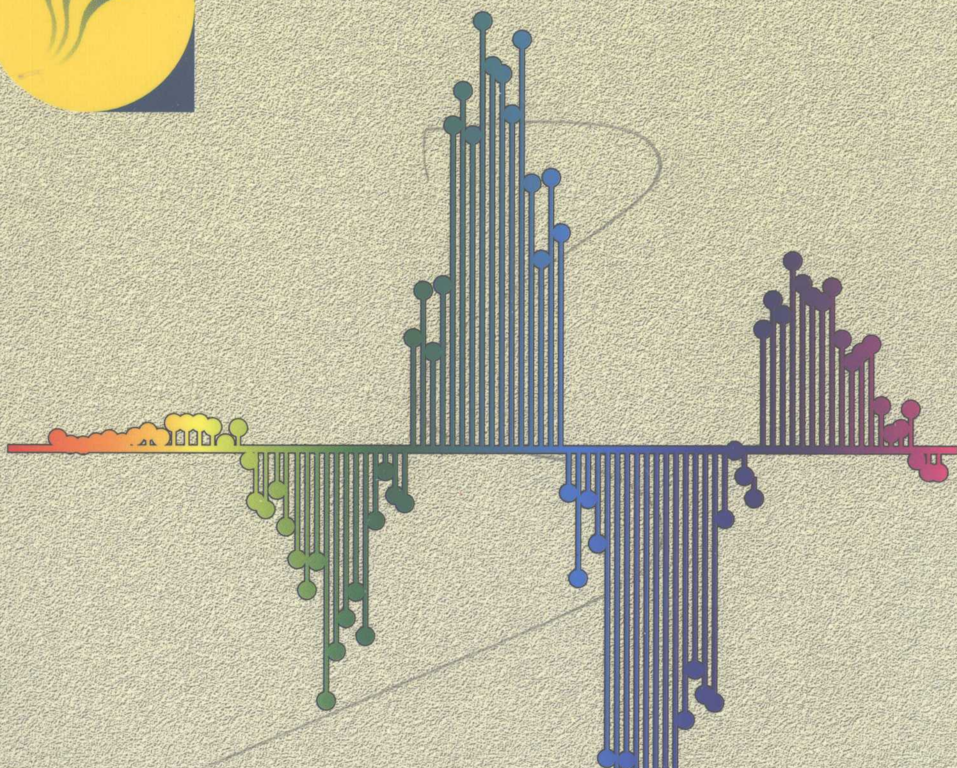
超小波分析及应用

Beyond Wavelets and Its Applications

闫敬文　屈小波　著



国防工業出版社
National Defense Industry Press

超小波分析及应用

闫敬文　屈小波　著

国防工業出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

超小波分析及应用/闫敬文,屈小波著.—北京:国防工业出版社,2008.6

ISBN 978-7-118-05649-5

Ⅰ.超...　Ⅱ.①闫...②屈...　Ⅲ.小波分析　Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 042676 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100044)

北京诚信伟业印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 14¾　**字数** 333 千字

2008 年 6 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—4000 册　**定价** 32.00 元

国防书店:(010)68428422　发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535　发行业务:(010)68472764

前　言

小波变换自从20世纪80年代以来,得到了广泛的应用。在信号与信息处理领域,已经成为像傅里叶变换一样必须掌握的数学工具之一。但要想系统地掌握小波变换理论不是一件容易的事。小波变换涉及数学中的泛函分析、时频分析、空间分辨和多尺度等数学知识,对于任何一个初学者来说,在没有系统掌握基础知识之前,学习小波变换都十分困难。

对于应用小波分析的学者来说,了解这些数学知识概念很有必要。但在不了解这些数学知识的时候能不能学习和应用小波分析技术呢?回答当然是肯定的,可以应用小波分析技术进行信息处理方面的研究和技术开发。例如大家可以找到很多篇在不同领域应用小波分析的论文,很多作者都不懂或没有系统地研究小波分析理论,但实际应用研究的效果很好。

学习理论的目的是学以致用,特别对工科和其他学科的应用研究来说,应用远比理论学习更重要。究竟掌握多少理论才可以应用呢?这个问题对不同领域要求也不一样,也与学者的理论基础和追求学术境界有关。我认为至少应该了解这些理论的由来,以及自己所用小波基的特性应用在哪一领域效果更好。

