类讨论求解. 原不等式可转化为$\begin{cases}2-x\geqslant0\\|x+1|^2>(2-x)^2\end{cases}$…①或$\begin{cases}2-x<0\\x\in\mathbf{R}\end{cases}$…②,由①得$\frac{1}{2}<x\leqslant2$,由②得$x>2$,由此得原不等式的解集为$\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$.

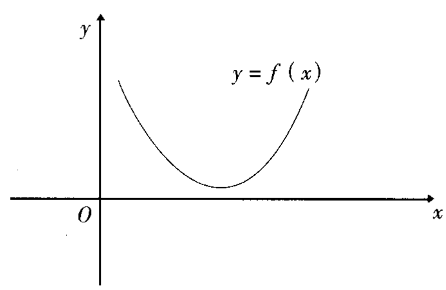
2. 一般地,对于形如$|f(x)|>g(x)$的绝对值不等式我们可以将它转化为$f(x)>g(x)$或$f(x)<-g(x)$来求解,其转化过程留给读者去研究.

例3　对一切非负实数x,不等式$(5-p)x^2-6x+p+5>0$恒成立,求实数p的取值范围.

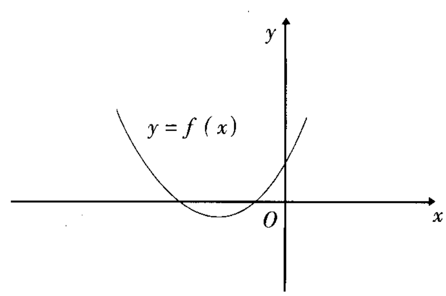
分析:分$5-p=0$和$5-p\neq0$两种情况讨论来求解. 当$p=5$时,显然不满足条件;当$p\neq5$时,所给不等式是一个一元二次不等式,将它转化为相应的二次函数来处理. 借助二次函数$f(x)=(5-p)x^2-6x+p+5$的图象,可直观地求出p的取值范围.

精讲:令$f(x)=(5-p)x^2-6x+p+5$,当$p=5$时,$f(x)=-6x+10$是一个一次函数,不满足题设条件;当$p\neq5$时,$f(x)=(5-p)x^2-6x+p+5$是一个关于x的二次函数,由二次函数的图象可知,要使$x\geqslant0$时,$f(x)>0$恒成立,有两种情况:

①开口向上,与x轴无交点,如图所示.



②开口向上,与x轴有交点,但交点都在x轴的负半轴上,如图所示.



在①的情况之下，应有 $5-p>0$ 且 $\Delta=36-4(5-p)(p+5)=4(p^2-16)<0$，解之得 $-4<p<4$.

在②的情况之下，应有 $5-p>0$，$\frac{3}{5-p}<0$ 且 $f(0)>0$，这不可能.

综上所述，可得 p 的取值范围是 $(-4,4)$.

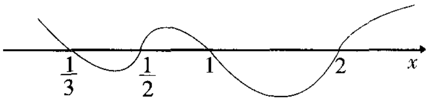
评析：将一元二次不等式的相关问题转化为相应的二次函数来处理，可以借助二次函数图象的直观性，使问题化繁为简，化难为易，尤其是关于恒成立问题，利用图象的直观性更为简捷.

例4　解下列分式不等式.

(1) $\frac{x^2-4x+1}{3x^2-7x+2}<1$；　　(2) $\frac{x-2a}{x-a^2}>0$.

(1)分析：由于分母 $3x^2-7x+2$ 的符号不能确定，所以，不能采用去分母的方法来求解．应先将所给的分式不等式转化为 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ 的形式，然后将分子、分母分解因式，再利用数轴标根法来求解．

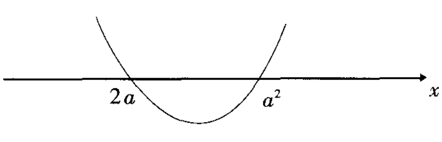
精讲：原不等式可变形为 $\frac{-2x^2+3x-1}{3x^2-7x+2}<0$，将分子、分母分别分解因式得 $\frac{(2x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-2)}>0$，利用数轴标根法解之得解集为 $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$，如图所示.



