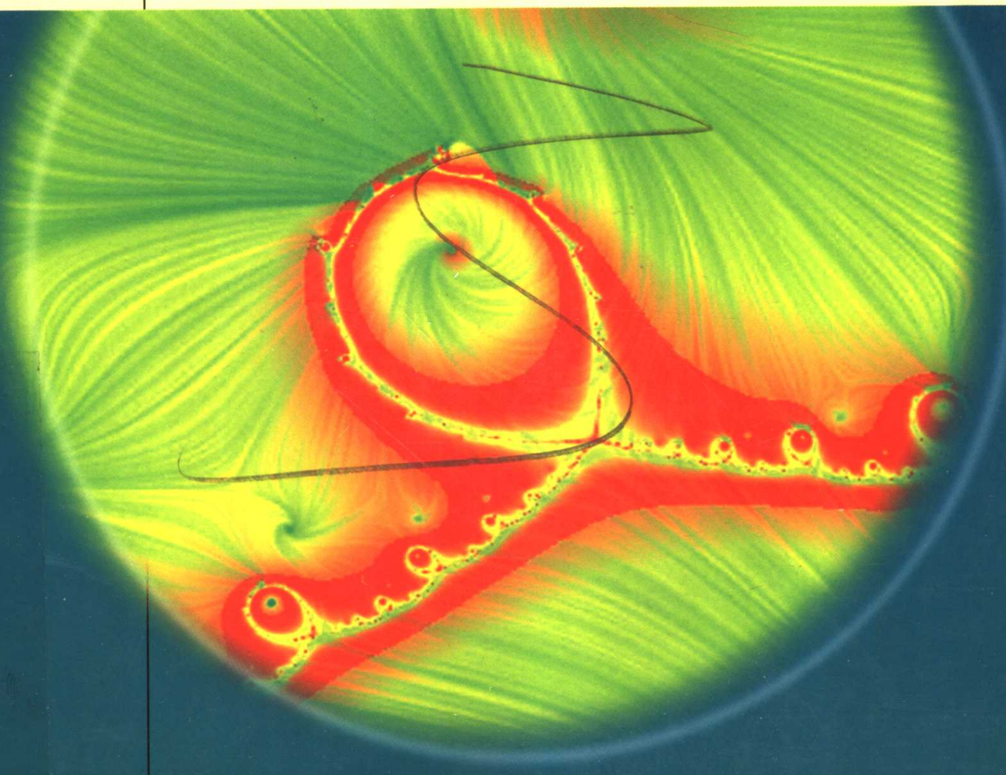
高等学校理工科数学类规划教材

数理逻辑引论

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC

朱梧槚　肖奚安　编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数

数理逻辑引论

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC

朱梧槚　肖奚安　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑引论/朱梧槚,肖奚安编著.—大连:大连理工大学出版社,2008.3

ISBN 978-7-5611-4033-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①朱…②肖… Ⅲ.数理逻辑 Ⅳ.O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 037109 号

大连理工大学出版社出版

大连市软件园路 80 号　邮政编码　116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连金华光彩色印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm　印张:15.75　字数:256 千字

2008 年 3 月第 1 版　2008 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑:梁　锋　唐立敏　责任校对:黎　玉

封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-4033-8　定价:34.00 元

前 言

当前有一种现象令人担忧，那就是计算机专业大学一、二年级的学生不愿意学习数理逻辑与集合论课程，认为相关内容与计算机专业没有什么用. 特别是我们还曾遇到过一位计算机系的教授，竟然主张把"计算机科学理论"这门硕士研究生的学位课取消，认为这门课相对于毕业后去公司就业的学生来说太空洞，这真是令人瞠目结舌，虽为极个别特例，却也足以说明纯粹实用主义与急功近利的思维方式已经在扭曲我们正常的教学模式了. 特别是对于那些初涉高等学府的学子们来说，其严重性更在于当他们还并不明白什么有用、什么无用的情况下，就开始大言这些有用、那些无用的实用主义想法. 因此建议在给计算机专业学生讲授数理逻辑与集合论课程之前，请教师先从历史的角度并辅以如下实例向学生们说明学习本课程的重要意义.

