

工科研究生入学 考试指导



材料力学

莫 骄 主编



中国电力出版社

www.cepp.com.cn

TE301/150

2008

本书为工科研究生入学考试指导用书，内容全面，重点突出，可作为工科研究生入学考试复习用书，也可作为工科研究生入学考试的参考书。

工科研究生入学 考试指导



材料力学

莫 骄 主编

本书为工科研究生入学考试指导用书，内容全面，重点突出，可作为工科研究生入学考试复习用书，也可作为工科研究生入学考试的参考书。

内容简介

本书为工科研究生入学考试指导用书，内容全面，重点突出，可作为工科研究生入学考试复习用书，也可作为工科研究生入学考试的参考书。

本书为工科研究生入学考试指导用书，内容全面，重点突出，可作为工科研究生入学考试复习用书，也可作为工科研究生入学考试的参考书。

本书为工科研究生入学考试指导用书，内容全面，重点突出，可作为工科研究生入学考试复习用书，也可作为工科研究生入学考试的参考书。



中国电力出版社

www.cepp.com.cn

本书根据各高校的考研参考教材和历年考研试题编写而成。全书主要包括:材料力学备考指南、轴向拉压、剪切与扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力与应变分析及强度理论、组合变形、能量法和静不定结构、动荷载与交变应力、压杆稳定等。书中各章均有考试重点难点分析、典型例题分析和练习题,典型例题分析和练习题选自各名校的典型考题、材料力学经典习题。书的最后还附有最新的考试模拟题。

本书可作为高等院校土建类、机械类等工科专业学生的考研复习用书,也可作为教学及工程技术人员、大学生学习材料力学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学/莫骄主编. —北京:中国电力出版社,2008

(工科研究生入学考试指导丛书)

ISBN 978-7-5083-7429-1

I. 材… II. 莫… III. 材料力学—研究生—入学考试—
自学参考资料 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 088808 号

中国电力出版社出版发行

北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>

责任编辑:未翠霞 责任印制:陈汉兵 责任校对:王瑞秋

北京同江印刷厂印刷·各地新华书店经售

2008 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·18.5 印张·462 千字

定价:39.80 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

本社购书热线电话(010—88386685)

前 言

近几年,考研已成为很多大学毕业生的第一选择,2008 年的考研人数在 135 万左右,占到毕业生总数的 1/3 以上。而对任何一个准备考研的同学来说,一本好的专业课复习参考资料往往能使他们的复习更有目的性。编者通过对部分高校的大三大四学生考研情况的调查,并认真总结,根据读者的要求编写出版了《工科研究生入学考试指导丛书》。本套丛书集全面与务实为一体,主要具有以下特点:

1. 在书的第一章分析本书所列专业课的考试要求,并用实例教会考生应怎样决定方向,怎样查找资料,这是所有考研书籍中从来都没有包含,却的确为读者所关心的问题。正所谓好的开始就是成功的一半,所以读者要认真研读第一章。

2. 为每个考试点(按章为考试点)列出考试重点和难点分析,考试重点是通过查阅各校历年的真题精练出来的,帮助考生有重点的复习,做到有的放矢。难点分析是根据作者的教学经验提炼出来的,帮助考生再一次的梳理知识,为做好例题和习题做准备。

3. 根据每个考试点(按章为考试点)做出典型例题分析和习题解答。典型例题分析从各校历年真题和各专业习题库中选取有代表性的例题并做出了详细解答,有的例题用两三种方法来解答。本书还为每道习题都做出了详细的解答,就是想通过标准的答题方式来帮助考生养成答题的良好习惯,为考试中多拿分、拿高分做准备。

4. 作者根据研究生入学考试的特殊性,收集和整理了部分高校的历年真题并编写了模拟题。每份真题都是一份优秀的考卷,作者选取了其中有代表性的真题。希望读者对这些好的真题多做几遍,并多总结。

由于时间仓促,作者水平有限,书中难免有不足之处,欢迎读者批评指正。祝所有考生考试顺利!

