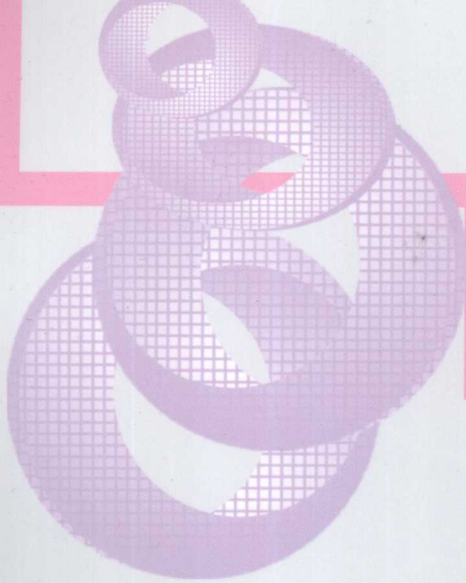

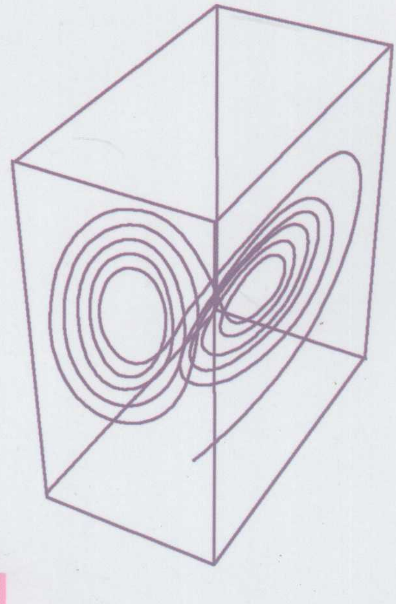

鞠国兴 编著

理论力学

（理科用）

学习指导与习题解析

科学出版社
www.sciencep.com

理论力学学习指导与习题解析

（理科用）

鞠国兴　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者在南京大学物理系与匡亚明学院多年教学实践基础之上编写的教学辅导书，主要包括基本理论纲要、解题方法和习题解答三部分，涵盖了物理学及相关专业理论力学课程的基本内容并在某些方面有所提高．书中注重解题的规范性、方法性和技巧性，一题多解，将概念分析与问题求解有机地结合起来，使学生正确地理解基本物理概念并培养灵活运用基本理论的能力．习题后面的说明以及一些精选的新题融合了物理学发展的最新成果，意在拓宽学生的思路，了解力学与相关学科的联系．

本书可作为综合大学、师范大学物理学专业及相关专业理论力学课程学习的教学辅导书，也可供教师及报考相关专业研究生的考生参考．

图书在版编目(CIP)数据

理论力学学习指导与习题解析(理科用)/鞠国兴编著．—北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-020285-7

Ⅰ.理…　Ⅱ.鞠…　Ⅲ.理论力学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 012160 号

责任编辑：胡云志　杨　然／责任校对：刘小梅

责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 2 月第　一　版　开本：787×1092 1/16

2008 年 2 月第一次印刷　印张：29

印数：1—3 000　字数：676 000

定价：41.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前 言

理论力学是物理学及相关专业的重要的基础课程, 也是大学阶段学生学习的第一门理论课程. 在学习这门课程时, 学生普遍感到课程理论性强, 需要用到的数学知识较多, 在灵活应用所学知识、习题求解等方面均有一定的困难. 更因为在教学改革中, 基本形成共识的是理论力学课程应以分析力学内容为主, 它涉及许多新的概念和方法, 无疑也增加了学生学习的难度. 这些情况决定了仅通过课堂教学这个环节学习本课程是远远不够的, 要有课外复习、练习和辅导等作为必要的补充. 在现有的教学计划中, 由于课程学时的减少, 许多学校取消了辅导答疑甚至习题课, 这样实际上减少了一些教学环节; 课外训练时学生会遇到各种各样的问题, 而目前理科类理论力学辅导书又比较欠缺. 这些问题极大地影响了理论力学课程的教学效果. 为帮助学生解决问题, 加强对基本理论的理解, 提高学习效果, 同时适当拓宽他们的知识面, 我们编写了本学习辅导书.

