



“十一五”国家重点图书出版规划项目
中国数学教育研究丛书

张奠宙
总主编

数学『双基』教学

的理论与实践

SHUXUE SHUANGJI JIAOXUE
DE LILUN YU SHIJIAN

● 张奠宙 等著 ●
广西教育出版社

01/34

“十一五”国家重
中国数学教

2008

张奠宙 总主编



SHUXUE SHUANGJI JIAOXUE
DE LILUN YU SHIJIAN

数学『双基』教学 的理论与实践

• 张奠宙 等著 •



广西教育出版社



图书在版编目(CIP)数据

数学“双基”教学的理论与实践/张莫宙等著. —南宁:
广西教育出版社, 2008.4
(中国数学教育研究丛书)
ISBN 978-7-5435-5162-6

I. 数… II. 张… III. 数学教学—教学研究—中国
IV. 01-4

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第035473号

总策划: 黄力平

责任编辑: 高春 黄力平

责任校对: 何云 潘姿汝

装帧设计: 梁伟琪

出版人: 李小勇

出版发行: 广西教育出版社

地址: 广西南宁市鲤湾路8号 邮政编码: 530022

电话: 0771-5865797

本社网址: <http://www.gxeph.com>

电子信箱: book@gxeph.com

印刷: 广西迪美印务有限责任公司

开本: 635mm×965mm 1/16

印张: 16.5

字数: 243千字

版次: 2008年4月第1版

印次: 2008年4月第1次印刷

书号: ISBN 978-7-5435-5162-6/G·4215

定价: 33.00元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与出版社联系调换。

总 序

时序进入 2008 年，中华民族走在复兴的大道上。

100 年前，中国处于满清末年，积贫积弱，文盲充斥。拖着辫子的臣民，没有接受现代数学教育的机会。1911 年，辛亥革命爆发。1919 年，五四运动兴起。科学、民主的口号催生了中国的现代数学教育。

中国的数学教育，早年学日本，然后学英美，艰难行进。1949 年之后，中国人民站起来了。在全面学习苏联的基础上，羸弱的中国数学教育，渐渐强大起来。注重数学“双基”，发展三大能力，反对注入式，提倡启发式，学习唯物辩证法，加强数学与实践的结合。在总结正反两方面经验的基础上，中国数学教育开始形成了自己的特色。

20 世纪 70 年代末起，中国实行改革开放政策。数学教育一方面大量吸收国外的优秀研究成果，一方面不断展现自己的数学教育特色，在理论和实践上都得到了重要发展。时至今日，中国数学教育已经走向世界，在国际上享有相当高的声誉。中国的优秀学生在国际数学奥林匹克中屡获佳绩，大范围国际数学测试的中国大陆学生成绩位居前列。以很低的教育投入，获得了如此优良的成绩，令人惊叹。事实上，数学教育的成果，成为中国经济起飞的重要支撑。千百万农民工走进现代化的企业，成为“中国制造”的主力军，没有必要的数学计算和思维能力，是不可想象的。

于是，一个严肃的课题摆在我们面前：怎样评价“中国的数学教育”？在风起云涌的教育改革浪潮中，对中国数学教育的传统有三种态度：

一种态度是基本否定。认为中国的数学教育，观念落后，内容陈旧，教师死教，学生死学，没有创新，没有探究，单打独斗，不讲合作，应试当头，摧残学生。一句话，必须彻底转变观念，改变学生的学习方式。对于中国的教育传统的继承，止于《学记》经典、孔子教育思想，书院模式。对于当代的数

学教育，则没有任何肯定。他们认为，如果说中国学生基础好，输在后面没有创新，那么更应该说，没有创新的基础，就是输在起跑线上了。

另一种态度是认为中国教育有积极因素，应该挖掘。这种观点常常以“中国教育悖论”的形式出现。例如，“中国学生何以比西方学生在学习成绩上好许多，但是他们的教和学看上去是如此的死记硬背？”^①他们在实践上肯定中国学生的学习成绩，但是西方的许多正确教育理论不能解释，于是产生困惑，需要研究。这是国外一部分客观公正的教育家的观点，具有积极的意义。