例 1，IBM 公司的高级研究员柯特(E. P. Codd)博士就是运用定义关系 R 为卡氏积的子集和关系运算的完备性等相关的集合论知识，于 1970 年创立关系数据库的，并由此而在 1981 年获图灵(A. M. Tuning)奖，而图灵奖又是计算机界的最高奖.

例 2，不妨让计算机专业的学子们读一读著名的软件大师戴克斯脱拉(E. W. Dijkstra)的自述，他指出："我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了. 我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多的错误. 不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道，要是我能年轻 20 岁的话，我就回去学习逻辑."[30,31]

例 3，美国国家总统科学顾问、著名的计算机科学家

许华兹(J. T. Schwartz)教授和他的合作者们运用集合论概念及其运算开发了一种全新的程序设计语言 SETL，这种语言以集合论为其基础，它要用到诸如有穷集合、任意域上的映射等一系列集合论概念及其运算，无疑这是一项意义重大的开创性工作. 他们撰写和出版了一本书，书名为《Programming With Sets: An Introduction to SETL》[32]. 这是第一部 SETL 程序设计语言大全，又是一本以软件工程和算法开发为核心内容的教程，在美国，已广泛成为算法设计与程序设计语言方面的教材.

由此可见，数理逻辑与集合论知识对于计算机科学的重要意义和两者之间的密切关系. 总之，在计算机科学与工程界普及和加强逻辑学和集合论知识，乃是一项十分必要和极为重要的工作.

众所周知，高等学府、特别是一流高等学府，是培养高科技人才的基地，既不是什么家电维修培训班，也不是什么专门培训录入、操作和编程的技工学校. 因此，教育者和受教育者都必须明白，用多少学多少的教学模式只能适用于某种技能的训练，对于培养高科技人才来说，此等纯粹实用主义的教学模式是十分可悲和误人子弟的.

本书第一版曾于 1995 年在南京大学出版社出版，当时撰写的主要目的，是将本书写成一本既能适用于计算机专业又能满足数学系基础数学专业和数理逻辑专业教学需要的基础教材，并在内容上要求有深有浅，其中较浅部分可作为本科生教学使用，而较深部分可作为研究生教学使用. 经过 10 余年的教学实践并不断改进，可以说是成功地实现了当初撰写之目标，因此在一些院校一直沿用至今. 2008 年大连理工大学出版社计划出版优秀理工科本科、研究生系列教材，经过仔细分析、评估后，出版社决定将本书列入此出版计划.

在这里，关于本书的内容安排和写作情况说明如下：

第一，本书的主要内容是讨论经典二值逻辑演算系统的语形和研义研究. 而经典二值逻辑系统是一种反映演绎推理规律的逻辑演算系统. 但人类思维过程是极为丰富和复杂的，人类思维活动中的种种推理方式决非演绎推理所能完全囊括. 由于种种时代因素的刺激，各种非经典逻辑在 20 世纪 30 年代以来，以不可阻挡之势蓬勃发展起来，而且与计算机科学的发展和研究愈来愈密切相关. 为此，我们特在本书之末撰写了“非经典逻辑纲要”这个附录，借以指出进一步学习和研究各种非经典逻辑系统的重要性. 该附录的全部内容是由张东摩教授执笔撰写的，因为他当年正在为计算机科学方向的研究生讲授《非经典逻辑与计算机科学》这门课程，并已取得了丰富的教学经验.

第二，全书共分为5章，其中第1章和第3章主要是从数学模型和数学背景的角度去讨论命题逻辑与谓词逻辑的涵义与构造，其论述尽量侧重于直观，而不讲究形式系统意义下的那种严格. 第2章与第4章则主要是从形式系统的构造与展开的角度去分别研究命题逻辑与谓词逻辑的基本内容. 第5章是有关经典二值逻辑系统的严格的语义研究. 在阅读本书第1、3、5章时，往往要涉及到一些必要的数学知识和集合论概念，因而在没有任何准备知识的情况下难以融会贯通其中的全部内容. 所以在使用本书于教学的过程中，建议将形式系统的语形研究(即第2、4两章)加上第1、3、4章中浅显部分作为本科生教材，而其余较深部分用作硕士研究生的教材.