多数小波分析的应用学者在学习的初期经常犯同一个错误,总想能够系统地掌握小波分析理论。他们花了大量的时间去研究和学习,结果还是似懂非懂。直到应用时,才发现,Matlab工具箱中的一个命令就实现了小波变换。这是一个很典型的"实践论"中的问题,即从理论到实践,再从实践到理论不断认识世界的过程。学习小波分析也是一样从理论到实践,实践得到良好效果时再去与理论进行符合,只有通过这样的反复过程才能分析掌握小波,并灵活应用到实际研究工作中。

日月经天,万事物理皆如此。在不懂得理论原理时,暂先回避它直接去应用。当研究到一定深度后再回来学习理论,可能会学习得更快、更深入。

尽管小波变换在数据压缩和去噪声等领域取得了良好的效果,可分离的二维小波变换(不是直接构造出)采用先对行做一次一维小波变换,再对列做一次一维小波变换扩展而来,或者直接用两个可分离的一维函数基直接构造的二维变换,但从数学角度看,都不是真正的二维函数。基函数的支撑区域由区间扩展为正方形,基函数形状的方向性较差,该问题制约着小波变换的进一步应用。同时,由于采用亚抽样技术,在目标提取时会造成信息模糊,对信息利用会产生较大的影响。众所周知,如果某个基函数能与被逼近的函数较好地匹配,则其相应的投影系数较大,变换的能量集中度较高。可见对于平滑区域,小波变换的表示效率较高,而对于图像中方向性较强的边缘以及纹理,由于两者匹配较差,导致其表示效率欠佳。在高维情况下,小波分析并不能充分利用数据本身特有的几何特征,并不是最优的或"最稀疏"的函数表示方法。多尺度几何发展的目的和动力正是要致

力于发展一种新的高维函数的最优表示方法。

为克服小波分析的缺点,人们一直找其改进的方法。我们将这些方法统称为超小波(Beyond Wavelet)分析方法。提到超小波分析,首先要定义超小波分析。超小波分析就是把近来人们为改变小波分析的不足,提出常用基于小波变换技术基础之上的系列变换,即 Curvelet、Ridgelet、Contourlet、Bandelet、Beamlet、Directionlet、Wedgelet 和 Surfacelet 变换的统称,也有人称 X - let(包括 Wavelet)。当然,超小波并不是在所有应用方面都能超越小波变换。特别地,本书中的超小波主要是为克服传统二维小波变换在方向性、稀疏性等方面的不足所进行的改进。

本课程是一门研究型课程,将以高密度压缩式教学方式进行,浓缩大量的理论和实践教学内容,可配合 Castleman 著的《数字图像处理》和本人著的国家十一五规划教材《数字图像处理》(Matlat 版)(国防工业出版社,2007 年 2 月)等理论和研究型教材使用。课程内容的安排设置参照了作者在法国巴黎高等电信学校(巴黎高科之一)开展博士后研究期间学习和掌握的工程师教学和训练模式,并使其融入中国高等教育和研究生教育之中,更加适合中国的研究生和青年学者学习,在学习和训练过程中,力争使读者获得最大限度全面提高研究能力和创新能力。

本书以概要形式讲述基本理论,并紧密结合实践应用研究。具体内容如下:

