大夏书系·教学艺术

ZHONGXUESHUXUEMINGSHI
JIAOXUEYISHU

中学数学名师教学艺术

雷玲 主编

任勇：用“学习方法”开启学生智慧

夏炎：融德育与数学文化于课堂

童嘉森：为学生学习数学搭桥

丁益祥：让素质教育真正落实

赵公明：为学生搭建“成功阶梯”

刘爱学：数学要“品”、“做”、“悟”

吕维智：数学即高级游戏

● 画外音 课堂教学艺术 经典课例 观点 解读 讲述

华东师范大学出版社
ECNUP EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY PRESS

大夏书系·教学艺术

ZHONGXUESHUXUEMINGSHI
JIAOXUEYISHU

中学数学名师教学艺术

雷玲 主编

任勇：用“学习方法”开启学生智慧
夏炎：融德育与数学文化于课堂
童嘉森：为学生学习数学搭桥
丁益祥：让素质教育真正落实
赵公明：为学生搭建“成功阶梯”
刘爱学：数学要“品”、“做”、“悟”
吕维智：数学即高级游戏

● 画外音 课堂教学艺术 经典课例 观点 解读 讲述

华东师范大学出版社
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中学数学名师教学艺术/雷玲主编. 一上海:华东师范大学出版社,2007.12

ISBN 978-7-5617-5796-3

Ⅰ.中... Ⅱ.雷... Ⅲ.数学课—课堂教学—教学研究—中学 Ⅳ.G634.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 198001 号

大夏书系·教学艺术

中学数学名师教学艺术

主　　编　雷　玲
策划编辑　吴法源
文字编辑　杨　霞　殷艳红　肖梅兰
装帧设计　大象设计
责任印制　殷艳红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编　200062
电　　话　021-62450163 转各部　行政传真　021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

印 刷 者　北京密兴印刷厂
开　　本　700×1000　16 开
印　　张　16
字　　数　270 千字
版　　次　2008 年 3 月第一版
印　　次　2008 年 3 月第一次
印　　数　6 000
书　　号　ISBN 978-7-5617-5796-3/G·3361
定　　价　24.80 元

出 版 人　朱杰人

目录

1. 任勇：用“学习方法”开启学生智慧

档案 任勇，中学数学特级教师，从教二十余年。曾任中学数学教师及福建省厦门第一中学校长等职；2006年1月至今任厦门市教育局副局长。现为全国中学学习科学研究会副会长、全国中小学课程导学研究会副理事长、福建省特级教师协会副会长、福建省教育学会学习学研究会副会长、福建省数学教学研究会理事、厦门市数学教学研究会会长、厦门市特级教师协会会长、北京师范大学兼职教授。

画外音

他不满足于当一个教书匠

1986 年 1 月，任勇参加了福建省优秀青年教师评选，获优质课一等奖。那一年，他的教学录像在全省中学数学教师中流传开来。

近年来，任勇已成为中学数学领域卓有建树的青年专家。他的《中学数学学习法》、《任勇中学数学教学艺术与研究》等专著在教育界颇具影响。

任勇之所以能取得超乎寻常的成就，是因为他有远大的志向。任勇在一份材料中写道："高尔基认为，'一个人追求的目标越高，他的才能就发展越快，对社会就越有益'。试想，一个教师若只满足于当一个教书匠而没有远大志向，是绝对不可能成为杰出的教育家的。虽然，我们不一定都能成为教育家，但我应当朝着这个方向迈进。"

任勇认为，按教师行为划分，优秀教师有以教师个人的精力、体力、身心的超常付出为基本特征的牺牲型；有以自己的专业实力和优异效果，通过对教育行为的描述与解释形成较大影响的专业型；有以学生的思想教育和成绩中下的学生的转化为主要成就的情感型。大多数优秀教师的行为是全面而综合的，同时又往往有个人的特色。有所作为的教师，特别是青年教师，首先应"三管齐下"，要有牺牲精神，要有专业功底，要有情感投入。联系自己，任勇说："没有牺牲精神，我早就打'退堂鼓'了；没有专业功底，别说搞学习科学研究，恐怕连书都教不好；没有感情投入，教师的教又如何能与学生的学达到某种动态的平衡，如何能教学互动、主动参与呢？"