第三，如所知，对于任何一个经典内容的写作(如同许多作者在写作各自编著的微积分教材那样)，除了在文字表述和内容顺序结构的安排上去显示自身的写作特色外，对于内容实质本身是不能更动的，这或许是写作任一经典内容的一种通用做法或原则. 对于本书的写作，当亦只能在此原则之下进行而不能例外. 经过仔细的比较和推敲，我们选定参考文献[5]和文献[21]作为写作本书的重点参考书，如此决策的理由和相关素材的处理将在本书的行文中作进一步说明.

在本书再版过程中，南京大学现代逻辑与逻辑应用研究所的杜国平教授承担了书稿清样的全部校订工作，他不仅逻辑功底很好，而且是在课务繁重的情况下将校订工作做得十分细致认真，特别是他指出并纠正了原版中两个疏漏不妥之处，为之向他深表谢意，同时我们还要衷心感谢大连理工大学出版社的刘新彦和梁锋等同志，因为他们为本书的再版耗费了很多时间和精力，并在出版过程中给予了热情的帮助.

本书之缺点和疏漏之处在所难免，希望读者和同行专家批评指正.

朱梧槚　肖奚安

2008年3月20日于南京

目 录

第0章 绪 论

在绪论中，主要讨论两个问题. 其一是讨论究竟什么是数理逻辑这样一个问题. 其二是谈谈与形式系统(即逻辑演算)及其解释相关的一些事情. 对于上述问题一而言，我们将从数理逻辑历史发展的几个侧面加以分析讨论，并在综合各家所言之长的基础上表述我们的认识，主要围绕着数理逻辑的定义、研究对象、研究领域和学科归属等方面作些探讨. 也正因为这些探讨已经涉及了数理逻辑历史发展的几个侧面，因而在本书中，也就不再另辟专章去系统地阐述数理逻辑之历史概要了.

0.1 什么是数理逻辑

数理逻辑这个词，已经日趋频繁地出现在众多学科的文献与著作之中. 不仅哲学家、逻辑学家、数学家和计算机专家的许多论著广为涉及数理逻辑的内容，甚至社会科学家和一些自然科学家，也在他们的某些工作中道及数理逻辑的这样或那样的内容. 然而怎样来回答什么是数理逻辑这样一个问题呢? 我们为此而查阅了一些辞海、辞典和数理逻辑教材或专著(参见文献[1]～文献[12])，首先觉得问题的全面回答应涉及数理逻辑的定义、研究对象、研究领域与学科归属等四个方面，当然，其中定义这个方面是最根本的. 其次又深感对于数理逻辑这一学科，尚没有一个统一而被一致公认的定义. 有的数理逻辑著作中完全不谈这个问题，而在文献[1]～文献[12]中，对于数理逻辑的研究对象的说法较为一致，即都认为数理逻辑以推理本身作为自己的研究对象，又对数理逻辑的研究领域的说法也较一致，都认为广义地说，数理逻辑的研究内容应包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论和证明论等五个部分，其中逻辑演算(即命题演算与谓词演算)为基础部分. 而狭义地说，数理逻辑仅指逻辑演算. 至于学科归属方面，则有两种说法：其一说数理逻辑是数学的一个分支[3][12]，其二说数理逻辑是逻辑学的一个分支[2]. 最后关于数理逻

辑这一学科的定义，则往往因其侧重面不同而不尽一致. 举例如下：

"逻辑是研究推理的，数理逻辑则是研究数学家们所使用之推理的一门学问."[1]

"数理逻辑又称符号逻辑，用数学方法研究逻辑问题，特别是数学中的逻辑问题的科学."[2]

"数理逻辑亦称符号逻辑，数学的一门分科，主要研究推理、计算等逻辑问题，内容有模型论、公理集合论、递归论和证明论等."[3]

"数理逻辑又名符号逻辑，它是逻辑学的一个分支，在其中使用数学符号来研究数学各领域公共使用的逻辑推理".[4]

"数理逻辑是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学.