编 者

目 录

前言

第一章 材料力学备考指南	1
一、查找初试招生专业目录	1
二、招生情况统计说明	2
三、毕业生就业情况	3
四、考试看书计划	3
第二章 轴向拉压	4
第一节 重点难点分析与典型例题分析	4
一、重点难点分析	4
二、典型例题分析	7
第二节 练习题	11
参考答案	14
第三章 剪切与扭转	24
第一节 重点难点分析与典型例题分析	24
一、重点难点分析	24
二、典型例题分析	28
第二节 练习题	32
参考答案	36
第四章 弯曲内力	42
第一节 重点难点分析与典型例题分析	42
一、重点难点分析	42
二、典型例题分析	45
第二节 练习题	51
参考答案	53
第五章 弯曲应力	56
第一节 重点难点分析与典型例题分析	56

一、重点难点分析·····	56
二、典型例题分析·····	60
第二节 练习题·····	69
参考答案·····	72
第六章 弯曲变形 ·····	81
第一节 重点难点分析与典型例题分析·····	81
一、重点难点分析·····	81
二、典型例题分析·····	84
第二节 练习题·····	94
参考答案·····	96
第七章 应力与应变分析及强度理论 ·····	106
第一节 重点难点分析与典型例题分析·····	106
一、重点难点分析·····	106
二、典型例题分析·····	113
第二节 练习题·····	128
参考答案·····	132
第八章 组合变形 ·····	144
第一节 重点难点分析与典型例题分析·····	144
一、重点难点分析·····	144
二、典型例题分析·····	148
第二节 练习题·····	162
参考答案·····	166
第九章 能量法和静不定结构 ·····	181
第一节 重点难点分析与典型例题分析·····	181
一、重点难点分析·····	181
二、典型例题分析·····	185
第二节 练习题·····	206
参考答案·····	209
第十章 动荷载与交变应力 ·····	222
第一节 重点难点分析与典型例题分析·····	222
一、重点难点分析·····	222
二、典型例题分析·····	223

第二节 练习题.....	232
参考答案.....	234
第十一章 压杆稳定	242
第一节 重点难点分析与典型例题分析.....	242
一、重点难点分析	242
二、典型例题分析	244
第二节 练习题.....	252
参考答案.....	254
第十二章 模拟题	263
模拟题一.....	263
参考答案.....	265
模拟题二.....	272
参考答案.....	274
模拟题三.....	281
参考答案.....	283
参考文献	289

第一章 材料力学备考指南

考生应根据自己的实际情况(学习、经历)选择好自己心仪的学校,并按照以下的顺序做好自己的考试准备。

一、查找初试招生专业目录

以 2008 年北京大学工学院研究生招生专业目录(部分)为例说明,见表 1-1。查找出与考试科目、考试教材(北大没有规定参考教材)有关的信息。一般找到参考书目就可以做到有的放矢。

表 1-1 2008 年北京大学工学院研究生招生专业目录(部分)

系所名称	工学院
招生总数	68 人
系所说明	其中拟接收推荐免试生 55 人。力学学科专业只招收五年制硕博连读生,中间不授硕士学位。 控制理论与控制工程和生物医学工程专业只招收硕士生
招生专业:一般力学与力学基础(080101) 人数:5	
研究方向	01. 控制理论与应用 02. 机器人动力学与控制 03. 航天器动力学与控制
考试科目	报考本专业的考生还可选考北京大学数学科学学院、信息科学技术学院的任一组考试科目
1	101 政治 201 英
2	664 综合考试[含数学分析、线性代数与几何、常微分方程、理论力学(上)]
3	952 一般力学综合[含理论力学(下)、流体力学、材料力学、弹性力学]
招生专业:固体力学(080102) 人数:8	
研究方向	01. 弹塑性力学 02. 复合材料力学 03. 纳米材料的力学行为 04. 实验固体力学 05. 振动和波动理论 06. 计算固体力学 07. 冲击动力学 08. 塑性力学
考试科目	本专业考试科目 2 须根据方向选考;其中方向 01~06 限选英语,方向 07~08 为英、日选一。报考本专业的考生还可选考北京大学数学科学学院计算数学专业的考试科目。
1	101 政治 201 英 203 日任选一门
2	664 综合考试[含数学分析、线性代数与几何、常微分方程、理论力学(上)]
3	950 固体力学综合[含理论力学(下)、材料力学、弹性力学]
招生专业:流体力学(080103) 人数:15	
研究方向	01. 湍流理论及数值模拟 02. 计算流体力学 03. 实验流体力学 04. 生物力学 05. 生态热力学 06. 非牛顿流体力学 07. 环境资源与系统生态学 08. 水文、水资源 09. 油气田工程 10. 地热工程 11. 燃烧技术研发