本书包括课程的基本内容、解题方法指导、习题分析解答及一些基本概念的讨论等几个部分, 其体系与梁昆淼编《力学》(下册, 第三版)①相同. 基本内容部分比较详细地介绍了理论力学的基本概念、基本理论、重要的结果, 它们大体上反映了理论力学这门课程的基本要求. 分析和解答的问题有约三分之二取自《力学》一书的习题, 其余的题目选自国内外的研究生入学考试题或专业文献资料. 对部分题目给出了多种解法, 以增强学生灵活运用知识的能力. 不同的解法往往分布在不同的章节中, 为方便使用, 在题目解答后指明参见之处. 概念的分析主要是针对容易混淆或易于错误理解的那些概念, 放在习题解答后的讨论中. 为扩展学生的知识面, 或以习题的形式或在习题的讨论中对课程内容作了一点提高或延伸. 这大体有两类, 题目中涉及的某些概念、运动特征等与力学新进展或其他学科相关的, 或者一些可用力学方法处理的其他学科的有趣问题. 例如增加了关于对称性和守恒律关系, 系统平衡类型的相空间分析, 力学中的几何相位等方面的习题. 希望以此使学生了解力学的一些新进展, 并加深对力学课程的重要性的认识及其力学与现代物理学发展的关系的认识.

在本书编写过程中, 我们参考了国内外理论力学教材、有关辅导类书籍和教学研究文章, 后者在问题讨论的相关部分均悉数列出, 希望深入了解这些内容的读者可参阅原文. 将概念的讨论、内容的深化与习题的求解结合起来, 对我们来说是一种尝试, 是否合适请读者评判.

本书是在逐年积累的教学资料的基础上经过整理编写而成的, 曾以讲义的形式作为理论力学课程教学的辅助材料在南京大学物理系和匡亚明学院的多届学生中使用过. 教学中学生提出的各类问题, 使本书在准确性和科学性方面有很大的改进和提高. 在出版前, 我们对原讲义进行了全面的修订, 并依据新近搜集到的资料, 增加了一些说明和有新意的习题.

本书主要适合于学习理论力学课程的理科读者, 可以作为理论力学课程的学习辅导书,

① 作为普通高等教育"十一五"国家级规划教材之一, 本书将修订出新版本.

也可作为报考相关专业研究生的考研复习参考书.

本书的编写工作得到南京大学物理系国家理科人才培养基地基金的资助. 南京大学物理系金国钧教授、柯善哲教授、施毅教授、朱劲松教授、朱沛臣教授、任中洲教授、王炜教授等给予作者诸多鼓励、关心和支持, 在此向他们表示由衷的感谢. 在教学工作中, 作者曾与杨英伟教授、梁仁统教授等进行过多次有益的讨论并合作编写过理论力学教材, 本书中的基本内容部分吸收了所编教材中的一些讲法, 谨向他们深表谢意. 此外, 对科学出版社昌盛先生、胡云志先生给予的帮助表示诚挚的感谢!

由于作者水平有限, 书中疏漏之处在所难免, 恳请读者批评指正, 作者的电子邮箱为 jugx@nju.edu.cn.

鞠国兴　谨识

2004 年 9 月初稿

2007 年 6 月修订于南京大学物理系

目　录

第 1 章　矢量力学基础

1.1　基 本 内 容

1.1.1　运动学

运动学研究物理系统在时空中的运动, 并用几何方法对运动进行描述, 它通常不涉及运动产生的原因. 在矢量力学 (或称为牛顿力学) 中, 时间和空间是分离的. 空间是平直的, 即可用欧几里得几何描述. 同时空间是均匀性和各向同性的, 而时间是均匀的. 时空的这些特点决定了特定的动力学结果, 即存在守恒律, 在分析力学中将对此进行详细讨论.

描述物体运动的基本物理量是位矢 $\boldsymbol{r}$、位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 等.

基本物理量的基本特点是: 瞬时性、相对性和矢量性.

(1) 基本物理量都是描述物体某一瞬时的运动状态的.