对于一个教师来说，"三管齐下"的要求已经很高了。但更可贵的是，任勇还具有与时俱进的精神，他能根据时代的发展对自己提出更高的要求。任勇说："我曾给自己定了个目标——'做全面发展的研究型的人民教师'。随着时代的发展，我感到目标还可以再提高一些，将之改为'做高素质的新世纪育才者'。21 世纪的教育将注视着我们这一代人民教师，当教师就要当一流的高素质教师，这是时代对我们的要求。"

近年来，任勇与其他教师一起，根据所在学校的学情，构建了多种模式相融合的学习指导实验，即初一、高一的课题式学习指导，初二、高二的交流式学习指导，初三、高三的专题式学习指导，学科教学的渗透式学习指导，课题组的讨论式、咨询式学习指导，还有选修课、活动课、微型课的学习指导和家庭教育中的学习指导等。三年实验下来，他获得了一系列成果，其中《普通中学学习指导的理论与实践》一文，在全国学术会议上交流，并获一等奖。（马兰若　整理）

之一：借题发挥

——“不等式$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$证明”的巧妙设计

“问题是数学的心脏。”学习数学，一大关键是学会解题。解题教学是数学教师的基本功，解题是数学教学中的“微观艺术”，而任何艺术的精彩和感人之处，也许就在这“微观”之中。

例题教学是帮助学生掌握概念、定理及其他数学知识的手段；又是使学生掌握数学思想、方法，形成技能、技巧，以及培养学生数学能力的重要手段。

如何充分发掘、利用课本中例题的价值，是数学教育工作者正在积极探索的一个热点问题。

奥加涅相说得好：“很多习题潜在着进一步扩展其数学功能、发展功能和教育功能的可能性……从解本题到向独立地提出类似的问题和解答这些问题，这个过程显然在扩大解题的武器库，学生利用类比和概括的能力在形成，辨证思维、思维的独立性以及创造性的素质也在发展。”

数学教育家波利亚也认为：“一个有责任心的教师与其穷于应付烦琐的数学内容和过量的题目，还不如适当选择某些有意义但又不太复杂的题目去帮助学生发掘题目的各个方面，在指导学生解题的过程中，提高他们的才智与推理能力。”

基于上述理念，笔者以一道课本题为例，借题发挥，探索一题多解、一题多变、一题多用的价值，以期促使学生学会从多层次、广视角、全方位地认识、研究问题，培养学生的创新意识和创新能力。

游戏引入：

师：上课前，我们猜一条谜语，谜底是“考试不作弊”，猜一数学名词。

生：真分数。

师：（乐）非常正确，那么用“考试作弊”猜一数学名词呢？

生：（异口同声）假分数。

师：很好，现在请大家任意写下一个真分数。

师：分子、分母分别加上一个正数，新的分数与原分数的大小关系怎样？

生：一个真分数的分子和分母分别加上一个正数后其值增大。

引出问题：

已知 a、b、$m \in \mathbf{R}^{+}$，且 $a < b$，求证：$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$。

一题多解的教学价值

一道数学题，因思考的角度不同可得到多种不同的解题思路。寻求多种解法，有助于拓宽解题思路，发展观察、想象、探察、探索、思维能力。

证法 1（分析法）：略。

证法 2（综合法）：能用分析法证的题目，一般也能用综合法证，要求学生“口证”。

证法 3（求差比较法）：

因为 a、b、$m \in \mathbf{R}^{+}$，$a<b$

所以$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0$

所以$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$

证法 4（求商比较法）：

$$\frac{\frac{a+m}{b+m}}{\frac{a}{b}}=\frac{ab+bm}{ab+am}$$

因为 a、b、$m \in \mathbf{R}^{+}$，$a<b$

所以 $bm>am$，$ab+bm>ab+am$，且$\frac{a}{b}>0$

所以$\frac{\frac{a+m}{b+m}}{\frac{a}{b}}>1$

所以$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$

证法 5（反证法）：

假设 $\frac{a+m}{b+m} \leqslant \frac{a}{b}$

因为 a、b、$m \in \mathbf{R}^{+}$

所以 $(a+m)\ b \leqslant a(b+m)$，即 $bm \leqslant am$

所以 $b \leqslant a$，这与题设 $a<b$ 产生矛盾

所以假设不成立，故 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$

证法 6（放缩法）：

因为 a、b、$m \in \mathbf{R}^{+}$，且 $a<b$

所以 $\frac{a}{b} = \frac{a(b+m)}{b(b+m)} = \frac{ab+am}{b(b+m)} < \frac{ab+bm}{b(b+m)} = \frac{a+m}{b+m}$