第 1 章介绍本门课程的学习方法,介绍如何开展课程学习方法、新技术学习对策和工程训练推荐方式。这属于方法论的范畴,告诉大家如何和怎样学习本书。第 2 章概要介绍应用小波分析和应用时必须掌握的小波分析内容,即多尺度分析和 Mallat 算法,内容不多,不会占用太多的学习时间。超小波是基于小波分析基础之上新的多尺度分析,不了解小波分析直接去学习,显然不合适。第 3 章由小波变换引入到脊波和曲波分析,介绍其方向性的优点,并结合其特点,进行初步的应用研究。第 4 章在简要介绍数字滤波器组的基础上,重点分析了 Surfacelet 变换特点、性质和应用。应用是一个基于 3D 纹理模型的滤波,根据 Surfacelet 变换特点,将原来基于由常用 2D 纹理模型拓展到 3D,充分利用了分解后数据的 3D 纹理信息,取得了良好的噪声抑制效果。第 5 章介绍方向波与楔波变换。这个变换保留了可分离滤波和二次采样,计算简单以及由标准二维小波变换进行滤波器设计等特点,这区别于其他的一些方向变换(如 curvelets、contourlets 或 edgelets)结构中的情况。相应的各向异性基函数(directionlets)在沿着任何两个有着合理斜率的方向上都有方向消失矩(DVM)。第 6 章介绍了 KL 变换、第二代小波变换和基于小波的编码方法,并提出改进式 KL 变换/整数小波变换/SPIHT 压缩算法等多种先进的研究方法,是项目组中研究的优势研究和重点应用领域之一。第 7 章介绍 Bandelet 变换和应用,是全书的一个重点章节,是近几年新技术之一。有大量的研究和应用包含在这一章中,给读者展示了学术新天地。特别是 Bandelet 变换,虽然工具箱已经公布多年,在实际应用和测试过程中,因数学方法的复杂性导致对方法不十分了解,工具箱函数中的参数和变量的特性不能完全了解,限制了它的应用。本章还将对它的系数特征进行分析,给出分布规律和特点,指出其合适的应用研究方向。第 8 章介绍小线变换(Beamlets Transform)。小线变换是斯坦福大学的 David L. Donoho 教授 1999 年首次提出的,已经得到了初步的应用。由小线变换引入的小线分析(Beamlets Analysis)也是一种多尺度分析,但又不同于小波分析的多尺度概念,可以理解为小波分析多尺度概念的延伸,小线分析以各种方向、尺度和位置

的小线段为基本单元来建立小线库，图像与库中的小线段积分产生小线变换系数，以小线金字塔方式组织变换系数，再通过图的形式从金字塔中提取小线变换系数，从而实现多尺度分析。这一章也是重点研究内容，是近几年才出现的变换。由于 Beamlet 软件工具包还没有开放，应用实现比较难，只给出一些原理和基本研究应用的初步。第 9 章介绍 Contourlet 变换及其应用。Contourlet 变换是用类似于轮廓段(Contour segment)的基结构来逼近图像。基的支撑区间是具有随尺度变化长宽比的"长条形"结构，具有方向性和各向异性。Contourlet 系数中，表示图像边缘的系数能量更加集中，或者说 Contourlet 变换对于曲线有更"稀疏"的表达。而二维小波是由一维小波张量积构建得到，它的基缺乏方向性，不具有各向异性。只能限于用正方形支撑区间描述轮廓，不同大小的正方形对应小波的多分辨率结构。第 10 章在介绍脉冲耦合神经网络的基本原理的基础上，分析 PCNN 的特点、应用、分类等，并将其与小波变换比较，最后给出了 PCNN 与小波变换应用。因项目组在这一领域进行图像融合技术上取得了突破进展，故将本章放在最后，也是项目重点研究方向之一。

通过全书的内容学习和编程实验，可将本书中的内容做成一个初步的软件包，为进一步学习和研究时应用，具有较强的系统性。书中所涉及的全部是现代数字图像处理中的压缩编码，图像增强和图像融合等重要的研究内容，且紧密结合应用研究展开的。虽然从基础知识方面不是很全面和系统，但力求以点代面，为读者学习和研究开拓新方法和新思路。兵法云："伤其十指，不如断其一指"。本书以工程训练为背景，以"断其一指"为宗旨，以创新能力培养为目标，具有较强的科学性。正所谓"百闻不如一见，百见不如一练，百练不如一专"。看知识多了就不要再看了，需要练习。练习多了不如做成一个完整项目。能力从实践训练中来。本书中多数内容都是多年教学和科研中实践经验积累，汇成此书希望让更多的读者受益。