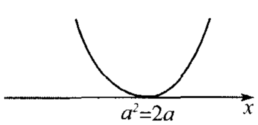
评析：解形如 $\frac{f(x)}{g(x)}>a$ 的分式不等式，最容易出错的是：不考虑分母 $g(x)$ 的取值范围，直接将它变形为 $f(x)>ag(x)$ 来求解，这显然是一种错误的变形，因为 $g(x)$ 取正、取负在没有确定之前，这种变形是没有依据的，是错误的．一般地，求解形如 $\frac{f(x)}{g(x)}>a$ 的分式不等式，基本方法是：先将它变形为 $\frac{f(x)}{g(x)}-a>0$，再变形为 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$，然后将分子、分母分解因式，再利用数轴标根法求得解集.

(2)分析：要确定不等式 $\frac{x-2a}{x-a^2}>0$ 的解集，需要比较 $2a$ 与 a^2 的大小关系，由 $2a<a^2$ 解之得 $a<0$ 或 $a>2$，由此可知，当 $a<0$ 或 $a>2$ 时，$2a<a^2$；当 $0<a<2$ 时，$2a>a^2$；当 $a=0$ 或 $a=2$ 时，$2a=a^2$．得出 $2a$ 与 a^2 的大小关系之后，再利用数轴标根法即可求出原不等式的解集．

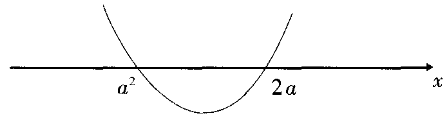
精讲：当 $a<0$ 或 $a>2$ 时，$2a<a^2$，由图可知，原不等式的解集为 $(-\infty,2a)\cup(a^2,+\infty)$.



当 $a=0$ 或 $a=2$ 时，$2a=a^2$，原不等式的解集为 $(-\infty,2a)\cup(2a,+\infty)$.



当 $0<a<2$ 时，$2a>a^2$，由图可知，原不等式的解集为 $(-\infty,a^2)\cup(2a,+\infty)$.



评析：解含有参数的不等式，其解集由参数的取值范围而确定，确定参数的取值范围通常由根的大小比较得出参数的范围.

反思与延伸

1. 对于 $|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a(a>0)$ 和 $|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a(a>0)$ 这两个模型的不等式，可以将它们推广为：

$|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 和 $|f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x)$ 或 $f(x)\leqslant -g(x)$，利用这一结论，对解形如 $|f(x)|\leqslant g(x)$ 和 $|f(x)|\geqslant g(x)$ 的绝对值不等式可以简化解题过程.

2. 对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 的求解，首先要考虑二次项系数 a 的符号．如果 $a<0$，则应利用不等式的性质，将二次项系数转化为正数，然后计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，若 $\Delta<0$，则直接写出解集；若 $\Delta\geqslant0$，则先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，再结合二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象写出解集．如果 $a>0$，则直接计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，然后按照上述方法求出解集.

3. 对于分式不等式的求解，基本思路是将它转化为整式不等式来求解，也可以直接将分子、分母分解因式之后利用数轴标根法求解.

4. 利用数轴标根法求解简单的高次不等式时，应注意两点：

(1)因式分解要化为标准型：即每个因式中 x 的系数应为正．其标准型为：$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0$ 或 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)<0$.

(2)在数轴上标根时要按照根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的大小顺序依次排列，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，画曲线时要从数 a_n 的右侧从上往下依次穿过根 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$ 对应的点，如图所示，则曲线在 x 轴上方的部分对应的点的横坐标 x 满足条件 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0$，在 x 轴下方的部分对应的点的横坐标 x 满足条件 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)<0$，由此即可确定不等式的解集．当因式中含有完全平方式 $(x-a)^2$ 时，则需要对 $x=a$ 进行单独检验.

3. 简易逻辑

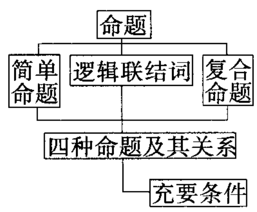
考点与知识

◆考点

(1)判断命题的真假性;(2)探索复合命题的等价性;(3)判断条件的充分性和必要性;(4)探求结论成立的充要条件;(5)反证法证题的操作步骤.