本书叙述数理逻辑的基础性知识，包括逻辑演算（这里是指命题逻辑和一阶谓词逻辑）的基本内容，这些内容构成数理逻辑各个分支（模型论、证明论和构造性数学、递归论、集合论）的共同基础."[5]

"什么是数理逻辑？ 它就是采用数学的方法来研究思维形式的逻辑结构及其规律的学问."[6]

"研究推理的方法很多，用数学方法来研究推理就是数理逻辑."[7]

"数理逻辑亦称符号逻辑、理论逻辑、逻辑斯蒂. 它是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学."[8]

"数理逻辑是形式逻辑与数学相结合的产物，也是一门数学，但数理逻辑研究的是各学科包括数学共同遵从的一般性逻辑规律，而各门学科只研究自身的具体规律."[9]

"数理逻辑又称符号逻辑，是用数学的工具和方法研究推理、计算问题的一门科学，是数学的一个分支. 它的主要内容有：命题演算、谓词演算、证明论、递归论、模型论和公理化集论等."[10]

"数理逻辑是逻辑和数学交织的一门边缘性科学，它的逻辑方面就是现代形式逻辑. 狭义的数理逻辑是指用数学方法研究数学中的演绎思维和数学基础的学科. 广义的数理逻辑也称为符号逻辑，包括一切用特制符号和数学方法来研究处理演绎方法的理论. 数理逻辑一开始是用数学方法研究和处理形式逻辑，后来发展到研究数学思想方法和数学基础问题，目前它很大部分内容已经成长为数学的分支."[11]

"数理逻辑，又称符号逻辑，理论逻辑或逻辑斯蒂，数学的一个分支，用数学方法研究逻辑或形式逻辑."[12]

经对数理逻辑历史发展有关侧面的分析考虑，并综合各家所言之长，我们倾向于采纳如下方式来回答什么是数理逻辑这个问题.

关于数理逻辑的定义： 数理逻辑是用数学方法主要地去研究诸如推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的能行性等中之逻辑问题的一门学科.

当然，对此也可等价地这样说：数理逻辑是用数学方法研究各种推理中之逻辑问题的一门学问.其中主要地包括推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性、计算的能行性等中之逻辑问题.

关于数理逻辑的研究对象： 数理逻辑以推理本身作为自己的研究对象.其中主要包括演绎推理、形式推理、数学推理和各种近现代的非经典推理.

关于数理逻辑的研究领域： 作为数理逻辑之研究领域的历史性确认部分包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论和证明论等五大块.但作为数理逻辑研究领域之近现代发展部分，还应包括诸如模态逻辑、多值逻辑、非单调逻辑、归纳逻辑、似然逻辑、不协调逻辑、开放逻辑、中介逻辑演算、中介公理集合论、中介模态逻辑、中介模型论、中介代数和中介证明论等各种各样非经典逻辑分支.

关于数理逻辑的学科归属： 数理逻辑是逻辑和数学互相交织在一起的一门边缘性学科，或者说，数理逻辑既是一门逻辑化了的数学分科，又是一个数学化了的逻辑分支.

当然，如上所言也未必尽善，不过借此表述一下我们当前的认识与看法，以便能引起有兴趣的读者和专家们的讨论和批评指正.现对如上所论作如下几点说明，其中包括对数理逻辑历史发展之有关侧面的分析考虑.

(1)数理逻辑的早期发展，显然是从用数学方法(这里主要是指数学中之符号化方法或形式化方法)研究演绎推理的有效性开始的.这就是通常所说之数理逻辑的基础部分，即命题演算和谓词演算的基本内容.不少文章或著作中所涉及之数理逻辑这个词，往往都是指这种狭义的数理逻辑.