本书以精缩的理论知识、实践教学和工程训练相结合，可以作为计算机应用、通信工程和电子工程专业硕士和博士研究生、工程硕士、教师及工程技术人员学习数字图像处理、图像分析和基本图形学技术研究型教材、参考书和实验教学指导书。具有较强计算机编程能力和扎实理论的高年级本科生，可以选取其中适合部分内容作为工程训练的基本教材。书中包含很多内容，不同学校不同专业可以根据自己的侧重点进行适当取舍。全部内容可以作为 60 学时讲授，配套 PPT 将在作者的个人网站上免费下载。其中很多内容可以作为实验教学内容，不用再辅之以实验指导书。这是本书的另一个特点是书中附有大量的研究实例，全部采用 Matlab 和 VC + + 编程，代码均已调试通过。因篇幅有限，有些相关内容和源程序代码放在作者本人网页中供下载。通用源代码对读者全部免费开放，专用源代码部分可以与作者联系获取。需要源程序代码的读者可邮件联系 xdyjwen@126. com，yjwen@xmu. edu. cn，jwyan@stu. edu. cn，qxb _ xmu@yahoo. com. cn，或到作者的网页网址 http://naec. stu. edu. cn 和 http://isip. xmu. edu. cn 上免费下载(通用部分)。

本书所著部分工作是在厦门大学进行，本人工作调动到汕头大学后继续完成。特别感谢电子科大的尧德中教授和西南交大的张家树教授对本书提出宝贵建议！感谢谢国富、余见、陈嘉臻、李绿森、肖弘智等同学对书中的部分程序仿真和部分内容的整理工作。本书共计约 40 万字，其中屈小波负责编写 20 万字，肖弘智负责编写 5 万字左右。本人负

责全书的审阅、内容安排、出版联系和其他内容编写工作等。

本著作获汕头大学出版基金资助。汕头大学工学院正在推广本科的EIP－CDIO教学改革，这是国内第一所开展CDIO的高等学校。研究生的CDIO教学改革工作也即将推行。本教材作为CDIO教学改革教材的一种尝试，期待取得良好效果。

作者简介：闫敬文，男，汕头大学电子工程系教授，博士生导师。中国图像图形学会理事，中国通信学会会员，广东省数字信号图像处理重点实验室副主任。国家自然科学基金网上评审专家，《自动化学报》、《电子学报》、《光学学报》、《光学精密工程》等审稿人。主要从事小波分析及应用、遥感图像处理、图像处理和识别技术等，发表论文近100篇，SCI和EI检索15篇，主持国家自然科学基金、省部级项目及横向课题十多项。

闫敬文

2007年12月于汕头大学

目 录

第1章 超小波分析的学习方法

如何进行超小波分析的学习？在学习生活中，对这一问题的重要性、迫切性和影响还没有得到读者的足够认识。这是一个自然辩证法或自然科学中的方法论的问题，也是每个老师必须面对和掌握的理论。无论做什么事情，都有技巧和方法。好的技巧和方法会帮助你取得事半功倍的效果。对于学生来说，不了解这一问题是很正常的。因为学生不可能像老师那样了解各门课程的学科体系结构，也不清楚各种知识之间的相互关系。

很多人都看过金庸的武侠小说，对其中刻画的人物形象记忆深刻，这正是文学艺术作品的真正魅力所在。但我提一个问题，请说出各小说中的人物关系和武功流派？相信不是金庸武侠小说的研究人员，很少有人能够说明白。而计算机学科的发展正是建立在通信技术、电子技术、网络技术和信息处理技术的基础之上，各学科和课程之间的关系远远超过金庸作品中的人物关系和武功流派。而各学科或功课所需要纷繁的数学知识则更为复杂。教学过程中需要在引导学生去了解和掌握这些关系，建立系统的知识结构体系。学生在学习过程中，要知道哪些内容重要，了解重点或感兴趣的内容是什么，如何去学，怎样应用，想学到什么技术和特长等。如果学生清楚了这些问题，在学习和研究生活中，会更有针对性，让学习生活更充实。既学到了扎实的理论知识，又学会了研究方法和技术应用。特别是对那些研究生同学，面临研究和写学术论文的迫切需要时，学习一种新的技术和方法，将会有助于学业的顺利完成。