(2) 它们都是相对于特定的参考系而言的. 对运动学问题, 参考系的选取是任意的. 而为了应用数学分析的方法对运动等进行定量的描述, 还必须在参考系中建立坐标系. 对于同一参考系, 可以选取不同的坐标系, 即坐标系不是惟一的. 坐标系的不同选取, 对求解问题的方便与否有一定的影响. 常用的坐标系有: 直角坐标系、柱坐标系、球坐标系和自然坐标系.

(3) 物理量的矢量性表明在运动过程中可能既有大小的变化又有方向的变化或二者兼而有之. 不论何种情况都引起该物理量的变化.

这些特点同样适用于动力学中的基本量, 只不过对力 (不包括惯性力) 通常认为是与参考系无关的.

运动学有两类基本问题: ①已知质点的运动学方程, 求质点的速度和加速度; ②已知质点的速度或加速度, 求运动学方程等. 从数学的角度看, 前者对应于求导过程, 后者对应于求积分的过程.

一、基本物理量的定义

1. 位矢 $\boldsymbol{r}(t)$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 是由在选定的参考系中某确定的点指向质点所在位置的径矢 (图 1-1), 它表示了质点位置随时间变化的规律. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 又常称为运动方程式. 质点位置在空间中描出的曲线称为轨迹. 位矢是时间 t 的单值连续可微函数, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$.

2. 位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}(t,\Delta t)$

它描述质点空间位置变化情况, 它表示在某给定时间 (Δt) 内, 由初始时刻 (t) 的位置指向终了时刻 $(t+\Delta t)$ 质点所在位置的矢量 (图 1-2), 它是 t 和 Δt 的函数, 即

$$\Delta\boldsymbol{r}(t,\Delta t)=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t). \tag{1.1}$$

3. 速度

速度定义为位矢对时间的微商, 即

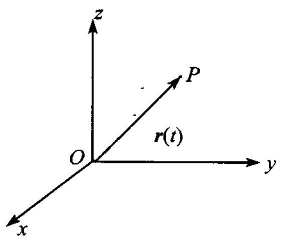

图 1-1

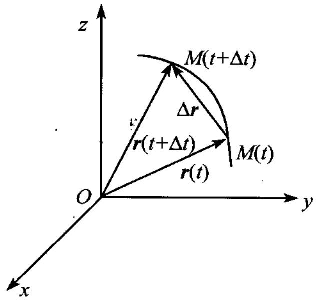

图 1-2

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.2}$$

它是反映质点运动快慢和方向变化的物理量, 也是时间 t 的单值连续可微函数.

4. 加速度

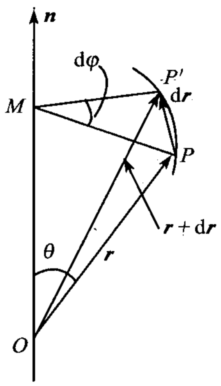

图1-3

加速度定义为速度对时间的微商或位矢对时间的二次微商, 即

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{1.3}$$

它描述质点运动速度变化的快慢.

5. 角位移、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\beta}$

质点绕某一轴 (它可以是固定的, 也可以是运动的, 其方向由单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 表征) 转动引起其位置的变化. 角位移定义为: 其大小为转动的角度 $\mathrm{d}\varphi$, 方向沿着转出 $\mathrm{d}\varphi$ 角的转动轴并按右手螺旋法则确定 (图 1-3)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}\varphi\boldsymbol{n}. \tag{1.4}$$

注意, 有限转动的角位移不是矢量.

角速度定义为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}, \tag{1.5}$$

它反映转动的快慢和转动的方向. 角加速度定义为

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.6}$$

当转轴是固定的, 即定轴转动时, 其方向 $\boldsymbol{n}$ 是不变的, 则 $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{n}$. 而当转轴是运动的, $\boldsymbol{n}$ 将随时间而变, $\boldsymbol{\beta} \neq \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{n}$. 此时 $\boldsymbol{\beta}$ 将反映转轴的方向的变化以及角速度大小的变化. 转轴的方位以及绕轴的转动可以用诸如欧拉角等参量表示, 参见刚体力学部分的有关内容.