证法 7（构造函数法）：

构造函数 $f\ (x)\ = \frac{x+a}{x+b}\ (0<a<b)$

因为 $f\ (x)\ = 1 - \frac{b-a}{x+b}$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上是增函数

所以 $f\ (m)\ > f\ (0)$，即 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$

注：利用函数单调性证明不等式具有优越性，高中实验教材已把微积分列入必修内容，用导数研究函数的单调性很方便，故此法应予以高度重视。

证法 8（增量法）：

因为 $a<b$，可设 $b=a+\delta\ (\delta>0)$

所以 $\frac{a}{b} = \frac{a}{a+\delta} = \frac{1}{1+\frac{\delta}{a}} < \frac{1}{1+\frac{\delta}{a+m}} = \frac{a+m}{a+m+\delta} = \frac{a+m}{b+m}$

证法 9（定比分点法）：

由 $\frac{a+m}{b+m} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{m}{b} \cdot 1}{1+\frac{m}{b}}$

可知$\frac{a+m}{b+m}$分 $\frac{a}{b}$与 1 为定比$\lambda=\frac{m}{b}>0$

所以$\frac{a+m}{b+m}$在$\frac{a}{b}$与 1 之间（内分点）

所以$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$

证法 10（斜率法 1）：

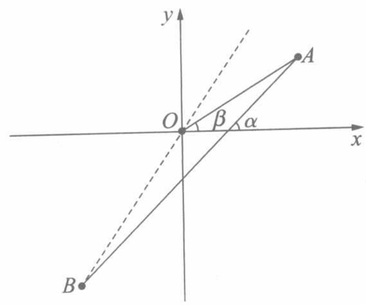

图 1

在直角坐标系中，$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a-(-m)}{b-(-m)}$表示经过 $A(b, a)$ 和 $B(-m, -m)$ 两点所在直线的斜率，设其倾斜率为 α，而$\frac{a}{b}=\frac{a-0}{b-0}$表示点 $A(b, a)$ 和原点 $O(0, 0)$ 所在直线的斜率，设其倾斜角为 β，如图 1。

由 $a<b$ 可知 A、B、O 三点不共线，且 A 点在直线 OB 的下方. 所以 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{4}$，故 $\tan\beta<\tan\alpha$，即$\frac{a-0}{b-0}<\frac{a-(-m)}{b-(-m)}$，因此，$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$。

证法 11（斜率法 2）：

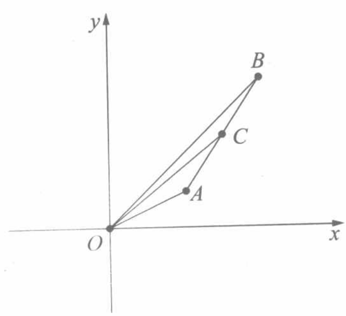

图 2

在直角坐标系中，设 $A(b, a)$，$B(m, m)$，则 AB 的中点$C\left(\frac{b+m}{2}, \frac{a+m}{2}\right)$，如图 2。

由于 OA、OB、OC 三线的斜率满足 $k_{OA}<k_{OC}<k_{OB}$，故得$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$。

证法 12（三角法）：

如图 3，在直角三角形 ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$BC=a$，$AB=b$，延长 BA 至 E，BC 至 D，使 $CD=AE=m$。

设 CA、DE 交于 F，则有 $\tan\angle DEB=\frac{a+m}{b+m}$，$\tan\angle CAB=\frac{a}{b}$。

因为$\angle CAB<\angle DEB$，所以 $\tan\angle CAB<\tan\angle DEB$，故$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$。