下面用一个例子说明这一问题。在我教过的学生中，有一名同学的数学基础很好，也有较高的理想报负。但上了大学后，因为目前高等教育中的问题，教学还主要停留在书本理论知识教学上。他不是很感兴趣，又不知道做什么，失去了学习的原动力。在从网上看到我招募科研助手的帖子后，直接来到我的研究小组。经过几个月的训练，他感觉提高很多，并觉得从研究中掌握的深入理论指导会对理解原来教材中的问题有帮助，还有助于知识系统性的形成。在他所研究的专题中，可以在QQ群上与博士研究生进行交流。要知道这只是一个大学四年级的学生。学习必须讲方法和策略，需要老师的引导和学生自己的独立领悟相结合。老师的引导即所谓的"师傅领进门"，独立领悟指的是学生的悟性，是在长期训练和经验积累的过程中慢慢形成的。

超小波分析是基于小波分析的新的多尺度分析方法。很多人会想，小波分析还没有学会，有必要学习超小波分析吗？我能够学会、学好吗？问题回答是肯定的。在方法得当时，再结合老师的正确指导，不但能够学会，而且能够学好。这有一个前提，就是读者必须勤奋和刻苦，这是实现上述目标的充分条件。

再举一个本科生学习和研究超小波分析例子说明这个问题。我指导一个厦门大学软件学院的本科生同学进行毕业设计，选题是超小波分析中的 Bandelet 和 Contourlet 研究和应用方法。他刚开始根本不懂，甚至 FFT 的实现和性质都不清楚，可能是因为软件学院学习信息处理技术少的缘故。他经常问一些对于我们从事信息处理和计算机应用学科

的研究人员来说很低级的问题,甚至让人感觉有些幼稚。接下来他开始学习小波分析,经常和研究小组中研究生师兄们探讨理论和应用问题。两个月后,他基本了解了小波分析和基本超小波分析,并且开始尝试应用这一数学工具进行计算机仿真。等到毕业设计结束时,他已经完成了全部上述问题的分析和测试工作,并将这些技术应用于去噪声增强和压缩,取得令人满意的效果。在我审阅稿件时得知,他的研究水平与国内很多单位的博士研究生开展的研究是同步的,这给予他和小组的其他成员以极大的信心和鼓舞。当然这位同学是厦门大学软件学院优秀学生,已经保研到中科院软件所。普通同学要做到这样的成绩,需要付出更多的努力。

1.1 超小波分析学习的对策

当今社会已经进入了数字化的信息时代。大量的数据需要用信息处理手段去处理和分析。而纷繁的数学工具和分析方法令读者如坠云雾之中,不知道什么有用什么没用,不知道什么学习方法好。而这些信息中最重要的是图像信息,它所包含的信息是所有其他媒体信息的总和还要多。人类认识自然界都离不开这些信息。当今科技和现实生活中的任何领域的设备都要求数字化和成像。如用于宇宙观测的天文望远镜获得了大量的观测数据、遥感地球资源卫星获得了大量对地观测数据、气象卫星获得云图来预测气象的变化、各种成像系统获得相关的测量或成像数据等。这么多纷杂的图像如何存储、传输、处理和分析,是必须解决的问题。但我们又不能用较短的篇幅来说明这个问题,几本甚至十几本书也不可能覆盖所有的内容。而超小波分析则是这些技术应用最典型和前沿的代表,反映近年来图像多尺度分析的最新进展。选中这一领域作为主要研究内容,恰好能够满足读者对新知识和技术的渴求,并引导大家探讨学术新天地。因此我们只强调超小波多尺度分析技术中常用的方法,将理论精缩,侧重于实践技术和实现方法,以弥补理论教学与实践结合不紧的不足。在无法做到面面俱到的同时,力争以几个领域中的经典方法为例,讲清楚、讲透彻,起到举一反三的效果。在理论和应用的实践教学中,要打"歼灭战",才能取得良好的效果,培养学生的创新能力,并以此带动其他相关的教学内容,创造良好对新知识和新技术学习氛围,加强创新能力培养。既然超小波分析涉及到这么多的数学和专业基础知识,对某些专业就不能系统地学习,只能在遇到相关知识时,学生自己进行学习或复习。应遵循从理论到实践,再从实践到理念的原则,促使研究不断引入深入。