第三种态度，就是本丛书所采取的态度：基本肯定，需要改革。中国是一个有几千年文明历史的国家，具有灿烂的中华文化。教育是一种文化现象，其中积淀着许多文化的因子。例如鼓励教学相长，重视坚实基础，提倡启发诱导，相信熟能生巧，主张精讲多练，采用变式演练，等等。对这些深藏于中华文化中的教育因子，我们只能采取基本肯定的态度，继承发扬它的积极因素，使之熠熠发光。与此同时，防止它的异化，避免造成负面影响。

文化是不能废除和选择的。钱伟长先生说过，各个国家对文化的态度应当是“各美其美，美人之美，美美与共，天下大同”。教育上的观念，也应遵循这样的规律。

另一个不容忽视的事实是，1949年以来的中国数学教育，是许多前辈学者、几代教师苦心孤诣建设起来的，他们为国家的兴旺发达、经济起飞、教育普及作出了巨大的贡献，岂可一笔抹杀？数学教育上的双基教学、启发式讲解、三大能力的培养、师生讨论的模式、数学解题的教学等，都是能够闪光的金子。当然，我们也清醒地看到，中国数学教育有着明显的弊病。对于前面提到的中国数学教育的种种缺陷，我们同样感到痛心疾首，主张坚决革除。任何时候，任何国家都在根据自己的国情进行改革。我们只不过根据历史经验，主张避免“矫枉过正”而已。

晚近以来，我们学习了许多国外的优秀经验，特别是初步把握了比较科学的研究方法，注重调查实证，开始运用心理学

^①D. Watkins, J. Biggs. The Chinese Learner: Cultural, Psychological and Contextual Influences. Hong Kong: CERC&ACER, 1996.

的最新成果进行分析。这就是说，已经有初步的条件把我国已有的教学经验上升为理论。

总上所说，我们觉得应该集中大家的力量，开始营建具有中国特色的数学教育体系了。于是，这套《中国数学教育研究丛书》的编写就提上了议事日程。广西教育出版社将它列入“十一五”国家重点图书出版规划项目上报，终获中华人民共和国新闻出版总署批准。

丛书的出版，得到数学教育同行的积极响应。我们欢迎一切数学教育研究成果参与丛书的出版。除了研究质量的普遍要求之外，附加的条件只有一个：具有中国特色。

丛书出版在即，希望它能成为一个时代的记录，一个中国数学教育发展的标志。

张真宙

2008年1月22日于沪上

打好基础 推陈出新

(代前言)

万丈高楼平地起，美轮美奂的摩天大厦必须有坚实的基础。可是，承受巨大的重量的基础并不美观，甚至深入地下，人们往往看不见，以至忽略了它的存在。

“夏练三伏，冬练三九”，当人们为舞台上的耀眼明星喝彩的时候，大概不知道他们苦练基本功时候的艰辛和痛楚。

一个教育寓言说，某人吃了三个馒头饱了，他觉得第一个馒头不重要，第三个馒头才是吃饱的关键。

流光溢彩的成功会掩盖朴实无华的基础。所以，伟大的智者常常提醒我们要重视基础。

牛顿曾说过：“如果说我看得比别人更远些，那是因为我站在巨人的肩膀上。”巨人的肩膀，就是牛顿创新的基础。

2004年11月14日，数学大家吴文俊先生接受《文汇报》记者采访时，发表了“推陈出新，始能创新”的见解。他说：“有了陈，才有新，不能都讲新，没有陈哪来的新！创新是要有基础的。只有了解得透，有较宽的知识面，才会有洞见，才有底气，才会有创新。”

基础和创新，是一个问题的两个方面，辩证的统一。

2004年，大物理学家杨振宁在清华大学讲授物理学的基础课。《文汇报》对此进行了报道，其中有句话是“对于基本概念的理解要变为直觉”。当日笔者发电子邮件给杨先生询问此话是否表达了他的原意，并在信中说：“这句话我以为非常重要，是‘熟能生巧’教育古训的注解。西方的教育强调理解，很对；东方的教育强调基础，那么基础和理解的关系如何？这句话是一个解答，理解与直觉的关系在基本概念的部分有联系。”当天，杨振宁先生就有回复，说“关于变为直觉的那段摘引是正确的(The quotation about converting into intuition was correct)”。

那么，基本概念的理解为什么要变为直觉呢？道理很简单：思维需要效率。直觉可以不假思考地随手运用，因而节省了思维空间。当进行科学思考的时候，那些已经熟知的常识和真理，成为无须占用思维空间的直觉，就能把思考集中于人类尚未知晓的部分，为创新让开

道路。物理学研究如此,数学学习何尝不是如此?