二、位矢、速度和加速度在各种坐标系下的表示式

力学中通常采用的坐标系是正交坐标系, 即各坐标轴之间是相互正交的. 有下列几种常用的坐标系, 这里将位矢的起点均取在坐标系的原点.

1. 直角坐标系 $O\text{-}xyz$

在该坐标系下, 质点的位置坐标为 (x, y, z), 它的位矢的分量表示为

$$r = xi + yj + zk, \tag{1.7}$$

其中, i, j, k 分别表示沿 x, y, z 轴正方向的单位矢量, 且具有性质

$$|i| = |j| = |k| = 1, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.8}$$

根据定义, 可得速度、加速度的分量表示式分别为

$$v = \dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k = v_x i + v_y j + v_z k, \tag{1.9}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x i + \dot{v}_y j + \dot{v}_z k = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k = a_x i + a_y j + a_z k. \tag{1.10}$$

2. 平面极坐标系

以极点为坐标原点, 过 O 的某一方向为极轴, 则质点的位置坐标为 (r, θ), 它的位矢可写为

$$r = r r^0, \tag{1.11}$$

其中, r^0 是径向上的单位矢量, 以极点指向外为它的正方向. θ^0 是横向上的单位矢量, 横向的正向指向极角增大的方向 (图 1-4). 矢量 r^0 和 θ^0 具有性质

$$|r^0| = |\theta^0| = 1, \quad \frac{\mathrm{d}r^0}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\theta^0, \quad \frac{\mathrm{d}\theta^0}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}r^0. \tag{1.12}$$

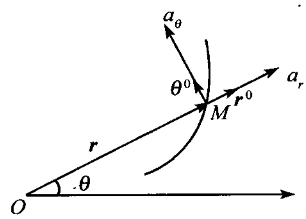

图 1-4

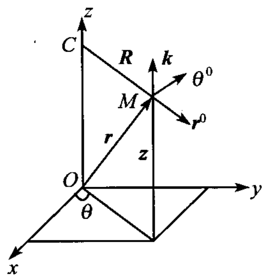

图 1-5

速度的分量表示式为

$$v = \dot{r}r^0 + r\dot{\theta}\theta^0 = v_r r^0 + v_\theta \theta^0, \tag{1.13}$$

其中, $v_r = \dot{r}$ 是 r 的大小变化引起的, 而 $v_\theta = r\dot{\theta}$ 是 r 的方向变化产生的. 加速度的分量表示式为

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)r^0 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\theta^0 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)r^0 + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\theta^0 = a_r r^0 + a_\theta \theta^0. \tag{1.14}$$

3. 柱面坐标系

选图 1-5 所示的 r^0, k 和 θ^0 为柱坐标系的三个坐标轴的正方向的单位矢量, 则质点的位置坐标为 (R, θ, z), 它的位矢可表示为

$$r = Rr^0 + zk. \tag{1.15}$$

单位矢量具有性质为

$$|k| = |r^0| = |\theta^0| = 1, \quad \frac{\mathrm{d}r^0}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\theta^0, \quad \frac{\mathrm{d}\theta^0}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}r^0, \quad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.16}$$

速度的分量表示式为

$$v = \dot{r} = \dot{R}r^0 + R\dot{\theta}\theta^0 + \dot{z}k = v_r r^0 + v_\theta \theta^0 + v_z k, \tag{1.17}$$

即有分量式

$$v_r = \dot{R}, \quad v_\theta = R\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{1.18}$$

加速度的分量表示式为

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}^0 + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}^0 + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{1.19}$$

加速度的分量为

$$a_r = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}, \quad a_z = \ddot{z}. \tag{1.20}$$

4. 自然坐标系

当质点运动轨迹已知时, 采用自然坐标系研究问题比较方便. 其坐标原点取在轨道上某瞬间与运动质点重合的点. 质点的位置用弧坐标 s 描述, 切线正方向指向 s 增加的方向, 以单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 表示, 主法线的正方向指向运动轨迹的凹侧并垂直于 $\boldsymbol{\tau}$, 以单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 表示. 由切线、主法线、次法线的正方向组成右手螺旋系规定次法线的正方向, 此正方向以单位矢量 $\boldsymbol{b}$ 表示 (图 1-6), 则