另一种比较好的切实可行的方法则是以研究小课题为主的实际训练代替或弥补课堂上教学内容的不足之处。每一个学生的知识掌握程度如何,会不会灵活应用,主要取决于真正的实际训练。不但要训练,还要看训练效果,也要看是不是学生自己或研究小组独立设计完成。本书的内容设计和安排借鉴了法国高等电信学校的ECOLE教学模式中的大容量紧缩方法,内容安排紧凑合理,即有深度又注重基础训练,克服传统教学中的空谈理论、缺乏实践教学的缺点。本书的另一个突出特点是把学习Matlab语言和数字图像处理的工程训练紧密结合起来,克服只学习Matlab语言或介绍其中的某个工具箱应用的个性学习,以点代面,要求读者不要局限于书中的特例,借鉴特例,自己独立完成书中的习题或自己设立的习题。

1.2 新知识和技术进展学习攻守策略

本书十分侧重新知识和新技术内容的学习，引入了近年超小波分析研究和应用中的最新进展。如曲波变换、脊波变换、Bandelet 变换、Contourlet 变换、Beamlet 变换和 Surfacelet 变换技术等内容都是 20 世纪 90 年代后期开展的研究，个别研究领域是近几年才刚开始的。本书对于数学知识侧重于数学变换及应用，以应用为主线进行分析，不再讲系统的各种变换，避免和相关基础课程内容的重复。这部分内容很多，对于学生来说也最难。在做这部分内容课题时，提供必要的例子和相关的基于 Matlab 环境的源代码。应加强学生学习的积极性和主动性，给学生以一定的自由度，在教师的引导下，自己去选择应该学什么和做什么，充分发挥想象力和创造力。随着国家和地方政府对高等学校的投入力度的加大和教育部倡导的提高本科生教学质量，学校的各种条件都得到了进一步改善。大量的计算机实验室都基本进行对外开放。为了弥补课外时间上机不足的缺点，多数高年级学生自购了计算机，在宿舍也可以学习。开放实验室，让学生有更多的业余时间进入实验室，特别是课余时间利用实验室进行实验，是提高实验质量的必经之路。因为教师只能在课堂上进行教学和实验，课时所限无法保证学生学习质量。如果只是教师为主体进行教学和实验，不发挥同学的积极性和主动性，也无法真正提高教学质量。现在学生学习大部分或者说主流是好的，比较珍惜学习时间。但是有小部分同学，在没有提供给他条件时总是提要求，但是满足了条件或者有了条件却不去利用，甚至利用计算机玩游戏、网上聊天或看新闻等。只有实验时间紧张时，才会使学生真正利用实验室的条件。而这方面的引导全部要靠教师引导，要以教学方式来指导。不是空谈地说教，更不能应用旧的教学课程内容进行教导，或进行广播操式的机械式验证实验。

而对于研究生的培养，目前国内面临的问题也十分突出。因学校近年来大量扩招本科生的同时，为缓解就业压力，研究生也进行了大量扩招。结果导致导师带的学生多，或条件跟不上，培养质量严重滑坡。而研究生学术培养存在的问题更多。为了应付发表论文，学生没有能力或在浮燥心态下，只能开展低水平重复研究工作，经常出现抄袭现象。结果是好的硕士比差的博士好，好的学士比差的硕士强。这种现象必须消除。而高等学校一线教学和科研的教师正是消除这些问题的主体力量。不但要有行政手段，还要通过教师具体落实各项措施。

而这些新技术、新知识的引入和学习，可以填补这方面的不足。真正的能力是训练出来的，真“功夫”是在课外学习到的。课堂上教学主要是传授知识和引导学生。随着学生就业压力的增加，相信他们会喜欢这些新技术和新知识。通过上述过程培养出的学生有创新能力，在择业竞争中会处于有利地位。

1.3 工程训练或研究课题推荐学习方式

在学习课程内容的同时，我们会布置很多习题或研究小课题供学习选择。习题或研究小课题分成不同级别，根据难度不同侧重点也不同。学生根据数学基础和应用能力水平，选择适当的级别题。当然学生也可以自己选择课题，经过授课教师考察后确定其级