续表

系所名称	工学院
1	101 政治 201 英
2	664 综合考试 [含数学分析、线性代数与几何、常微分方程、理论力学(上)]
3	951 流体力学综合[含理论力学(下)、流体力学]
招生专业:工程力学(080104) 人数:12	
研究方向	01. 大规模工程与科学计算 02. 计算结构力学 03. 风工程与工业空气动力学 04. 力学实验与技术 05. 复合材料工艺与性能 06. 功能材料 07. 计算材料
考试科目	报考本专业 05~08 方向的考生还可选考北京大学化学与分子工程学院、物理学院、生命科学学院任一组考试科目
1	101 政治 201 英
2	664 综合考试 [含数学分析、线性代数与几何、常微分方程、理论力学(上)]
3	949 工程力学综合 [含理论力学(下)、工程流体力学、弹性力学、材料力学]

二、招生情况统计说明

考生要找到关于历年招生情况的统计说明,做到心中有数,明确自己的位置,以北京大学工学院为例说明(表 1-2)。

表 1-2 招生情况统计

	2002 年			2003 年			2004 年			2005 年			2006、 2007 年
	报考	录取	百分比	报考	录取	百分比	报考	录取	百分比	报考	录取	百分比	
合计	79	30	37.97	103	20	19.42	76	17	22.37	92	25	27.17	无招生
一般力学与力学基础	9	6	66.67	13	1	7.69	1			2			
固体力学	13	3	23.08	8	4	50.00	3			6	1	16.67	
流体力学	9	6	66.67	69	12	17.39		7		2			
工程力学	45	14	31.11	13	3	23.08		10		9			
控制理论与控制工程	3	1	33.33				10	7	70.00	20	12	60.00	
生物医学工程							62	10	16.13				

力学学科专业只招收五年制硕博连读生,中间不授硕士学位。

2008 年初步调查情况:力学学科专业应试生复试权重为 30%,复试人数比例:≤150%计划招生人数;进入复试的人数为:力学(生物力学与医学工程)1 人,固体力学 1 人,工程力 2 人。2008 年复试分数线见表 1-3。

表 1-3 2008 年复试分数线

	英语	政治	专业课(一)	专业课(二)	总分
工学	50	50	90	90	310

三、毕业生就业情况

很多考生会忽视毕业生就业情况的说明,其实这也是很重要的一步。在考研过程中会出现很多考生自己预料不到的情况,了解报考学校毕业生就业情况可以让考生更有动力去准备考试。例如,北京大学 2006 年毕业研究生共计 3845 人,其中定向、委培生 350 人,不参加派遣的自费生 92 人,可派遣毕业生 2403 人。截至 2006 年 9 月 30 日,可派遣毕业生中就业情况见表 1-4。

表 1-4 可派遣毕业生就业情况

可派遣	出国留学	考取博士(博士后)	实际就业	未就业
2403	362	198	2852	85

总体来看,就业去向布局更加合理,毕业生到党政机关就业的人数比上年增加了 49 人,去事业单位的人数和上年比持平,去企业的人数和上年比有所增加。就业地区看,留京人数比上年增加了 122 人,内地就业比例持续增长,支援西部的人数保持了一定的规模,就业地区的地域分布更加多元化如图 1-1 所示。