◆知识要点

1. 知识结构框图



2. 相关知识点

(1)常用的逻辑联结词有"或"、"且"、"非".

(2)不含逻辑联结词构成的命题称为简单命题.

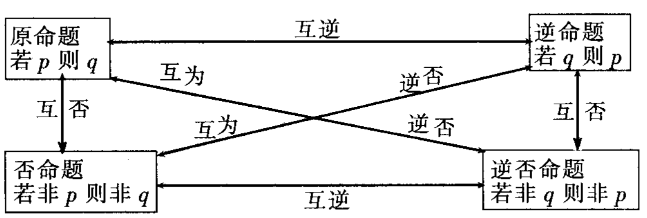
(3)由简单命题与逻辑联结词构成的命题称为复合命题.

(4)命题 p 与非 p 不可同真同假,p 真非 p 假,p 假非 p 真.

(5)当命题 p 与 q 同真时,p 且 q 为真,其余情况均为假.

(6)当命题 p 与 q 都为假时,p 或 q 为假,其余情况为真.

(7)原命题、逆命题、否命题和逆否命题之间有如下关系:



原命题为真,它的逆命题不一定为真;它的否命题也不一定为真;原命题为真,它的逆否命题一定为真.

(8)若 p 则 q 是真命题,即 $p\Rightarrow q$,则称 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

若有 $p\Leftrightarrow q$,则称 p 是 q 的充要条件.

(9)反证法是通过证明命题结论的反面不成立而肯定命题成立的一种数学证明方法. 用反证法证明命题成立的关键在于导出矛盾.

预习与自查

1. 下列语句中构成真命题的是(　　)

A. 各边相等的四边形是正方形

B. 如果 $b^2-4ac>0$,那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根

C. 如果点 P 到 A,B 两点的距离相等,那么 P 点在线段 AB 的垂直平分线上

D. $\triangle ABC$ 的外心必定在$\triangle ABC$ 的外部

2. 由下列各组命题构成"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题中,p 或 q 为真,p 且 q 为假,非 p 为真的是(　　)

A. p:3 是偶数,q:4 是奇数

B. $p:3+2=6$,$q:5>3$

C. $p:a\in\{a,b\}$,$q:\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$

D. $p:\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$,$q:\mathbf{N}=\mathbf{N}^*$

3. 用反证法证明命题"若 $a\in\mathbf{R}$,$3+a$ 是无理数,则 a 是无理数"的过程如下:

假设 a 是有理数,根据有理数的运算法则,$3+a$ 是有理数,这与________矛盾,所以,假设不成立,原命题正确.

4. 用逻辑联结词填空,使得到的命题是一个真命题.

(1)若 $x\in A\cup B$,则 $x\in A$ ________ $x\in B$;

(2)若 $x\in A\cap B$,则 $x\in A$ ________ $x\in B$;

(3)若 $ab\neq0$,则 $a\neq0$ ________ $b\neq0$;

(4)若 $a^2-b^2=0$,则 $a=b$ ________ $a=-b$.

5. 给出下列命题:

①"$x+2=0$"是"$x=-2$"的充要条件;

②"$a^2>5$"是"$a^2>2$"的充分不必要条件;

③"$-2<x<0$"是"$|x|<2$"的必要不充分条件;

④"$(x+3)^2+(y-4)^2=0$"是"$(x+3)(y-4)=0$"的既不必要也不充分条件.

其中,真命题的序号是__________.

精讲与精析

例 1　对于任意实数 a,b,c,给出下列四个命题:

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件;

②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件;

③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件;

④"$a<5$"是"$a<3$"的必要不充分条件.

其中真命题的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

分析:根据充分条件、必要条件和充要条件的定义进行判断.

答案:②,④为真命题,选 B.

例 2　对命题 p:"1 是集合$\{x|x^2<a\}$中的元素",q:"2 是集合$\{x|x^2<a\}$中的元素",则实数 a 为何值时,"p 或 q"是真命题? a 为何值时,"p 且 q"是真命题?

分析:先化简命题 p 和 q,然后根据"p 或 q"与"p 且 q"是真命题的真值表去寻找使它们成立的条件 .