当然,重视基础是为了发展。没有发展的基础,恰如在花岗岩的基础上盖了茅草房,几近浪费孩子的青春。古代多少莘莘学子,十年寒窗,落魄如孔乙己,即便功名到手,也会以范进中举式的悲剧落幕。今天的应试教育,迫使“双基”异化,成为“高中空转”的工具。这样“打基础”,阻碍了科学的发展,当然要反对。五四运动以来,从反封建的高度改革旧教育,是时代的进步。

但是,中国的教育传统,难道可以像“敝屣”一样,一丢了事么?当然不是。从“教学相长”、“有教无类”、“愤悱启发”、“传道授业”、“熟能生巧”这样的古训,到近代的数学“双基”教学、数学素质教育设计、数学应用教学等,我们的传统并非一无是处。中国学生在国际数学测试中名列前茅,已是不争的事实。改革开放以来,中国的经济起飞,离不开教育的支撑。试想,千万农民工能够适应现代化的工农业生产,没有基本的数学知识和基本技能怎么行?中国学生的优良数学基础,在复兴中华的过程中,功不可没。

究竟要怎样对待基础,是一个长期争论的问题。和许多教育思想一样,对“基础作用”的评价,往往出现轮回的现象,准确一点说,是螺旋上升。

古代的各个民族,都强调苦读。所谓“头悬梁,锥刺股”就是苦读的生动写照。日本和中国类似,把“做学问”叫做“勉强”。“勉强”这个词反映了无论是在学校还是在私塾,日本孩子每天的学习生活都是“痛苦”的。和日本人的“勉强”相对,犹太人把学习称作“重复”。从字面上看,它的意思是亲自读、说、听,多遍地练习,最终将文章全部内容记住。这种韧性在犹太人当中是普遍存在的。^① 这样的苦读,反映了部分的真理,即学习成果并非唾手可得,需要下工夫。但是,苦读如果没有创新的指导,只是简单的重复,人类将不会进步。

近代以来,倡导人本主义,实行愉快教育,注重学生学习的主动性,提倡“生活即教育,教育即生活”,成为一时风尚,其中杜威的进步主义教育思想是突出的代表。不过,杜威主义在世界各地的推行遇到很大困难。20世纪在苏联曾经风行一阵,最终被丢弃。1950年前后,美军占领日本后推行“单元教学”,实行“道尔顿制”,不几年即宣告失败。其原因都是忽视系统知识的学习,基础不牢。中国在1958年“大跃进”年代和后来的“文革”十年中,都曾经搞过“教育革命”,破坏了正常的教学秩序,结果不是“调整巩固”,就是“拨乱反正”,强调回到系统

① 中华读书报,2007-2-8.

的知识学习,注意打好基础。

美国数学教育的经历也是如此。1958 年的美国“新数学”运动到 20 世纪 70 年代宣告失败,口号就是“回到基础”。当“问题解决”、“探索发现”的数学教育观风靡全球之时,美国在 20、21 世纪之交出现了“数学战争”,结果以 2006 年发表“聚焦基础”的文件而基本结束。于是,从“重视基础”到“削弱基础”,然后又“回到基础”和“聚焦基础”。基础,成了绕不开的话题。

我们的结论是,没有发展指导的打基础是蛮干,没有扎实的基础谈发展是空想。二者必须有机结合,辩证统一。

中国的数学教育,有自己的长处,也有自己的不足。故步自封固不足取,妄自菲薄更是谬误。扬长避短,是我们的唯一选择。对于那些否定中国数学教育,唯美国教育马首是瞻的教育“民族虚无主义”者,我们要理直气壮地予以驳斥,总结出自己的数学教育理论来,哪怕是初步的。于是,“中国数学‘双基’教学”的研究,就是朝这个方向迈出的第一步。