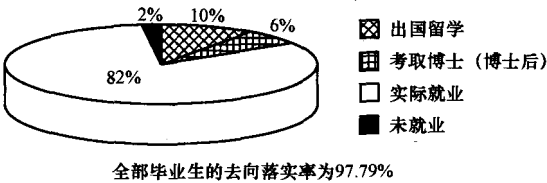


图 1-1

四、考试看书计划

了解到以上信息,考生就得坐下来看书了。一般专业课的复习可以从 9 月份开始。当然在这之前得把所有的信息了解透彻。考生除了对参考教材要滚瓜烂熟外,对历年真题也要熟悉。本书在每章的第一节列出了考试重点、难点,给考生理出清晰的脉络,典型例题列出了历年试题当中的代表题型和材料力学中的经典题型并给出详细的解答。有的例题给出了几种解答方法,考生都应该掌握。值得指出的是,本书的习题也给考生列出了详细的解答,作者是想通过详细的解答给考生列出规范的解答方法,培养考生的答题行为,使考生在考试中尽可能拿高分。根据作者多年的教学经验,还要提醒考生注意的是,在考研过程中,不管是专业课还是公共课,都要多跟同学讨论,“事不辩不明”,在讨论中考生可以发现自己知识的不足,增强对基本概念的理解,也可能讨论出来更为简洁的方法。往往讨论中可以事半功倍,建议考生多多讨论。祝大家考上心仪的学校。

第二章 轴向拉压

第一节 重点难点分析与典型例题分析

一、重点难点分析

1. 考试重点

本章主要介绍材料力学研究的基本假设及基本概念,轴向拉压杆的应力与变形。在各校的历年试题中,本章都有所涉及,但侧重于对基本概念的理解。例如,长安大学,2001年考题“材料力学课程主要研究什么?”即构件的强度、刚度和稳定性问题;国防科技大学2004年考题:对材料力学中变形固体三个基本假设的考察。这些都应该是考生的必拿分。轴向拉压是历年考研必考的内容。有部分学校的判断题中有对轴向拉压概念的理解的考察。本章重点内容主要有:

- (1)材料力学基本假设。
- (2)轴力与轴力图。
- (3)应力与强度条件。
- (4)胡克定律、横向效应。
- (5)材料拉伸(压缩)时的力学性能。
- (6)应力集中概念。
- (7)拉伸(压缩)的静不定问题及解。
- (8)理想弹塑性材料。

2. 难点分析

(1)应力:是内力分布的集度。应力必须指明其作用的截面及该截面内的某一点这两个因素,其单位是 N/m^2 。

(2)正应力:与截面垂直方向的应力。规定与截面外法线 n 方向一致的正应力为正(拉应力),反向为负(压应力),用符号 σ 表示。

(3)剪应力:在截面上与截面相切的应力,用符号 τ 表示。

(4)极限应力:材料丧失工作能力时的应力,用 σ_u 表示。脆性材料的极限应力是强度极限 σ_b ,塑性材料的极限应力是屈服极限 σ_s 。即

$$\sigma_u = \begin{cases} \sigma_b & \text{脆性材料} \\ \sigma_s & \text{塑性材料} \end{cases}$$

(5)强度条件

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = \begin{cases} \sigma_b/n_b \\ \sigma_s/n_s \end{cases} \quad (2-1)$$

式中, $\sigma = N/A$ 称为工作应力, $[\sigma]$ 称为许用应力(容许应力); n_b 、 n_s 分别为脆性材料、塑性材料

的安全系数。

强度条件可以用于:校核构件的强度;设计截面的尺寸或选择型材的型号;设计构件或结构所能承受的最大荷载(许用荷载)。

(6)轴向拉伸(压缩)时斜截面上的应力。

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha & (2-2) \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha & (2-3) \end{cases}$$

式中, σ_0 为横截面上的正应力, α 为斜截面的外法线 n 与轴线 x 轴的夹角, 如图 2-1 所示。显然有

$$\sigma_{\max} = \sigma_\alpha |_{\alpha=0} = \sigma_0 \quad (2-4)$$

此时

$$\tau_\alpha |_{\alpha=0} = 0$$

而

$$\tau_{\max} = \tau_\alpha |_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2} = \sigma_\alpha |_{\alpha=45^\circ}$$

