

高等数学

主编 © 兰华龙

Advanced Mathematics



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

013/473

2007

高等数学

主 编 兰华龙

副主编 李 应 李松林

西南交通大学出版社

· 成都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

高等数学 / 兰华龙主编. —成都: 西南交通大学出版社,
2007.8

ISBN 978-7-81104-602-1

I. 高… II. 兰… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 126207 号

高 等 数 学

主 编 兰华龙

*

责任编辑 张宝华

封面设计 本格设计

西南交通大学出版社出版发行

(成都市二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 170 mm × 230 mm 印张: 22.375

字数: 427 千字 印数: 1—4 000 册

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81104-602-1

定价: 31.80 元

图书如有印装问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

高等数学已成为现代科学技术、科学管理等诸多领域理论研究的工具与基础,同时也是高等院校课程设置中一门重要的文化基础课和工具课,内容极其丰富,应用十分广泛。

本教材根据教育部最新制定的《高等数学课程的教学基本要求》,结合编者多年的教学经验与实践,在充分调研的基础上,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,构建教材内容,体现了教材的实用性、科学性、针对性。本教材主要有以下几个特点:

(1)注重理论联系实际,突出数学的应用思想。教材尽可能地从实际背景中引出概念,进而使学生体会到数学来源于生活与生产实际。其目的在于拓宽学生的数学应用基础,以培养分析问题解决问题的能力,提高理论联系实际的能力,从而更好地体会数学本质及数学价值。

(2)教材的文字表述简练,内容深入浅出。在注重数学基础知识的同时,淡化繁杂的定理证明,辅之以说明或几何解释,既便于教师教,又便于学生学。

(3)教材中适当渗入数学建模的基本思想,将高等数学基本知识、数学建模和数学实验有机融合,以提高学生的综合能力和素质。

(4)内容安排重点突出,层次分明,既能夯实学生的数学基础,又能考虑到学生的个性化发展。各章节习题、复习题都分成A(基础)、B(提高)模块,以供高等院校分层次教学的需要。

本教材共七章及附录,主要内容包括:极限与连续、一元微分学及其应用、一元积分学及其应用、微分方程、多元微积分及其应用、无穷级数、线性代数、数学实验等。前四章为基础模块,后三章加附录一为应用模块。各专业可根据专业培养目标的要求,选学相应的教学内容。其中,第一、三章由兰华龙编写;第二章由张德刚编写;第四章由李松林编写;第五、六章由李应编写;第七章由蒋鹏忠编写;附录(数学实验和数学建模简介)由阮杰昌编写,全书由兰华龙统稿完成。李琰、霍婷婷、王晓平、邵文楷担任了校对工作。

在本书的编辑出版过程中,西南交通大学出版社给予了大力帮助与支持,在此表示感谢。

鉴于编者水平有限,书中可能存在一些缺点和错误,敬请读者与同行批评指正。

编 者

2007 年 6 月

目 录

第一章 极限与连续	(1)
第一节 初等函数	(1)
习题 1-1	(10)
第二节 函数的极限	(11)
习题 1-2	(16)
第三节 函数极限的运算	(17)
习题 1-3	(23)
第四节 函数的连续性	(24)
习题 1-4	(29)
本章知识小结	(29)
复习题一	(33)
第二章 一元函数微分学及其应用	(36)
第一节 导数的概念	(36)
习题 2-1	(42)
第二节 导数的四则运算法则 高阶导数	(43)
习题 2-2	(46)
第三节 复合函数的导数 反函数的导数	(47)
习题 2-3	(50)
第四节 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	(51)
习题 2-4	(53)
第五节 微分及其在近似计算中的应用	(54)
习题 2-5	(57)
第六节 拉格朗日中值定理 洛必达法则	(58)
习题 2-6	(63)
第七节 函数的极值与最值	(63)
习题 2-7	(69)