最早想到用数学方法研究演绎推理，或者说最早想把演绎推理法数学化的是 Leibniz.他被几何论证符号化中显示出来之代数威力所感动，进而设想一种比数量代数更为宽广的代数学科，这种代数将是逻辑的一部分，并且是代数化了的逻辑.实际上，Descartes 已经开始谨慎地去建立一种逻辑的代数，有关此项工作的一个未完成的文稿至今还被保存着.但 Leibniz 不仅探索着一个与 Descartes 所想之同样宽广的目标，而且开创性地提出了一个更加雄伟的方案.1666 年，Leibniz 完成了《论组

合的艺术》一书的写作，其中就包括有他对演绎推理之普遍系统的早期计划. 后来他又写过许多文字片段，借以探讨逻辑代数这一目标，但是这些文字片段直到 20 世纪也未能出版，因而很少产生直接的影响. 当然，在 18 世纪和 19 世纪也曾有别人草拟过类似的计划，但都没有比 Leibniz 的有关工作更前进一步.

逻辑代数的直接创始者，应推 De Morgan 和 George Boole. 1874 年，De Morgan 出版了《形式逻辑》和许多有关的其他文章，在这些论著中，他修正了 Aristotle 的逻辑，并且开创了关系逻辑的研究. 另一方面，符号化方法得以对逻辑代数的研究起到重大作用，关键的一步是 George Boole(1815～1864)走出来的. 他基本上是自学而成为 Cork 皇后学院的数学教授. Boole 确信语言的符号化，会使逻辑严密化. 他的主要想法被包括在他的《逻辑的数学分析》(1847)和《思维规律的研究》(1854)这两部著作中. 他用 $x,y,\cdots$，表示类或集合，用 $x+y$ 和 xy 表示两个集合的并和交. 然后列出一些自明地反映推理规则的表达式作为公理，再从这些公理许可的规则去导出众多的推理关系. 这就是从外延方面去研究逻辑而形成的代数系统. Boole 也看到了如上关于类的演算可被解释为命题演算，如此，他的代数便成为直接反映推理规则的命题代数了. Boole 的这个代数系统，后来又几经改进，最后便成为当今众所周知的 Boole 代数了. 因而几乎可以说，主要是 Boole 的工作使得被符号化了的逻辑开始成为一种具有科学性的逻辑，并由此而使得逻辑科学从哲学中分化出来而逐步接近数学.

此后，又经一些学者的推进，直到 1897 年，Gottlob Frege(1848～1925)在他的《概念演算》一书中，建立了命题演算和一阶谓词演算的公理基础，从而完成了演绎推理的数学化工作. Frege 扩展了变量、量词和命题函数的运用，还引进了实质蕴涵的概念，这种对蕴涵的解释，在数理逻辑中无疑是极其方便和重要的，从而使得逻辑演算的内容比 Aristotle 的逻辑大为丰富.

然而，这种反映演绎推理规律之逻辑演算系统的建立和完善，并没有穷尽数理逻辑的研究. 人们很自然地会问，这两个逻辑演算系统所反映之演绎推理规律的程度如何？或者更确切地说，人们既要问演绎推理的所有规律是否都在逻辑演算中得到了反映？还要问逻辑演算中的每一条规则是否都是演绎推理中某条规则的反映？所问实际上也就是后来人们在逻辑演算中进行语义研究时的完备性和可靠性问题. 亦即若对前一问题的回答是肯定的，这就断定了这个逻辑演算系统是完备的. 又

若对后一问题的回答是肯定的,这就断定了这个逻辑演算系统是可靠的.直到 20 世纪 30 年代,以上所问都得到了肯定的答案.在其中作出重大贡献的首推 K. Godel(1906～1978),他在 1930 年证明了命题演算系统和一阶谓词演算系统的完备性.

如上所论之历史分析,主要旨在阐明推理的有效性是数理逻辑的研究内容之一,同时也从某个侧面显示了逻辑被数学化的片段.

(2)如果只是将演绎推理这一部分逻辑数学化,或者说充分地达到了严密化,那么证明的真实性和数学的真理性等问题远未解决,虽然经典数学中所使用的推理几乎都是演绎推理.

19 世纪末,G. Cantor 在提供整个经典数学之理论基础与扩充数学研究对象的意义下创建了古典集合论.如果该集合论系统的真理性得以保证,那么借助于严格的逻辑工具所推出之大块数学,其真理性也就不成问题.然而这种理想的情景未能出现,因为古典集合论中出现了一系列悖论,特别是在 1902 年,由于 Russell 悖论的出现,使得把集合论作为整个经典数学之理论基础的局面面临严重困难.