1) 低碳钢拉伸时的力学性能。

① 应力-应变(σ - ϵ) 曲线如图 2-2 所示。该曲线分四个阶段, 即弹性阶段(I), 屈服阶段(II), 强化阶段(III), 颈缩阶段(局部变形阶段)(IV)。



图 2-1

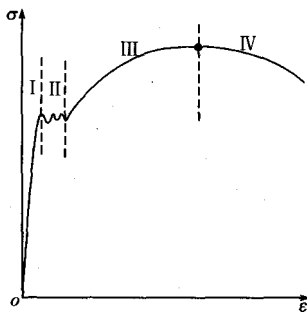


图 2-2

a. 比例极限 σ_p : 弹性阶段内 σ 与 ϵ 成正比的最高应力值。

b. 弹性极限 σ_e : 弹性阶段内的最高应力值。

c. 屈服极限 σ_s : 屈服(流动)阶段的最低应力值。

d. 强度极限 σ_b : 应力-应变曲线中应力最高值。

② 冷作硬化。在强化阶段内任一点 m 处卸载, 则曲线沿着几乎平行于弹性阶段的直线段下降到 n 点, 如图 2-3 所示。再加载时, 则沿 nm 直线上升到达 m 点。此时材料的屈服极限、比例极限以 σ_m 代替, 即材料的屈服极限、比例极限得到了提高, 塑性变形减小, 此现象称为冷作硬化。

③ 延伸率 δ 、截面收缩率 ψ 。

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \quad (2-5)$$

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \quad (2-6)$$

式(2-5)、式(2-6)中的 l 、 A 为变形前试件工作段的长度及横截面面积, l_1 、 A_1 为试件拉断后工作段的长度及最小横截面的面积。 δ 、 ψ 是衡量脆性材料、塑性材料的目标。 $\delta > 5\%$ 的材料称塑性材料, $\delta < 5\%$ 的材料称脆性材料。

2) 铸铁的拉伸与压缩时的力学性能。

① 应力-应变(σ - ϵ)曲线如图 2-4 所示。铸铁的拉伸曲线 1 与压缩曲线 2 均无严格的直线段, 二者的起始阶段可近似看成直线(遵循胡克定律); 二者又无屈服阶段, 直至断裂时变形都很小, 拉伸尤其如此, 试验中只能测得铸铁的强度极限 σ_b 。压缩的强度极限 $(\sigma_b)_c$ 远大于拉伸的强度极限 $(\sigma_b)_t$, 说明铸铁适宜于做抗压的构件。

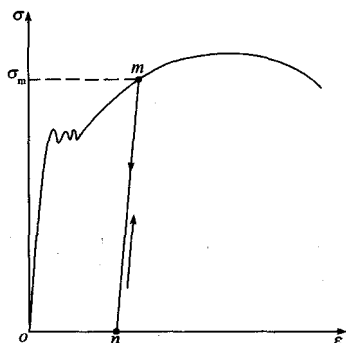


图 2-3

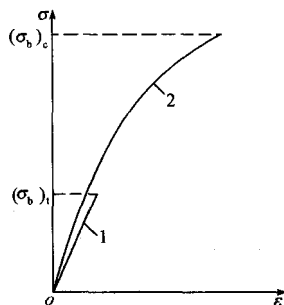


图 2-4

② 破坏断面及破坏原因。图 2-5(a) 表示拉伸试件的断裂面为横截面, 由拉应力引起。图 2-5(b) 表示压缩试件的断裂面为斜截面, 由剪应力引起, 斜截面外法线与轴线夹角 α 为 $45^\circ \sim 55^\circ$ 左右。

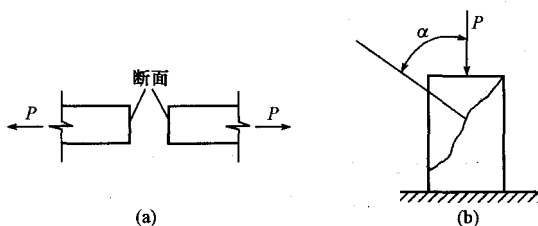


图 2-5

3) 低碳钢的压缩实验。

① 应力-应变(σ - ϵ)曲线如图 2-6 所示。该曲线与拉伸时的 σ - ϵ 曲线(虚线所示)的弹性阶段重合。压缩时的屈服极限 $(\sigma_s)_c$ 与拉伸时的屈服极限 $(\sigma_s)_t$ 相等。试件越压越扁, 呈腰鼓状。