精讲:因为 1 是集合$\{x|x^2<a\}$中的元素,所以,有 $a>1$;又因为 2 是集合$\{x|x^2<a\}$中的元素,所以,有 $a>4$.

由于"p 或 q"是真命题,所以,应有$\{a|a>1\}\cup\{a|a>4\}=\{a|a>1\}$,由此可知,当 $a>1$ 时,"p 或 q"是真命题.

由于"p 且 q"是真命题,所以,$\{a|a>1\}\cap\{a|a>4\}=\{a|a>4\}$,由此可知,当 $a>4$ 时,"p 且 q"是真命题.

评析:将逻辑联结词"或"、"且"与集合中的"并"、"交"运

算相对应是解决本题的关键.

例3 给出条件 $p:x\sqrt{2x+3}=x^2$,条件 $q:2x+3=x^2$,试说明 p 是 q 的什么条件?并说明判断理由.

分析:从集合的观点来分析充分条件和必要条件,本题只需说明满足条件 p 的方程的根构成的集合与满足条件 q 的方程的根构成的集合之间存在什么关系即可.

精讲:由方程 $x\sqrt{2x+3}=x^2$ 得 $x=0$ 或 $\sqrt{2x+3}=x$,解之得 $x=0$ 或 $x=3$,满足条件 p 的方程的根构成的集合 $A=\{0,3\}$.

由方程 $2x+3=x^2$ 得 $x=3$ 或 $x=-1$,满足条件 q 的方程的根构成的集合 $B=\{-1,3\}$.

显然,A、B 之间不存在包含关系,即 $A\not\subseteq B$,且 $B\not\subseteq A$,因此,p 既不是 q 的充分条件,又不是 q 的必要条件.

评析:利用集合的观点来认识充分条件和必要条件有如下结论:若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件;若 $A\supseteq B$,则 A 是 B 的必要条件;若 $A\not\subseteq B$,$A\not\supseteq B$,则 A 不是 B 的充分条件,也不是 B 的必要条件. 对于方程或不等式构成的命题,利用集合的观点来判断充分条件和必要条件是十分方便的.

例4 写出命题"已知 a 与 b 都是正有理数,若$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数,则$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$都是无理数"的逆命题、否命题和逆否命题. 分别指出四种命题的真假,并说明理由.

分析:题目中的"已知 a 与 b 都是正有理数"是大前提,写其他三种命题时大前提不改变. 说明一个命题是假命题,只需举一个反例即可;说明一个命题是真命题,必须给出证明,当直接证明有困难时,可考虑用反证法.

精讲:原命题是假命题. 取 $a=2,b=4,\sqrt{a}+\sqrt{b}=2+\sqrt{2}$是无理数,$\sqrt{b}=\sqrt{4}=2$ 不是无理数.

逆命题:"已知 a 与 b 都是正有理数,若$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$都是无理数,则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数".

逆命题是真命题,用反证法证明如下:

假设$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是有理数,则$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b\cdots(*)$,由 $a>0,b>0$ 得$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$,由$(*)$式得$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,因为 a,b 是正有理数,$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是正有理数,所以,$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$是有理数,即$\sqrt{a}-\sqrt{b}$是有理数,又因为$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是有理数,所以,$(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{b})$是有理数,即$(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{b})=2\sqrt{a}$是有理数,从而$\sqrt{a}$是有理数,这与已知条件$\sqrt{a}$是无理数矛盾,所以,$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数.

否命题:"已知 a 与 b 都是正有理数,若$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是有理数,则$\sqrt{a}$或$\sqrt{b}$是有理数". 因为否命题与逆命题互为逆否命题,它们同真同假,由于逆命题为真,所以,否命题也为真.

逆否命题:"已知 a 与 b 都是正有理数,若$\sqrt{a}$或$\sqrt{b}$是有理数,则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是有理数",因为逆否命题与原命题同真同假,而原命题是假命题,所以,逆否命题也是假命题.

评析:将一个命题否定,要注意逻辑联结词的否定. 如本题中否命题的写法,否命题的结论应该是"$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$都是无理数"的否定. 事实上,"$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$都是无理数"的等价说法是:$\sqrt{a}$是无理数且$\sqrt{b}$是无理数,因此,它的否定应该是:$\sqrt{a}$是有理数或$\sqrt{b}$是有理数,"且"的否定是"或","或"的否定是"且","且"与"或"互为否定词.