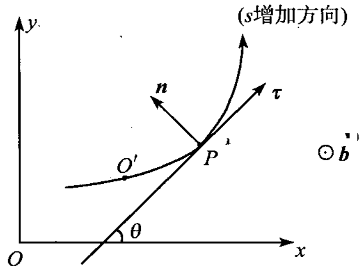

图1-6

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}. \tag{1.21}$$

单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$ 具有性质

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n} = \dot{\theta}\boldsymbol{n}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\boldsymbol{\tau}) = -\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}. \tag{1.22}$$

在自然坐标系中, 质点的位矢可以写为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), \quad s = s(t). \tag{1.23}$$

速度由定义可写为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \tag{1.24}$$

即分量为

$$v_\tau = \dot{s}, \quad v_n = 0, \quad v_b = 0. \tag{1.25}$$

加速度的表示式为

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\dot{\theta}\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}. \tag{1.26}$$

加速度的各分量分别为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \tag{1.27}$$

ρ 是质点所在位置轨道的曲率半径,$\rho = \left|\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|$. 在弧坐标增大, θ 同时增加或弧坐标减少 θ 也相应减少这两种情况下, ρ 可直接写为 $\rho = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$, 此时总保证 $\rho > 0$ 成立.

常用的曲率半径公式见表 1.1.

表 1.1 常用的曲率半径公式

曲线类型	轨道方程	曲率半径
平面曲线	$y=f(x)$	$\rho=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{\lvert y''\rvert}$
	$r=r(\theta)$	$\rho=\dfrac{\left[r^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{\left\lvert r^2+2\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2-r\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}\right\rvert}$
	$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}$	$\rho=\dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\lvert\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\rvert}$
空间曲线	$\begin{cases}x=x(s),\\y=y(s),\\z=z(s)\end{cases}$	$\dfrac{1}{\rho}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}}$ (s为轨道弧长)

说明 参考系确定了, 运动情况完全确定. 但对同一参考系下不同的坐标系, 描述运动的物理量的具体表达式不同, 即位矢、速度、加速度的表示形式与坐标系有关.

三、相对运动的运动学

物体的同一运动从不同的参考系来描述, 会有不同的结果. 但物体运动的客观物理过程又是惟一的, 于是不同的参考系之间的运动学量之间存在关系. 相对运动的运动学即讨论这种关系.

1. 相对运动、牵连运动和绝对运动

这涉及动系和静系两套参考系. 在运动学中, 这两种参考系是可以任意选取的. 动点相对于动系的运动称为相对运动, 而该动点相对于静系的运动称为绝对运动. 由于动系的运动而引起的动点相对于静系的运动称为牵连运动. 对应的有相对位移、绝对位移、相对速度、绝对速度、牵连速度、相对加速度、绝对加速度、牵连加速度等. 在相对运动中, 另有一个科里奥利 (Coriolis) 加速度, 它与动点的相对运动和动系的转动两者相联系.

需要注意的是: ①在静系选定的条件下, 动系的选取是不惟一的. 动系不同, 相对速度、相对加速度、牵连速度、牵连加速度和科里奥利加速度是不同的; ②动系选定后, 在其上选取不同的坐标系, 各相对量和牵连量的表示式不同.

一般情况下, 牵连运动部分包括平动和转动两个方面的贡献.

在处理相对运动问题时, 必须指出动系、静系及其相应的坐标系的选取的详细情况.

2. 任意矢量的时间变化率

相对运动的描述中涉及两类时间变化率: ①绝对微商 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 相对于静系的时间变化率; ②相对微商 $\dfrac{\widetilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$, 相对于动系的时间变化率. 两者之间的关系为, 对任一矢量 $\boldsymbol{G}$, 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}=\frac{\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{G}, \tag{1.28}$$

其中, $\boldsymbol{\omega}$ 是动系相对于静系的转动角速度.

特别是, 对于动系的单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}. \tag{1.29}$$

而对 $\boldsymbol{\omega}$, 有 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$, 即角速度的时间变化率在静系和动系有相同的值.