别。设立级别可以让学生有较大的选择余地,也可以视学习完成的效果进行综合评价成绩。这些成绩计入期末考试成绩。有条件的专业可以结合教师的研究课题,或研究生做的项目来进行。这样可以不断地推进研究课题的水平不断提高。要不断地积累和总结,对特别优秀的要进行点评和经验交流,促进大家共同提高。进行经验交流是十分必要的,让学生了解自己哪些地方做得不好,哪些地方有创新。在完成这些研究课题的时候,建议系统训练,以打好基础为主,为以后的学习和研究创造条件。切忌“贪”而不“实”地学,要做到真正弄懂。举一个例子,如果大家训练了10个题目,多数都没有会,相信只有会的才有收获。要打歼灭战,“伤其十指不如断其一指”,道理就是这么简单。不以量取胜,应以质为准。本书力求压缩篇幅,尽量做到言之有物。特别是书中的好多例程,没有给出结果图像,目的让学生亲自去练习,自己做出结果。学生能力从大量有研究性和创新性的实践练习中来,不是从教科书中来。知识并不等于能力。知识和能力之间的关系是因果关系,知识是培养能力的前提条件和基础。能力是在对知识掌握并灵活运用的基础上,实现并应用于软件和硬件的开发过程中产生的。

在工程训练或研究课题进行过程中,十分注重系统性。系统的概念在我们每个人的学习过程中的地位是十分重要的。如果有了系统的知识或概念,对学习过程中的知识体系结构就能够正确地把握。如果能够把一门课程和它的前续基础课建立起系统的联系,在学习过程中或之后,学生都能够把握知识点,并能灵活应用。知识系统的概念,贯穿每个人一生学习的始终,也是他能否成功的关键因素之一。本书推荐工程训练或研究课题的过程不具体,是指导性的。各学校和专业视实际情况不同,可以选择或确定适合自己的学习方式。而上述提出的经验是在多年实际教学和实验教学经验的基础上提出来的。应充分调动教师和学生的积极性,做到有的放矢。要使学生创新能力培养与教师科研结合起来,与实验教学和实际工程项目联系起来。

第 2 章　多分辨分析和塔式算法

利用正交多分辨分析以及尺度方程和小波方程的系数，可以得到信号小波变换的正变换和逆变换的递推算法，即 Mallat 算法。对于读者学习小波分析时，初步需要掌握的主要部分就是小波多尺度分析和 Mallat 算法。本人认为对应用小波分析的读者来说，掌握这两部分基本理论和技术就可以进行应用研究。没有必要再花大量的时间学习小波基本理论，要知道学习理论最终的目的是应用。掌握小波分析的基本思想、框架、Mallat 算法就可以了，接下来读者应该把主要精力放在应用方面。

2.1　多分辨分析

将 $L^2(R)$ 上的多分辨分析记为 $(\{V_j;j\in\mathbf{Z}\},\varphi(t))$，尺度方程和小波方程为

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_{k\in Z}h_k\varphi(2t-k),\psi(t)=\sqrt{2}\sum_{k\in Z}g_k\varphi(2t-k)\tag{2-1}$$

其中系数关系是 $g_k=(-1)^{1-k}\overline{h}_{1-k},k\in Z$，对任意的整数 j 和 k，沿用前述记号

$$\varphi_{j,k}(t)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),\psi_{j,k}(t)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k)\tag{2-2}$$

和

$$\begin{cases} V_j=\mathrm{Closespan}\{\varphi_{j,k}(t);k\in Z\} \\ W_j=\mathrm{Closespan}\{\psi_{j,k}(t);k\in Z\} \\ L^2(R)=\bigoplus_{j\in Z}W_j=\mathrm{Span}\{\psi_{j,k}(t);(j,k)\in Z\times Z\} \end{cases}\tag{2-3}$$

对于任意信号 $f(t)\in L^2(R)$，引入记号

$$c_{j,k}=\int_R f(t)\overline{\varphi}_{j,k}(t)\mathrm{d}t,d_{j,k}=\int_R f(t)\overline{\psi}_{j,k}(t)\mathrm{d}t\tag{2-4}$$