例5 已知 $p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,且$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要条件,求实数 m 的取值范围.

分析:利用集合的观点来分析所给的问题. 先写出$\neg p$ 和$\neg q$ 的最简形式,然后由$\neg q\Rightarrow\neg p$ 即可确定 m 的取值范围.

精讲:由$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 10$;$p:M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 10\}$,$\neg p:A=\complement_{\mathbf{R}}M=\{x\mid x<-2$ 或 $x>10\}$

由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ 得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$,$q:N=\{x\mid 1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$,$\neg q:B=\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\mid x<1-m$ 或 $x>1+m,m>0\}$

因为$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要条件,则有$\neg q\Rightarrow\neg p$,$B\subseteq A$,由此得$\begin{cases}m>0\\1-m\leqslant -2\\1+m\geqslant 10\end{cases}$,解之得 $m\geqslant 9$.

评析:在涉及字母参数的取值范围的充要条件的问题中,一般地,利用集合之间的包含或相等关系来处理这一类问题较为简捷.

反思与延伸

1. 命题的否定和否命题是两个不同的概念. 设原命题为"若 p 则 q",那么,此命题的否定是:"若 p 则$\neg q$",此命题的否命题是:"若$\neg p$ 则$\neg q$".

2. 对复合命题的否定,要注意对逻辑联结词的否定. 一般地,有如下结论:

非(p 且 q)$\Longleftrightarrow$非 p 或非 $q\Leftrightarrow\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

非(p 或 q)$\Longleftrightarrow$非 p 且非 $q\Leftrightarrow\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

3. 判断原命题、逆命题、否命题和逆否命题的真假,只需判断原命题和逆命题的真假即可. 因为原命题与逆否命题,逆命题与否命题都是互为逆否的关系,它们同真同假. 当我们直接判断一个命题是真命题或假命题有困难时,我们可以改为判断它的逆否命题的真假,这样往往可以使问题化难为易.

4. 运用集合的观点去认识充分条件和必要条件,可以使问题简化. 一般地,若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件;若 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件.

5. 反证法是一种重要的数学证明方法. 当我们直接证明一个数学命题感到困难时,可以考虑使用反证法. 运用反证法证明一个数学命题"若 p 则 q"的关键步骤是导出矛盾. 矛盾的产生通常有以下几种形式:(1)导出$\neg p$ 为真,与原命题的条件 p 为真矛盾;(2)导出 q 为真,与假设$\neg q$ 为真矛盾;(3)导出一个恒假的命题.

4. 全章回眸

本章高考解读

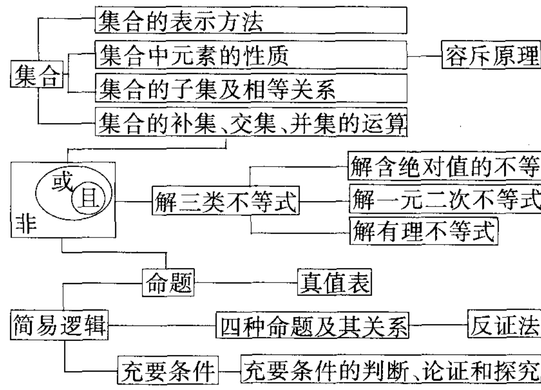
集合与简易逻辑是新课程的奠基内容，也是整个中学数学的基础. 它的基础性主要体现在两个方面. 第一，集合的语言、集合的符号和集合的思想在高中数学的许多章节如函数与数列，方程与不等式，立体几何与解析几何中都被广泛使用，可以说集合这个概念几乎覆盖了整个高中数学；第二，数学离不开变换与推理，而变换与推理又离不开命题、充要条件和逻辑联结词，因为它们是全面理解概念，准确表述判断和正确实施推理的重要工具.

集合与简易逻辑这部分内容蕴涵着丰富多彩的数学思想，如集合与函数的思想，等价转化的思想，分类讨论的思想和数形结合的思想等.