3. 动系和静系中运动学量之间的关系

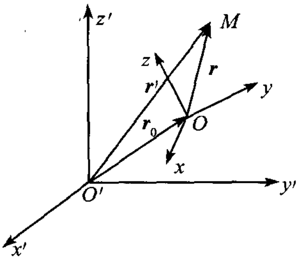

图1-7

设静系为 $O'\text{-}x'y'z'$, 动系为 $O\text{-}xyz$, 则相对于两个参考系的位矢的关系为 (图 1-7)

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}. \tag{1.30}$$

速度合成定理

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_0+\frac{\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\\&=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_e,\end{aligned} \tag{1.31}$$

其中, $\boldsymbol{v}_r=\dfrac{\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, $\boldsymbol{v}_\mathrm{e}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 分别为动点的相对速度和牵连速度. 牵连速度 $\boldsymbol{v}_0$ 是动系的平动速度, 而 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 则是动系的转动引起的速度.

加速度合成定理为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{a}_r+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\\&=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_\mathrm{e}+\boldsymbol{a}_\mathrm{c},\end{aligned} \tag{1.32}$$

其中, $\boldsymbol{a}_r=\dfrac{\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\widetilde{\mathrm{d}}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ 是质点相对于动系的相对加速度; $\boldsymbol{a}_\mathrm{c}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 是科里奥利加速度, 它是与质点相对动系有相对运动, 同时动系相对于静系有转动这两个因素相关的. 当动系相对于静系仅有平动时, 科里奥利加速度为零. 而 $\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 是牵连加速度, 其中, $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}$ 是动系的平动产生的加速度; $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 完全是由于参考系的旋转而引起的, $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$ 称为转动加速度, $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 称为向轴加速度. 在一般情况下, 轴的方向是不断变化的.

1.1.2　动力学、运动定理

在矢量力学中, 质点的动力学问题是以牛顿三定律为基础的, 这些内容在基础力学中已进行了详细的讨论. 在下面, 我们将质点问题看成质点系问题的特殊情况. 在经典力学范围内, 质点系运动定理是通过牛顿三定律并依据分析综合的方法而建立的. 牛顿第一定律表明了惯性参考系这样一种特殊参考系的存在性, 是研究动力学问题的出发点; 牛顿第二定律则描述相对于惯性参考系质点受力情况与运动状态及其变化之间的关系; 第三定律反映作用力和反作用力的相互性, 以及两者之间的关系, 是讨论约束反力、质点系内力等以及它们对系统运动状态和状态变化的影响的基础.

一、质点系的动力学

矢量力学中动力学问题的基本量是力、动量和角动量, 而动能、势能和功等标量是作为辅助量出现的. 这些量通过基本定律和定理相联系, 它们分别是质心运动定理 (动量定

理), 角动量定理及功能原理 (或动能定理). 在满足一定的条件下, 有对应的守恒定律即动量守恒定律, 角动量守恒定律和机械能守恒定律. 在矢量力学中, 守恒定律是作为运动定理的推论出现的. 但现代物理学的研究表明, 守恒定律是时空对称性的表现, 因而具有更加普遍的意义, 即在超出力学的范畴内仍然具有重要的作用, 而力的概念基本上仅限于力学学科本身.

1. 几个基本概念

1) 质心

设系统有 N 个质点, 质心是系统中各质点位矢的加权平均, 它的位矢为

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \tag{1.33}$$

对于连续分布的系统, 上式中的求和改为积分, 即

$$\boldsymbol{R}=\frac{\int_m \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m}. \tag{1.34}$$

质心概念的作用通过运动定理及质心系的特殊性等方面体现出来.

2) 内力和外力

内力和外力是相对所选的系统而言的. 内力是系统内部各部分之间的相互作用力, 而外力则是系统外部其他物体对系统内部质点的作用力. 对于同一个问题, 如所选取的研究系统不同, 则内力和外力也不同.

内力具有性质: 所有内力的矢量和等于零, 对同一参考点的所有内力的力矩的矢量和等于零, 即

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}=0, \quad \sum_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}=0, \tag{1.35}$$

其中, i, j 是对系统的所有质点求和, 而且第二个性质中的参考点是任意的.