第八节 导数在实际中的应用	(70)
习题 2-8	(79)
本章知识小结	(80)
复习题二	(83)
 第三章 一元函数积分学及其应用	(88)
第一节 定积分的概念	(88)
习题 3-1	(95)
第二节 原函数与不定积分	(96)
习题 3-2	(102)
第三节 微积分基本定理	(103)
习题 3-3	(106)
第四节 换元积分法	(107)
习题 3-4	(113)
第五节 分部积分法	(114)
习题 3-5	(117)
第六节 定积分的应用	(117)
习题 3-6	(121)
第七节 反常积分	(122)
习题 3-7	(126)
本章知识小结	(126)
复习题三	(130)
 第四章 微分方程	(134)
第一节 微分方程的基本概念	(134)
习题 4-1	(137)
第二节 一阶线性微分方程	(138)
习题 4-2	(146)
第三节 几种可降阶的二阶微分方程	(147)
习题 4-3	(150)
第四节 二阶常系数线性微分方程	(151)
习题 4-4	(155)
本章知识小结	(156)
复习题四	(159)

第五章 多元函数微积分及其应用	(162)
第一节 多元函数的基本概念	(162)
习题 5-1	(165)
第二节 偏导数和全微分	(166)
习题 5-2	(170)
第三节 多元复合函数的求导法则	(171)
习题 5-3	(174)
第四节 多元函数的极值与最值	(175)
习题 5-4	(179)
第五节 二重积分的概念和性质	(179)
习题 5-5	(184)
第六节 二重积分的计算方法	(184)
习题 5-6	(190)
第七节 二重积分的应用	(191)
习题 5-7	(193)
本章知识小结	(193)
复习题五	(196)
第六章 无穷级数	(199)
第一节 常数项级数的概念及性质	(199)
习题 6-1	(202)
第二节 常数项级数的审敛法	(203)
习题 6-2	(207)
第三节 幂级数	(208)
习题 6-3	(216)
第四节 傅里叶级数	(217)
习题 6-4	(223)
本章知识小结	(224)
复习题六	(226)
第七章 线性代数初步	(229)
第一节 矩阵的概念和运算	(229)
习题 7-1	(237)

第二节 行列式	(239)
习题 7-2	(244)
第三节 矩阵的初等变换与矩阵的秩	(246)
习题 7-3	(249)
第四节 逆矩阵	(249)
习题 7-4	(255)
第五节 解线性方程组	(255)
习题 7-5	(260)
本章知识小结	(261)
复习题七	(264)
 附录一 数学实验	(268)
实验一 图识函数极限	(268)
练习一	(276)
实验二 导数及偏导数计算	(276)
练习二	(283)
实验三 自定义函数与导数应用	(283)
练习三	(288)
实验四 积分计算	(288)
练习四	(293)
实验五 常微分方程与级数	(294)
练习五	(298)
实验六 矩阵运算与数组运算	(299)
练习六	(305)
实验七 矩阵与线性方程组	(306)
练习七	(310)
附录二 数学建模简介	(312)
附录三 常用初等数学公式	(318)
附录四 常用积分表	(322)
习题答案与提示	(327)
参考文献	(349)

第一章 极限与连续

高等数学主要研究变量及其相互之间的关系。函数是高等数学研究的主要对象,极限是高等数学中研究问题的基本方法,而函数的连续则是研究的条件。本章将在进一步熟悉函数概念与性质的基础上,介绍函数的极限与连续性等基本概念、性质及运算法则。

第一节 初等函数

基本要求:

- (1) 熟悉函数的基本概念和基本性质。
- (2) 理解复合函数的概念,熟练掌握复合函数的结构及分解。
- (3) 能够建立一些简单实际问题的数学模型。

引例1 某汽车租赁公司出租某种汽车一天的收费标准为:基本租金 200 元加上每千米收费 15 元。租用一辆该种汽车一天,行车 x 千米时的租车费为

$$y = (200 + 15x) \text{ 元}$$

上式中, x 的取值范围是数集 $D = \{x | x > 0\}$, 对于 D 中的每一个 x , 按所示规则都有唯一确定的 y 与之对应。

一、函数的概念

定义 1.1 设 x, y 是某变化过程中的两个变量, D 是给定的一个数集, 若对于集合 D 中的每一个 x 值, 按某一对应法则 f , 变量 y 都有唯一确定的值和它对应, 那么称变量 y 是变量 x 的函数。记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

式中, 变量 x 称为自变量, x 的取值范围 D 称函数的定义域; 与 x 对应的 y 的取值范围称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

说明:

(1) 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素.

(2) 函数是反映变量之间相互依存的一种数学模型.