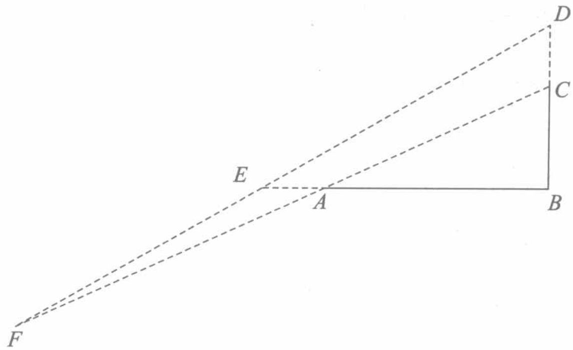

图 3

“解需有法，解无定法。大法必依，小法必活。”前六种证法是大法，必须“牢牢依靠”；后六种证法是小法，要会“灵活应用”。尤其是后六种证法，我们在“意料之外”和“令人震惊”之中，又一次体验到了数学的神奇、数学的美！

一题多变的教学价值

一个例题，如果静止地、孤立地去解答它，那么再好充其量只不过解决了一个问题。数学解题教学应突出探索活动，探索活动不能只停留在对原习题解法上的探索，而应适当地有机地对原习题进行深层的探索，挖掘出更深刻的结论，这就是数学教学中的变式艺术。变式，是一种探索问题的方法，也是一种值得提倡的学习方法；变式，可以激发学生学习数学的兴趣，可以有效地提高学生的数学水平。

变式 1：若 a、b、$m\in\mathbf{R}^+$，且 $a>b$，则$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$。

变式 2：若 a、b、$m\in\mathbf{R}^+$，且 $a<b$，则$\frac{b+m}{a+m}<\frac{b}{a}$。

变式 3：若 a、b、$m\in\mathbf{R}^+$，且 $a<b$，$a>m$，则$\frac{a-m}{b-m}<\frac{a}{b}$。

变式 4：若 a、b、m、$n\in\mathbf{R}^+$，$a<b$，$n<m$，则$\frac{a+n}{b+n}<\frac{a+m}{b+m}$。

变式 5：若 a、b、m、$n\in\mathbf{R}^+$，$a>b$，$n<m$，则$\frac{a+n}{b+n}>\frac{a+m}{b+m}$。

上面的5种变式，是通过类比、猜想得到的，但仍然感到“不痛快”，属“雕虫小技”之变式。能否再挖掘挖掘，“过把瘾”？从证明过程知$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<\frac{m}{m}=1$，这是不是一般的规律呢？联想到等比定理，进一步猜想，可得——

变式6：若a_1、a_2、b_1、$b_2\in\mathbf{R}^+$，且$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$，则$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\frac{a_2}{b_2}$。

作进一步推广，可得——

变式7：若a_i、$b_i\in\mathbf{R}^+$（$i=1, 2, \cdots, n$），且$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\cdots<\frac{a_n}{b_n}$，则$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$。

猜想正确吗？回答是肯定的。事实上，设$\frac{a_1}{b_1}=k$，则$a_2>kb_2$，$a_3>kb_3$，…，$a_n>kb_n$，求和$a_1+a_2+\cdots+a_n>k(b_1+b_2+\cdots+b_n)$，则$k<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$。

再进一步探索，可得变式8，且知变式1至变式7均为变式8的特例：

在变式7的条件下，有

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\cdots<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\frac{a_2+\cdots+a_n}{b_2+\cdots+b_n}<\frac{a_{n-1}+a_n}{b_{n-1}+b_n}<\frac{a_n}{b_n}。$$

“真过瘾!”“可以胡思乱想，但要小心论证。”

上述发现问题、解决问题、触类旁通、开拓创新的过程，不就是数学家的思维过程吗？数学家做什么工作？就做这个工作。我们也可以当“数学家”。

引申、推广就是找出一些特殊问题中所蕴涵的事物发展的规律性，从而得到更广泛的新结论。这种教学设计无疑增强了学生探求未知世界的信心和勇气，使他们体会到成功的喜悦和创造性工作的欢乐。

一题多用的教学价值

教学例题大多有其广泛的应用。一题多解，实现“由点到线”的变化；一题多变，又实现“由线扩大到面”的变化；而“借题发挥”，一题多用，则进一步实现“由面到体”的变化。这样，例题教学便可多层次、广视角、全方位地进行