② 由于 $(\sigma_s)_c = (\sigma_s)_t$, 所以低碳钢的抗拉性能与抗压性能相同。

【注意事项】

对于一些没有明显屈服阶段的塑性材料(如铝合金、锰钢等), 通常将对应于塑性应变 $\epsilon = 0.2\% = 0.002$ 时的应力定义为该材料的屈服极限, 称为名义屈服极限, 记为 $\sigma_{0.2}$, 如图 2-7 所示。

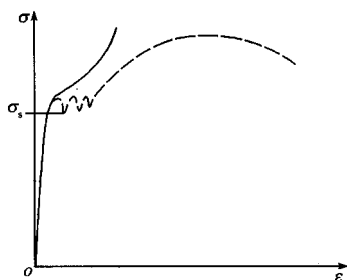


图 2-6

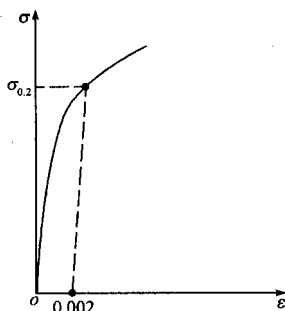


图 2-7

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2-7a)$$

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)}{EA} dx \quad (2-7b)$$

如果 N 、 A 在长度 l 上为常数, 则

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \left(\Delta l = \sum \frac{N_i l_i}{EA_i} \right) \quad (2-7c)$$

式(2-7a)是应力与应变关系的胡克定律, 式(2-7b)和式(2-7c)是变形与内力关系的胡克定律。当轴力或面积为逐段常数时, 采用式(2-7c)中括号内的形式。 E 为弹性模量, EA 称抗拉压刚度。

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon \quad (2-8)$$

式中, ε' 为横向尺寸的线应变; ε 为轴线方向(纵向)的线应变; ν 为泊松比。式(2-8)表明当应力不超过比例极限时, 杆的横向线应变与轴向线应变的大小成正比, 但符号相反。

a. 静力平衡条件。由静力平衡条件, 列出静力平衡方程。

b. 变形几何相容条件。由变形的几何相容条件(连续条件和支座约束条件), 列出变形相容的几何方程。

c. 力-变形间物理关系。由胡克定律, 列出杆件的轴力与变形间的关系方程。

将物理关系代入变形相容方程, 得补充方程。补充方程与静力平衡方程联立, 求解全部未知力。

【注意事项】

(1) 若仅由支座约束数多于维持平衡所必需的约束数而形成的静不定问题, 则采用选取基本静定系(即选择多余约束)的方法较为方便。由补充方程即可解出多余未知力, 而求得多余未知力后, 基本静定系即等效于原静不定结构。

(2) 在计算位移时, 也同样考虑静力平衡、变形几何相容和物理关系三个方面, 但三方面是分别独立地考虑的。而在求解静不定问题时, 三方面需综合考虑。

(3) 静力、几何和物理三方面考虑的方法, 不仅是求解静不定问题的方法, 也是材料力学的基本方法。推而广之, 实质上是研究固体力学的基本方法。

二、典型例题分析

【例 2-1】如图 2-8 示阶梯形圆杆, 其长度与直径分别是 l_1, l_2, d_1, d_2 。若杆的弹性模量为

E , 在 C 作用有轴向力 P , 求 C 截面的轴向位移 Δ_C 。(北京航空航天大学, 2002 年)

解: 设固定端 A 和 B 的支反力分别是 N_A 和 N_B , 对阶梯杆受力分析, 如图 2-9 所示。

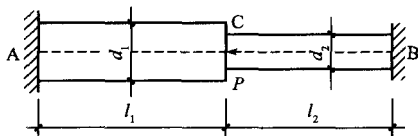


图 2-8

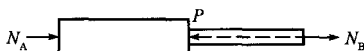


图 2-9

由平衡条件 $\sum F=0$ 得

$$N_A + N_B = P \quad (1)$$

分析阶梯形圆杆的变形协调条件, 有

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{BC} \quad (A, B \text{ 均为固定端, 阶梯形圆杆总长度不变}) \quad (2)$$