近几年的高考试题，关于集合与简易逻辑这部分内容的题目，可分为两大类：一类是集合与不等式（绝对值不等式、一元二次不等式和分式不等式）、命题与充要条件单列的基础题，这类题目通常以选择题和填空题的形式出现. 如2003年上海卷第5题，2002年全国卷第5题，2004年全国卷第1题，2004年浙江卷第1题，2004年江苏卷第1题，2005年全国卷第2题，2005年上海卷第14题，北京卷第1题，2006年全国卷Ⅰ第1题，2006年江苏卷第7题等，都是以选择题和填空题的形式直接判断集合与元素的关系和直接求集合的并、交、补运算，都属于容易题. 又例如2003年上海卷第6题，2003年天津卷第4题，2004年重庆卷第4题，2002年天津卷第2题，2005年广东卷第1题，2005年江西卷第1题，2005年福建卷第7题，2006年四川卷第1题，2006年福建卷第4题，2006年江西卷第1题等，都是以选择题和填空题的形式直接求出绝对值不等式、一元二次不等式和分式不等式的解集，都属于容易题. 又例如2003年上海卷第16题，2002年北京卷第15题，2004年全国卷第16题，2005年湖北卷第2题，2005年天津卷第3题，2006年湖北卷第8题，2006年山东卷第16题等，都是以选择题和填空题的形式直接判断命题的真假性. 再例如2003年北京卷第3题，2003年上海卷第15题，2004年上海卷第14题，2004年辽宁卷第3题，2004年天津卷第8题，2004年重庆卷第7题，2005年江西卷第3题，2005年重庆卷第6题，2005年山东卷第10题，2006年天津卷第4题，2006年湖南卷第4题，2006年浙江卷第7题等，都是以选择题和填空题的形式直接判断充分条件或必要条件的基础题. 另一类是集合与不等式，命题与充要条件融合在其他内容中的综合性题目，如2003年全国卷第19题，第22题，2001年全国卷第21题，2002年上海卷第22题，2005年全国卷第17题，2005年江西卷第17题，2006年上海卷第20题等，这一类题目渗透了丰富的数学思想，体现了灵活的数学方法，常常作为压轴题来考查学生的创新能力.

本章内容考试的重点是集合的概念与运算，条件的充要性的判定，命题真假性的判断；难点是集合思想的灵活运用，充要条件的论证，复合命题真假性的判断.

知识结构框图



典型题目剖析

例1 已知集合 $A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=a+1\}$，集合 $B=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)y=30\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的值.

分析：集合 A 的几何意义是：一条直线 $l_1: y-3=(a+1)(x-2)$ 去掉一个点 $M(2,3)$；集合 B 的几何意义是：当 $a\neq1$ 时，表示一条直线 $l_2:(a^2-1)x+(a-1)y=30$，当 $a=1$ 时，$B=\varnothing$. 条件 $A\cap B=\varnothing$ 的几何意义是 $l_1 /\!/ l_2$，反映在代数上，就是由 l_1 与 l_2 的方程组成的方程组无解，通过方程组无解的分析，即可求出实数 a 的值.

精讲：由条件 $A\cap B=\varnothing$ 可知，方程组 $\begin{cases}\frac{y-3}{x-2}=a+1,\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\end{cases}$ …①

无解，也就是混合组 $\begin{cases}x\neq2,\\y-3=(a+1)(x-2),\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\end{cases}$ …②. 由②消去 y 得 $2(a^2-1)x=2a^2-3a+31$ …③，当 $a^2=1$ 时，方程③无解，此时，混合组②也无解；当 $a^2\neq1$ 时，由②得 $x=\frac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}$，令 $\frac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}=2$，解之得 $a=-5$ 或 $a=\frac{7}{2}$，因为混合组②中 $x\neq2$，所以，当 $a=-5$ 或 $a=\frac{7}{2}$ 时，方程组①无解.

综上所述，符合条件的实数 $a=1,-1,-5$ 或 $\frac{7}{2}$.

评析：本题的求解过程体现了等价转化的思想.

将条件 $A\cap B=\varnothing$ 转化为方程组

$\begin{cases}\frac{y-3}{x-2}=a+1,\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\end{cases}$ 无解，通过对方程组无解的条件进行分析，求出了符合条件的 a 的值，这是从数的角度进行等价转