称为 $f(t)$ 的尺度系数和小波系数，同时，将 $f(t)$ 在闭子空间 V_j 和 W_j 上的正交投影分别记为 $f_j(t)$ 和 $g_j(t)$，这样

$$f_j(t)=\sum_{k\in Z}c_{j,k}\varphi_{j,k}(t),g_j(t)=\sum_{k\in Z}d_{j,k}\psi_{j,k}(t)\tag{2-5}$$

根据空间正交直和分解关系

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j\tag{2-6}$$

可得

$$f_{j+1}(x)=f_j(x)+g_j(x)\tag{2-7}$$

信号的尺度变换系数和小波变换系数之间的关系现在可以写成

$$\sum_{l\in Z}c_{j+1,l}\varphi_{j+1,l}(t)=\sum_{k\in Z}c_{j,k}\varphi_{j,k}(t)+\sum_{k\in Z}d_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{2-8}$$

在这些铺垫之后,本节要解决的问题可以表述为:

(1) 若系数 $\{c_{j+1,k};\ k\in Z\}$ 已知,给出计算系数 $\{c_{j,k};\ k\in Z\}$ 和 $\{d_{j,k};\ k\in Z\}$ 的算法,即 Mallat 分解算法。

(2) 如果已知系数对 $\{c_{j,k};\ k\in Z\}$ 和 $\{d_{j,k};k\in Z\}$,给出计算系数 $\{c_{j+1,k};k\in Z\}$ 的算法,即 Mallat 合成算法。

(3) 在重复使用 Mallat 算法的过程中,每步计算得到的信号所在子空间的关系,即算法的几何意义。

(4) Mallat 算法的二维形式。

2.2 Mallat 算法

为了由 $\{c_{j+1,m};m\in Z\}$ 计算系数 $\{c_{j,n};n\in Z\}$ 和 $\{d_{j,n};n\in Z\}$,分别用 $\overline{\varphi}_{j,n}(t)$ 和 $\overline{\psi}_{j,n}(t)$ 乘上述分解式两端之后求积分,并利用尺度方程和小波方程的系数公式

$$h_l=\int_R\varphi(t)\overline{\varphi}_{1,l}(t)\mathrm{d}t,\ g_l=\int_R\psi(t)\overline{\varphi}_{1,l}(t)\mathrm{d}t \tag{2-9}$$

可以得到 Mallat 分解公式

$$c_{j,n}=\sum_{m\in Z}\overline{h}_{m-2n}c_{j+1,m},\ d_{j,n}=\sum_{m\in Z}\overline{g}_{m-2n}c_{j+1,m} \tag{2-10}$$

为了由系数 $\{c_{j,n};n\in Z\}$ 和 $\{d_{j,n};n\in Z\}$ 计算 $\{c_{j+1,m};m\in Z\}$,用 $\overline{\varphi}_{j+1,m}(t)$ 乘以信号级数分解式两端之后求积分,并利用系数公式得 Mallat 合成公式

$$c_{j+1,m}=\sum_{n\in Z}(h_{m-2n}c_{j,n}+g_{m-2n}d_{j,n}) \tag{2-11}$$

2.3 小波包变换的 Mallat 算法

分析分解和合成公式的推理过程和形式构造,利用正交小波包的定义可知,正交小波变换的 Mallat 算法完全适合正交小波包变换,因此得到小波包变换的 Mallat 算法。为了具体给出算法公式,对于 $l=0,1,2,\cdots$,引入记号

$$d_{j,n}^{(l)}=\int_R f(t)\overline{\mu}_{l;j,n}(t)\mathrm{d}t \tag{2-12}$$

而且,$D_j^{(l)}=\{d_{j,n}^{(l)};n\in Z\}$,于是,$f(t)$ 在小波包空间

$$U_j^l=\mathrm{Closespan}\{\mu_{l,j,n}(t)=2^{\frac{j}{2}}\mu_l(2^jt-n);n\in Z\} \tag{2-13}$$

上的投影可写成

$$g_j^{(l)}(t)=\sum_{n\in Z}d_{j,n}^{(l)}\mu_{l,j,n}(t) \tag{2-14}$$

2.3.1 小波包分解的 Mallat 算法

类似于小波分解公式,容易得到小波包分解的 Mallat 算法公式