由物理方程

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_A l_1}{EA_1} = \frac{N_A l_1}{E \times \frac{\pi}{4} d_1^2} \quad (3)$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_B l_2}{EA_2} = \frac{N_B l_2}{E \times \frac{\pi}{4} d_2^2} \quad (4)$$

联立①②③④得

$$N_A = P \frac{l_2 d_1^2}{l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2}$$

于是

$$\Delta_C = \Delta l_{AC} = \frac{N_A l_1}{E \times \frac{\pi}{4} d_1^2} = 4P \frac{l_1 l_2}{E \pi (l_1 d_2^2 + l_2 d_1^2)} (\leftarrow)$$

分析: 求解拉压静不定问题的基本步骤如下:

(1) 列出问题的平衡方程, 确定问题的静不定次数。

(2) 列变形几何协调方程。找出问题中必须满足的变形协调关系, 其数目即为问题的静不定次数。

(3) 列物理方程, 即胡克定律(变形与受力之间的关系)。

(4) 将几何方程代入物理方程, 得到补充方程(几何方程变为力之间的关系。)

(5) 由平衡方程与补充方程联立即可求出全部未知力。

【例 2-2】 图 2-10 所示杆系的两杆同为钢杆, $E=200\text{GPa}$, $\alpha=12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。两杆的横截面面积同为 10cm^2 , 若 BC 杆的温度降低 20°C , 而 BD 杆的温度不变, 试求两杆的应力。(同济大学, 2002 年)

解: BC 杆降温, 其冷缩受到杆 BD 和支座 B 的约束, 将受拉, BD 杆将受压, 取节点 B 受力分析如图 2-11 所示。

由平衡条件 $\sum F=0$ 得:

$$N_{BC} \cos 30^\circ = N_{BD} \quad (1)$$

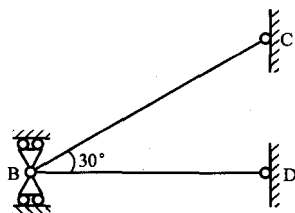


图 2-10

对杆 BC 和 BD 的变形几何分析如图 2-12 所示,其中 BB' 是杆 BC 的收缩量, BB'' 是杆 BD 的收缩量,即

$$\Delta l_{BC} = BB', \Delta l_{BD} = BB''$$

从图中可见

$$\Delta l_{BC} = \Delta l_{BD} \cos 30^\circ \quad (2)$$

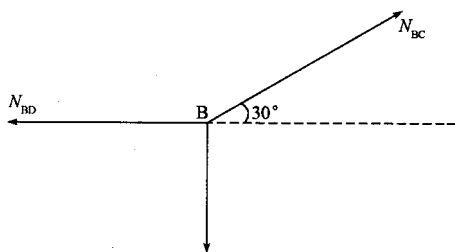


图 2-11

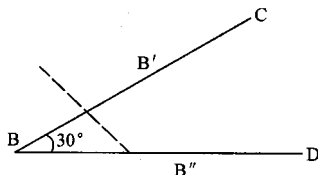


图 2-12

由物理条件

$$\begin{cases} \Delta l_{BC} = -\frac{N_{BC} l_{BC}}{EA} - \alpha \Delta T l_{BC} \\ \Delta l_{BD} = \frac{N_{BD} l_{BD}}{EA} \end{cases} \quad (3)$$

联合①②③④,解出 $N_{BC} = 30.3 \text{ kN}$, $N_{BD} = 26.2 \text{ kN}$

$$\begin{cases} \sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = 30.3 \text{ MPa} \\ \sigma_{BD} = \frac{N_{BD}}{A} = 26.2 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4)$$

即是两杆的应力。

【例 2-3】 直径相同的铸铁圆截面直杆,可设计成图 2-13(a)、(b)所示两种结构的形式,问哪种结构所承受的荷载 P 大? 大多少?