为了解决集合论中之悖论问题,数学家们的方案之一是求助于公理化手段.德国数学家 Zermelo 于 1908 年构造了一个集合论公理系统,后经 A. Fraenkel(1891～1965)等数学家的改进,最终形成了当前的 ZF 公理集合论系统.在 ZF 中,所有已经出现之集合论悖论得以排除,而且迄今未发现任何新的悖论在其中出现.从而使得整个经典数学得以奠定在一个相对牢固的理论基础上.而这也就是广义的数理逻辑的一个重要分支,即近代公理集合论得以诞生的契机.当然,现代集合论的发展状况已远非当年的情景了.总体来说,近代公理集合论的诞生,并没有从根本上解决集合论系统的相容性问题,因为至今未能从理论上证明近代公理集合论永远不会出现新的悖论.

此外,数学作为一门演绎推理性质的学科,至少从形式上看,数学命题的真理性是建立在公理的真理性和逻辑规则的有效性之上的,因而即使在非欧几何出现之后,致使“数学真理是绝对真理”这一概念受到冲击之后,数学家还可用逻辑推理的严格性作为精神支柱,并以此解释数学在应用中的有效性,但因集合论悖论的出现,这一精神支柱也动摇了,这就不能不在数学家中形成一种危机感.正因为数学面临着这样的危机,才促使数学家们去探索数学推理在什么情况下有效,什么情况下无效,数学命题在怎样的情况下具有真理性,在怎样的情况下失灵.于是,在 20 世纪初,数学基础论这一分科就诞生了.摆在从事数学基础问题研究

的数学家面前的首要任务，就是如何为数学的有效性重新建立可靠的依据.由于在这项巨大工程中所持的基本观点不同，以致在数学基础论的研究中形成了各个流派.Hilbert(1862～1943)是其中一个主要流派的代表人物，他在这里提出了著名的 Hilbert 规划，希望规划的实现能一劳永逸地解决数学系统的相容性问题，他的基本想法是利用具体的、有穷的证明作为出发点，而用这些简单的、直观的和有限的元数学工作来证明数学系统、特别是算术公理系统的相容性.这就是证明论这个数理逻辑的重要分支在原来意义下的含义.Hilbert 和他的学派，确实证明了一些简单的形式系统的无矛盾性，他们甚至相信即将实现算术和集合论之无矛盾性证明这一目标.然而 Godel 于 1931 年证明了下述事实：任何一个包含数论的数学系统的相容性不可能在自身系统内得到证明，而必须凭借更强的、在系统内不能表述的方法才能去证明对象系统的相容性.就是说，当我们使用元理论往证某个对象理论的无矛盾性时，这个元理论必须比对象理论更强，必须是一个能表达对象理论所不能表述的那个方法的理论，从而元理论必须不能比对象理论更简单，而是更复杂、更不可靠.如此，Godel 就从理论上推断了 Hilbert 规划是不可能实现的.

由此开始，原来意义下的证明论的含义开始了新的变化.对于那些仍想证明算术系统之相容性的数学家来说，也开始寻求其他的、较为直观的元数学工具.1935 年，Gentzen(1909～1945)使用直到超穷序数 ε_0 的超穷归纳法，证明了算术系统的相容性，另一方面，证明论的研究已成为运用现代数学工具去研究数学证明的一门学问，亦即证明论把数学本身作为自己的研究对象，从而这种研究也更加逻辑化了.

在研究证明的真实性和数学真理性过程中，形式语言、形式系统这类概念是必不可少的.那么，这种形式和它所反映的内容之间究竟是一种什么关系？为探索这种关系而展开了模型论这个数理逻辑之重要分支的研究.确切地说，模型论是研究形式语言与其解释或模型之间的关系的一门学问，或者说是研究语法和语义之间的关系的一门学问.不难理解这种关系的探索对于证明的真实性和数学的真理性的研究是必不可少的.