3) 质点系的动量、角动量和动能

质点系的动量、角动量和动能分别定义为系统中各质点的动量的矢量和、角动量的矢量和以及动能的代数和, 即

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_c = m\dot{\boldsymbol{R}}, \tag{1.36}$$

$$\boldsymbol{J}=\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i, \tag{1.37}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2, \tag{1.38}$$

其中, $\boldsymbol{v}_c$ 是系统质心的运动速度, 而 $\boldsymbol{R}$ 是质心的位矢. 在相对论中, 质点系的动量定义为

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}, \tag{1.39}$$

其中, c 为光速, 而 m_i 为质点的静止质量. 质点系的动能定义为

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} - \sum_{i=1}^{N} m_i c^2, \tag{1.40}$$

其中, 第二项是系统的静能量.

要注意的是, 因为角动量的定义中涉及参考点的问题, 不同的教材对它的定义可能有区别. 例如, 如以相对于惯性参考系中的某一运动的点为参考点, 则角动量定义中的速度可以用质点相对于惯性参考系的, 也可用相对于参考点固结于其上的某参考系的速度, 最后关于角动量定理的形式也有差别, 可参见本章习题 1.30.

4) 保守力和势能

所谓保守力可以按几种方式定义: ①力做功与路径无关, 在力与时间 t 以及力所作用的质点的速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 无关时, 即 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$; ②力沿闭合路径所做功的代数和为零; ③力 $\boldsymbol{F}$ 满足关系

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0; \tag{1.41}$$

④存在一个不显含时间 t, $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的势函数 V, 使得 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} V$. 这几种定义是完全等价的, 它们都表明这种力所做的元功是一个全微分, 即 $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}V(\boldsymbol{r})$. 注意, 如果 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}, t)$, 则称该力为有势力. 含时 t 的有势力不是保守力.

2. 两种参考系及其基本物理量之间的关系

在动力学问题中会涉及两类参考系: 惯性参考系和非惯性参考系. 而质心平动参考系 (简称质心系) 是其中的一类特殊参考系, 它可以是惯性系也可以是非惯性系. 下面主要使用惯性参考系和质心系.

惯性参考系, 以坐标系 $O\text{-}xyz$ 表示, 即指 $O\text{-}xyz$ 是建立在惯性参考系上的坐标系, 下同. 质点 i 相对于 $O\text{-}xyz$ 的位矢和速度分别用 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 表示.

质心系定义为随质心相对于惯性系作平动的参考系, 其上的坐标系以 $C\text{-}x'y'z'$ 表示. 在质心系中, 质点 i 的位矢和速度分别用 $\boldsymbol{\rho}_i$ 和 $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ 表示, 而质心 C 相对于 $O\text{-}xyz$ 的位矢记为 $\boldsymbol{R}$.

两个参考系中位矢、速度之间的关系为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}_i, \quad \boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{v}_c + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i. \tag{1.42}$$

在本小节中, 除特别说明外, 不带撇的量表示相对于惯性系的, 而带撇的量表示相对于质心系的.

1) 动量

质点系相对于惯性系和质心系的动量均按式 (1.36) 定义. 但在质心系中, 动量定义中各质点的速度也相应是相对于质心系的, 即

$$\boldsymbol{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i. \tag{1.43}$$

考虑到关系式 (1.42), 有质心系中质点系的动量为

$$\boldsymbol{P}'=0. \tag{1.44}$$

这个性质在讨论如碰撞等问题时可以简化问题的求解, 可参见本章习题 1.34.

2) *角动量*

在惯性系中, 角动量定义式 (1.37) 中各质点位矢的参考点取为固定点 O, 即取矩心为 O, 速度为这样的位矢对时间的导数. 对过 O 点的固定轴线 Ol 的角动量定义为

$$J_l=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{l}^0,\quad \boldsymbol{l}^0 \text{ 是沿 } Ol \text{ 轴的单位矢量}. \tag{1.45}$$

在质心系中, 角动量 $\boldsymbol{J}$ 定义式 (1.37) 中位矢的参考点取为质心 C, 速度为这样的位矢对时间的导数, 即

$$\boldsymbol{J}'=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\rho}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i. \tag{1.46}$$

$\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{J}'$ 之间有关系, 为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_c+\boldsymbol{J}', \tag{1.47}$$

其中, $\boldsymbol{J}_c=M\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{R}}=M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}_c$ 是将质点系所有质量集中在质心并以质心速度运动这样一个等效质点相对于惯性系中的固定点 O 的角动量, 也称为质心角动量.