本书的作者们,生逢盛世。建设中国特色的数学教育理论,是我们义不容辞的责任。既要向国外一切先进的数学教育思想虚心学习,又要满怀热情地总结自己的数学教育传统,包括近几十年来无数数学教育前辈的努力。研究“数学‘双基’教学”,是我们迈出的第一步,并以初步的研究成果,就教于万家。

内容简介

数学“双基”教学，是中国数学教学的优良传统。本书力图从理论和实践两个方面加以总结。理论篇包括数学“双基”教学的概念界定，文化背景，主要特征、形成模式，以及考试评价等方面，全面回顾了已有的研究结论，并吸取了近几年来取得的新成果。实践篇的内容则是全新的，其中数学语言与“双基”的关系，高考与“双基”的关系，变式教学，三角比的教学实验，以及排列组合单元“双基”量表等，都是来自教学一线的经验总结，具有实践指导意义。本书适合广大的数学教育研究工作者和数学教师阅读参考。

作者简介



张奠宙，浙江奉化人，1933年出生。1956年毕业于华东师范大学数学系数学分析研究生班。1986年任华东师范大学数学系教授。1995~1998年任国际数学教育委员会执行委员。1999年当选为国际欧亚科学院成员。现兼任《高中数学课程国家标准》研制组两组长之一。1995年获全国优秀教师奖章。1997年获全国教师奖（曾宪梓奖）一等奖。

长期担任数学分析和函数论课程的教学。数学研究领域为泛函分析。在《中国科学》、《数学学报》等杂志发表算子谱论的论文多篇。

在教学之余，从事现代数学史研究。有《陈省身传》、《20世纪数学史话》、《20世纪数学经纬》、《中国现代数学史略》、《中国数学教育史话》等著作。并有一批论文（英文）在《Mathematical Intelligencer》等杂志发表。

1986年以后，从事数学教育研究。主持“教育部数学教育高级研讨班”15年。著有《现代数学与中学数学》、《数学教育研究导引》、《数学方法论稿》、《中国数学双基教学》等10余种。

总策划 ☆ 黄力平

责任编辑 ☆ 高 春
黄力平

责任校对 ☆ 何 云
潘姿汝

 **封面设计** ◎ 梁伟琪



MULU

目录

总序 前言

理论篇

第一章	数学“双基”教学概述★★★★一
第一节	数学“双基”教学的界定★★★★一
第二节	中国数学“双基”教学的形成★★★★三
第三节	数学“双基”的继承与发展★★★★六
第四节	美国“聚焦基础”的启示★★★★一二
第二章	数学“双基”教学的文化渊源★★★★二〇
第一节	精耕细作的农耕文化的影响★★★★二〇
第二节	儒家文化和数学“双基”★★★★二三
第三节	考试文化的科举意识★★★★二五
第四节	考据文化与逻辑严谨★★★★二七
第五节	教育文化中的“双基”成分★★★★三一
第三章	数学“双基”教学的主要特征★★★★三四
第一节	记忆通向理解以至形成直觉★★★★三五
第二节	提高运算速度赢得思维效率★★★★三六
第三节	重视逻辑演绎保持严谨精确★★★★四二
第四节	重复练习依赖变式获得提升★★★★四六
第四章	数学“双基”教学的模式★★★★五一
第一节	数学“双基”教学模式的三个层次★★★★五一
第二节	“数学基桩”的教学★★★★五二
第三节	小学教师关于“乘法”教学的设计★★★★五五
第四节	“双基”模块的教学★★★★五七
第五节	数学“双基”平台的含义及其价值★★★★六〇
第六节	数学“双基”教学与数学开放题★★★★六三
第五章	数学“双基”教学中的发展层面★★★★七〇