总的来说，为了探索数学的真理性，对于数学证明的真实性研究是十分重要的一个方面.并由此而相继建立和发展了近代公理集合论、证明论和模型论等学科.由于既可将这些学科视为研究演绎推理中的逻辑问题的深入发展，又可将数学真理和数学证明本身视为逻辑范畴内的研究内容，所以人们把这些学科归属为数理逻辑诸分支，以及把数理逻辑

视为逻辑与数学互相交织在一起的边缘性学科等等就不难理解了.

如上历史分析，主要表明关于证明的真实性和数学的真理性的探求也是数理逻辑的研究内容之一. 同时也表明存在着数学内容逻辑化的倾向与片段.

(3)如所知，计算的能行性是数学中的一个至为重要的问题. 但究竟什么问题是能行可计算的? 我们在直观上认为是可计算的函数的是哪些? 如何用形式的方法定义可计算性，哪些问题是不可计算的? 这些问题无论对数学家、逻辑学家或哲学家都是十分重要的. 对能行性的研究导致了递归论这门研究能行性可计算性的学科的诞生.

早期递归论致力于用形式方法来定义我们直觉意义上的能行可计算性. Godel、Herbrand 和 Kleene 最早引进了一般递归函数的概念，同时还相继出现了 Turing 机、Post 系统、λ 演算等计算模型，并且先后证明了这些模型下所定义的可计算函数恰好就是部分递归函数，同时人们也发现所有已知的直观上认为可计算的函数皆为一般递归函数. 因此，Church 提出了一个有名的论点：一个全函数是直观上能行可计算的，当且仅当它是一般递归函数，一个部分函数是直观上能行可计算的，当且仅当它是部分递归函数.

随着计算机的出现和发展，人们注意到机器可计算的函数恰巧也就是一般递归函数，因此递归论的研究也变得更加重要. 现代递归论的主要研究方向有如下几种：其一是将能行性的研究范围从数论函数拓宽到一般的数学结构上，其二是将直到 ω 的递归拓广到直到超穷数 α 的超穷递归，通常称为 α -递归，其三是研究不可解问题之间的归约问题，即研究不可解问题之困难程度的差别，其四是研究计算和推理等问题的复杂性问题.

至此，计算能行性的研究也是数理逻辑的研究内容之一当已完全明确. 因而也就明确了递归论也和逻辑演算、集合论、模型论、证明论一样地被包括在广义数理逻辑的研究领域之中.

(4)现在，再让我们回过去看看如上所论之数理逻辑的主流，所说之用数学方法研究之推理，显然还是囿于演绎推理的范畴. 然而人类思维之过程与功能是极为丰富和复杂的，从而人类思维活动中之种种推理方式绝非演绎推理所能完全囊括的.

由于受到种种时代因素的刺激，从 20 世纪 30 年代开始，人们仿照用数学方法研究演绎推理的办法，开始用数学方法去研究各种各样的非经典的推理，从而导致了诸如模态逻辑、非单调逻辑、多值逻辑、归纳逻

辑、似然逻辑等非经典的逻辑系统的诞生和发展. 通常认为数理逻辑的研究领域并不包括这些非经典的逻辑系统，而认为仅由逻辑演算、集合论、模型论、证明论和递归论等五个部分构成. 但从数理逻辑是用数学方法研究推理之有效性这一点来看，我们倾向于将所说之种种非经典的逻辑系统一并纳入数理逻辑的研究领域之中.

综上所述，仅仅是我们当前对于究竟什么是数理逻辑这样一个问题的一点认识和看法，显然不是什么成熟的观点，希望在进一步的研究中提高和完善，不当之处望同行专家指教.

0.2 形式系统及其解释

如前所述，狭义的数理逻辑，乃是用数学方法研究演绎推理的结果. 而此处所说之数学方法，主要是指形式化方法. 形式化方法就是现代形式化的公理方法，但形式化方法所构造的公理系统是用一种所谓形式语言来描述的，因而不同于通常用自然语言来描述的公理系统.

自然语言就是我们日常交谈和写作中所使用的语言. 例如汉语、法语、英语等等，自然语言是在人类社会长期的生活实践过程中逐渐形成的，它丰富多彩而且表达力强，但往往一词多义而且表达欠精确，这对逻辑的研究是一大缺陷. 因而我们需要构造一种精确而严格的语言，即所谓形式语言或人工语言，借以避免日常自然语言中的这样或那样的含混性.