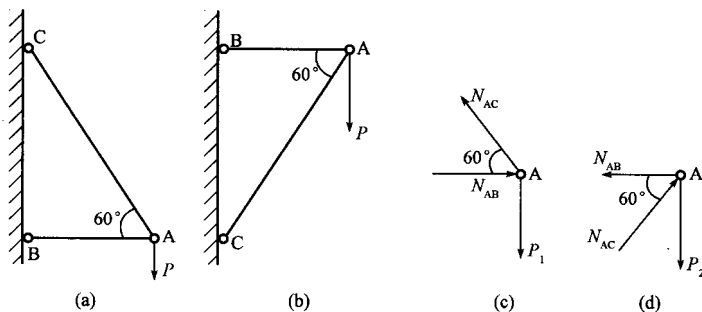


图 2-13

解: 由于杆件材料、截面形状相同,并且为铸铁,属于脆性材料,抗压性能优于抗拉性能,因此比较两种结构的拉应力与 P 的关系。图 2-13(a)中的 AC 杆受拉,取 A 点为受力体,受力图如图 2-13(c)。(σ_b)_t 为拉伸的强度极限。令 $N_{AC} = (\sigma_b)_t A = 2P_1 / \sqrt{3}$, 则

$$P_1 = \frac{\sqrt{3}(\sigma_b)_t A}{2}$$

图 2-13(b)中 AB 杆受拉,取 A 点为受力体,受力图如图 2-13(d)。

令 $N_{AB} = (\sigma_b)_t A = \frac{P_2}{\sqrt{3}}$, $P_2 = \sqrt{3}(\sigma_b)_t A$, 所以 $P_2 > P_1$, 即图 2-13(b)承受荷载 P 大。

又
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\sqrt{3}(\sigma_b)_t A}{\sqrt{3}(\sigma_b)_t A} = 2$$

所以图 2-13(b)所示承受的荷载 P 是图 2-13(a)承受的荷载 P 的 2 倍。

分析:杆件的材料为铸铁,是典型的脆性材料,拉伸强度极限 $(\sigma_b)_t$ 远远小于压缩的强度极限 $(\sigma_b)_c$, 因此用拉伸杆件来控制设计,即求拉伸杆件的应力达到拉伸强度极限时的承受荷载 P , 然后比较两结构的 P 值。

【例 2-4】 如图 2-14 所示的支架中,已知两杆材料相同,其横截面积之比是 $A_1/A_2 = 2/3$, 承受荷载 F 。

试求:(1)两杆内的应力相等时的夹角 θ 。

(2)若 $F=10\text{kN}$, $A_1=100\text{mm}^2$ 时的杆内应力。(东南大学,2002 年)

解:(1)设杆 1 和杆 2 内力分别是 N_1, N_2 , 取节点 B 分析如图 2-15 所示。

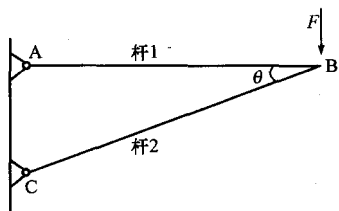


图 2-14

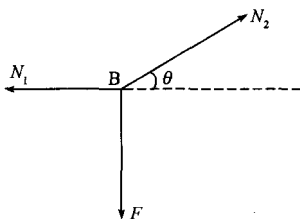


图 2-15

由平衡条件 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 得到

$$\begin{cases} N_2 \cos \theta - N_1 = 0 \\ N_2 \sin \theta - F = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

若要求两杆应力相等,则

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$$

即

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{3}$$

而由①式

$$\frac{N_1}{N_2} = \cos \theta$$

从以上两式得

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

即:当 $\theta = \arccos \frac{2}{3}$ 时,杆 1 和杆 2 的应力相等。

(2)若 $F=10\text{kN}$,则由式①和式②,得

$$\begin{cases} N_2 = \frac{F}{\sin \theta} \\ N_1 = N_2 \cos \theta = F \cot \theta \end{cases}$$