3) *动能*

惯性系中质点系的动能 T 由式 (1.38) 定义. 在质心系中, 系统的动能为

$$T'=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i)^2. \tag{1.48}$$

T 和 T' 之间的关系即柯尼希 (König) 定理为

$$T=T_c+T', \tag{1.49}$$

其中, $T_c=\dfrac{1}{2}mv_c^2$ 称为质心动能, 是质量为 $m=\sum\limits_{i=1}^{N}m_i$ 的等效质点以质心速度运动的动能. 柯尼希定理在分析力学中有着广泛的应用.

3. 质点系基本定理及守恒律

1) *动量定理, 质心运动定理及动量守恒定律*

动量定理、质心运动定理有微分和积分两种形式, 即

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\boldsymbol{F}_i, \quad (\text{动量定理的微分形式})\\ &\Delta\boldsymbol{P}=\int\sum_i\boldsymbol{F}_i\mathrm{d}t, \quad (\text{动量定理的积分形式})\\ &m\boldsymbol{a}_c=m\ddot{\boldsymbol{R}}=\sum_i\boldsymbol{F}_i. \quad (\text{质心运动定理})\end{aligned} \tag{1.50}$$

说明 ①动量定理和质心运动定理是等价的, 它们是同一定理的两种不同表现形式; ②积分形式主要用于描述有限时间的过程, 或碰撞等作用力作用时间较短但系统的运动状

态变化较大的问题; ③定理中的 $\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i$ 表示外力的矢量和, 它不是作用在系统上的合外力. 对质点系问题, 一般而言不存在合外力的概念.

质点动量定理在不同坐标系下的分量形式分别如下.

(1) 直角坐标系

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = m\dot{v}_x = mv_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}, \\ F_y &= m\ddot{y} = m\dot{v}_y = mv_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}, \\ F_z &= m\ddot{z} = m\dot{v}_z = mv_z\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

(2) 柱坐标系

$$\begin{aligned} &F_r = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2), \\ &F_\theta = m(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}) = \frac{m}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^2\dot{\theta}), \\ &F_z = m\ddot{z}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

(3) 球坐标系

$$\begin{aligned} &F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta), \\ &F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta), \\ &F_\varphi = m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta). \end{aligned} \tag{1.53}$$

(4) 自然坐标系

$$\begin{aligned} &F_\tau = m\ddot{s} = m\dot{v}_\tau, \\ &F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = m\frac{v_\tau^2}{\rho} = m\frac{v^2}{\rho}, \\ &F_b = 0. \end{aligned} \tag{1.54}$$

若 $\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i = 0$, 即系统所受外力的矢量和为零, 则有

$$\boldsymbol{P} = \sum_i m_i\boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_c = \text{常矢量}, \tag{1.55}$$

此即为动量守恒定律. 若 $\sum_i F_{ix} = 0$, 即系统所受外力的矢量和沿 x 方向的分量为零, 则有

$$P_x = \sum_i m_i v_{ix} = mv_{cx} = \text{常量}. \tag{1.56}$$

该结论为沿 x 方向的动量分量守恒定律. 对 y, z 方向可类推. 一般而言, 若系统所受外力的矢量和沿某固定方向的分量为零, 则在该方向上系统的动量分量为守恒量.

需要注意的是, 因为 $F_r \neq \dfrac{\mathrm{d}P_r}{\mathrm{d}t}$, 这里 $P_r = \boldsymbol{r}^0 \cdot \boldsymbol{P} = \sum_i m_i v_r$, 则当 $F_r = 0$ 时, 并没有 P_r 是守恒量的结论. 径向的方向是不断变化的.

2) 角动量定理及动量守恒定律

相对于惯性系中的固定点, 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{1.57}$$