形式语言的构造，首先是要有一个符号库或符号表，列出该形式语言中所包含的基本符号，就像自然语言中有一个字和词的库一样. 形式语言的基本符号可以无穷多，但可进行分类而分别叫做个体词、命题词、函数词、谓词、逻辑词（即命题联结词和量词）、技术性符号等等. 当然，在构造各种形式语言时，并非每一种形式语言都要用到所有各类基本符号. 一个形式语言的任意多个（允许重复）基本符号排成的有穷串（或称有穷符号序列）叫做一个公式，就像自然语言中由有穷多个字或词排列而成的语句那样，然而自然语言中按照自然形成的语言规则，要区分合乎语法的语句和不合乎语法的语句，绝非任意的字和词的有穷序列都能构成合乎语法之语句的. 类似地，在形式语言中，要给出一套相应的所谓形成规则，借以区分合乎形成规则要求的公式和不合乎形成规则要求的公式，通常称合乎形成规则要求的公式为合式公式，并且简记为 Wff. 而

那些不合乎形成规则要求的公式被称为非合式公式. 所说的这种形成规则,不仅提供了合式公式的定义,而且还将提供如何由基本符号去构造合式公式的方法,此外,一个形式语言之基本符号和形成规则的规定都必须是能行的,亦即这种规定必须提供一种统一的方法,以能机械地在有穷步骤内判定任一符号是不是这个形式语言的基本符号,以及能机械地在有穷步骤内判定任一公式是不是这个形式语言的合式公式.

形式语言中的基本符号和合式公式,并不具有任何实际意义,它们是独立于任何解释的. 因而我们只把它们看成是一堆形状各异和处在不同位置的物理对象. 形式语言之所以称为形式的,也正由于这一点,说得术语化一点,我们在形式语言中,只考虑它们的语形或语法,而不考虑它们的语义. 这也正是形式化方法的特点所在.

有了形式语言,再加上一些公理和推理规则,就构成了一个形式系统或逻辑演算. 所说的一些公理和推理规则放在一起,也叫做推理工具,但要注意,有的形式系统中的推理工具全部以推理规则的形式出现,而不分公理和推理规则,例如,本书第二章中将要给出的形式系统 $\boldsymbol{P}^N$ 就是这样的,但在同一章中将要给出的另一个形式系统 $\boldsymbol{P}^T$ 却不是这样的,$\boldsymbol{P}^T$ 的推理工具是由三条公理和一条推理规则组成. 所谓公理,就是选取几个合式公式作为证明的出发点,在证明过程中,可以随时根据需要插入公理作为证明步骤中的根据. 形式系统中的一个合式公式是或不是系统中的公理,也必须是能行可判定的. 如果一个形式系统中只有有限多条公理,那么所说的这种能行可判定是容易办到的. 但有的形式系统往往有无穷多条公理,此时我们将采用"公理模式"的办法来刻画该形式系统的公理,此时只要能对公理模式作出能行可判定的规定即可. 所谓推理规则,也就是规定由什么样的一些合式公式可以推导出什么样的一个合式公式. 推理规则也必须是能行可判定,亦即任意给出一些合式公式和另一个合式公式,必须有一个能行的方法去判定这两者之间是否存在着直接的推导关系. 一个形式系统的推理规则可能是有穷多条,也可能是无穷多条,在后一种情况下,同样采取推理规则模式的办法刻画之.

通常把形式系统的公理以及从公理根据推理规则所推出的 Wff 所组成的一个有穷序列叫做该形式系统中的一个证明. 这表明作为形式系统中的一个证明的 Wff 有穷序列,绝不是该形式系统中任意一堆 Wff 的任意排列,而必须是在该 Wff 有穷序列中的每个 Wff,要么是公理,要么是由公理根据推理规则推导出来的 Wff,或者粗略地说,该 Wff 有穷序列中的各个 Wff 的前前后后都存在着推导关系. 我们又把形式系统中