- 第一节 借鉴国际经验,拓宽发展层面★★★七〇
- 第二节 关于“基本数学活动经验”★★★七三
- 第三节 开放题与“双基”训练相结合并进入考试
★★★七九

实践篇

第六章 数学“双基”教学中数学语言运用研究

★★★九一

- 第一节 正确流畅地运用语言是数学教学的“双基”内容★★★九一
- 第二节 初中数学课程中涉及的语言现象★★★九四
- 第三节 一次关于初中数学课里的语言掌握情况的测试★★★九六
- 第四节 关于初中数学课里语言教学的安排的建议
★★★九九

第七章 负数乘法的理解★★★一一二

- 第一节 由“负负得正”的教学引出的思考★★★一一二
- 第二节 有理数乘法意义的理解的调查★★★一一六
- 第三节 有理数乘法意义的理解的分析★★★一二一
- 第四节 负数理解困难的成因分析★★★一二八

第八章 三角比与三角恒等式的“双基”教学研究★★★一三二

- 第一节 “三角比”教学的总体设计★★★一三二
- 第二节 三角“基桩”——关于三角公式的教学
★★★一四五
- 第三节 两角和三角比的“双基”模块★★★一五三
- 第四节 三角变换知识与技能的测试量表★★★一五九

第九章 数学“双基”教学中的一些专题★★★一六九

- 第一节 记忆形成直觉的范例:“九九表”的认识及教学研究★★★一六九
- 第二节 三角比和三角恒等式探究点的教学设计
★★★一七四

第三节 数学“双基”教学中数学公式(定理)教学
★★★一八四

第四节 变式教学之一:促进有效的数学学习的中国
方式★★★二〇二

第五节 变式教学之二:数学问题结构性变式的研究
★★★二一一

第十章 数学“双基”教学和考试命题 ★★★二一八

第一节 数学考试公平与数学“双基”的关联★★★二
一八

第二节 数学“双基”与 2007 年高考试题★★★二二二

第三节 排列、组合知识与技能的测试量表★★★二
三二

理论篇

第一章

数学「双基」教学概述

近 20 年来出现了中国学习者“悖论”：“华人学生数学成绩优良，但教学方法陈旧。”怎样才能给予合理的解释？数学“双基”教学，也许是揭示这一悖论奥秘的一把钥匙。中国的数学“双基”教学，不是“落后”、“陈旧”的代名词，而同样是一种主张学生发展的理论，只不过具有“注重基本知识、基本数学技能”的特点而已。

这一章，将对“数学‘双基’教学”的内涵加以界定，指出其历史形成过程，以及未来的理论发展。

第一节 数学“双基”教学的界定

中国数学教育有许多特点，公认以“‘双基’教学”为主要特征。长期以来，数学“双基”的定义是数学基本知识和基本技能，这不必也不能更改。

但是，“数学‘双基’教学”作为一个特定的名词，其内涵不只限于“双基”本身，还包括在数学“双基”之上的发展。应该看到，中国的数学教育，除注重打好基础之外，还注意“启发式”教学，强调数学思想方法、数学解题思维、分析问题和解决问题能力的培养等注重学生发展的方面。这些都属于“发展”的层面，却又和数学“双基”密切相关。

因此，我国的数学“双基”教学，其内涵是“关于如何在数学‘双基’基础上谋求数学发展的理论”。中国数学“双基”教学和许多“儿童发展”理论之间的差别，就在于是否重视基础，强调在打好基础的同时谋求发展。

注重基础和谋求发展是相辅相成的两个方面。没有发展目标的打基础是空转,缺乏坚实基础的求发展是空想。优质的数学教育,是将打基础和求发展紧密结合起来。

中国的“双基”教育,在严酷的考试功利影响下,存在着异化的倾向。实际上,限时限刻的数学笔试,主要检验的是基本知识和基本技能,很难检验应试者的创新和发展能力。因此,一个时期以来,主张让数学“双基”教育为应试教育服务的功利化倾向抬头,以致把“数学‘双基’”看做是“应试教育”的同义词。这是一种误解。

打好“双基”的目的是为了更好地发展。21世纪以来的中国数学教育改革,重点是强调如何谋求学生的数学发展,提倡探究、发现、创造的数学教学方式,这是完全正确的。但是,另一方面,许多数学教育改革的建议,忽视“双基”、回避“双基”,甚至批判“双基”,则是不对的。发扬注重数学“双基”教学的优良传统,使之和学生的数学发展紧密结合,才是我们努力的方向。

主持《九年义务教育国家数学课程标准(实验稿)》修订工作的史宁中教授认为,应该注重数学基本知识和基本技能的教学。他同时建议发展数学基本活动经验和基本思想方法,这是朝着正确方向的一次努力。我们在本书中将会作进一步的探讨。

值得注意的是美国数学教育改革的历史经验。发生在大洋彼岸美国的“数学战争”,从另一个侧面反映了“双基”教学的重要性。2006年9月12日,美国全国数学教师协会(NCTM)发布了题为《数学课程焦点》的文件,对2000年的《数学课程与评价标准》作了补充说明,力求在保持创造、发展的同时,强调数学基础的重要性。

早在1997年,美国加州大学伯克莱分校的数学教授伍鸿熙首先提出了质疑,认为美国的课程标准有问题,忽视基本训练,甚至包含错误。他举的例子是加州的课程标准中有“周长和面积的关系”一节,但是学过数学的人都知道二者之间并没有一般的关系。一些科学家抱怨美国数学教育界推行的课程“一英里宽、一英寸深”而没有深度,造成学生学业成绩下降。

持相反观点的有美国全国数学教师协会(NCTM)。他们认为美国数学教育正在逐步改善,SAT(Scholastic Assessment Test)的成绩也在提高;数学教育改革的口号“问题解决”、“小组学习”、“强调数学在日常生活中的应用”等都是对的;美国优秀学生的数学成绩不错,在创造性思维方面还有优势;数学教育不能退回到旧时代去。两派都在报纸上发表各自的意见,进行公开的辩论,言辞十分激烈,世称“数学战争”。

经过将近十年的论战,双方逐渐形成了共识,主要的结论是要加强基础知识和基本技能的教学。例如:

在整数运算中,计算的流畅性(fluency)是关键的。计算流畅性的重要组成部分是效率和正确性。最终,流畅性需要基本数字事实的自动化回忆。

学生应该能熟练地使用整数运算的法则,这些基本算法是数学的主要智慧结晶之一。

分数的数学意义是十分重要的。没有分数,我们就不能很好地理解比、比例和百分比。分数的运算是代数学习的重要基础。

2006年9月,论战一方、制定美国课程标准的NCTM,发表了焦点文件,强调“聚焦基础”。在小学阶段的“焦点”里,出现这样的词句:

* 快速记起(recall)乘法和相应的除法的意义,熟练进行整数的乘法和除法。

* 理解小数,包括小数和分数之间的关系。

* 理解并能熟练进行整数的除法。

* 理解并能熟练地进行小数和分数的加减运算,理解并能熟练地进行小数和分数的乘法和除法运算。

* 将比和比率与乘法和除法联系起来。

把理解和“熟练地进行运算”如此紧密地结合在一起,在以往的美国数学教育文件中很少出现,即便在最近一段时期的中国教育改革中,也常常加以回避。因此,研究数学“双基”教学,发展数学“双基”教学,对于中国,乃至世界,都将是重要的。

第二节 中国数学“双基”教学的形成

远在2200年前的春秋战国时期,乘法九九口诀已经流行。湖南湘西里耶古镇出土的战国简牍中,就有乘法九九口诀。古人利用熟读乘法口诀,获得快捷、简便的计算技能。“熟能生巧”已成为中国教育的格言,成为中华文化的一部分。我们将在第二章对此做详细论述,这里叙述1949年新中国成立之后,数学“双基”教学的发展历史。

让我们简单地回顾一下新中国成立初期全面学习苏联的历史。1950年,我国从东北地区开始,按照苏联10年制的中小学数学教学大纲和教科书进行教学。于是,1949年以前中学课程里的必修内容,如解析几何等被取消了,平面几何内容大量缩减,西摩松线、九点圆之类的几何难题离开校园,算术的内容也缩减了。但是,苏联的数学教学有其自己的特点,即内容少,但是精。中国的中学数学过去以解方程为主线展开,苏联的中学数学则以函数为纲,体现了数学的现代发展。