例 1 求函数 $y = \frac{1}{\ln(1-2x)}$ 的定义域

解 要使函数 $y = \frac{1}{\ln(1-2x)}$ 有意义, 必须满足

$$\ln(1-2x) \neq 0 \quad \text{且} \quad 1-2x > 0$$

$$\text{即} \quad x \neq 0 \quad \text{且} \quad x < \frac{1}{2}$$

故函数 $y = \frac{1}{\ln(1-2x)}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

二、函数的表示

常用的表示函数的方法有: 列表法、图像法和解析法三种.

解析法: 用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法. 高等数学中讨论的函数, 大多由解析法表示.

例 2(图像法) 某气象站用自动温度记录仪记录下一昼夜气温变化(见图 1-1). 由图 1-1 可知, 对于一昼夜内每一时刻 t , 都有唯一确定的温度 T 与之对应.

下面介绍几种常用函数.

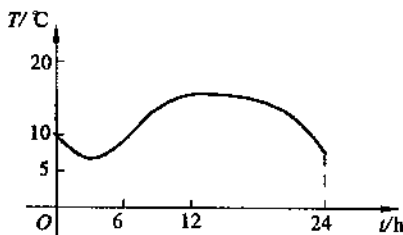


图 1-1

1. 隐函数

在方程 $F(x, y) = 0$ 中, 当 x 在某集合 D 内任意取定一个值时, 相应地, 总有满足该方程 $F(x, y) = 0$ 的唯一的 y 值存在, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 D 内确定了一个函数. 这个函数称为隐函数.

例如, 方程 $e^x + xy - 1 = 0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系, 它是一个隐函数.

注意: 通常把形如 $y = f(x)$ 的函数称为显函数. 有些隐函数可以通过一定的运算, 把它转化为显函数. 例如, $e^x + xy - 1 = 0$, 在 $x \neq 0$ 时, 可以化成显函

数 $y = \frac{1-e^x}{x}$. 但隐函数 $x^2 - xy + e^y = 1$, 却不可能化成显函数.

2. 分段函数

在自变量的不同取值范围内, 函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 分段函数是高等数学中常见的一类函数, 它是用几个关系式表示的一个函数, 而不是表示几个函数. 对于定义域内的任意 x , 分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段关系式中自变量取值集合的并集.

例3 单位阶跃函数是电学中一个常用函数, 它可表为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其图形如图 1-2 所示.

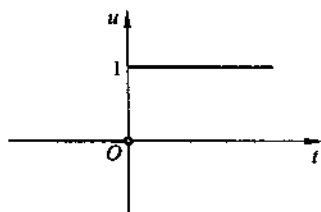


图 1-2

3. 参数方程确定的函数

由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (t \in D)$ 来表示变量 x

与 y 之间的依赖关系的函数, 称为用参数方程确定的函数.

例如, 由参数方程 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$ 可以确定函数

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad (x \in [-1, 1])$$

三、函数的简单几何性质

1. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 且对于任意的 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数; 若 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 且对于任意的 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

注: 奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如, $f(x) = x$ 为奇函数, $f(x) = |x|$ 为偶函数.

2. 函数的单调性

若函数 $y = f(x)$ 在区间 D 内有定义, 对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{或} \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内是单调递增(递减)函数, D 叫做 $f(x)$ 的单调递增(递减)区间.

3. 函数的周期性

设 $y = f(x)$ 为 D 上的函数, 若存在 $T > 0$, 对任意 $x \in D$,

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立, 则称此函数为 D 上的周期函数, T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

例如, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $f(x) = \cos x$ 是周期函数, 其最小正周期为 2π .

4. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在某区间 D 内有定义, 若存在 $M > 0$, 对任意 $x \in D$, 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的. 若不存在这样的正数 M , 则称函数 $f(x)$ 在 D 内无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数. 直观上看, 有界函数的图形介于直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间.

例如, $f(x) = \sin x$ 在定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ 内有界.

例 4 判断函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解 由 $\frac{1-x}{1+x} > 0$, 得 $-1 < x < 1$, 所以函数定义域关于原点对称. 又

$$f(-x) = \lg \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

四、基本初等函数

1. 常数函数

$$y = c \quad (c \text{ 为任意实数})$$

定义域: $(-\infty, +\infty)$.

图形: 过点 $(0, c)$, 且与 x 轴平行或(重合)的直线(见图 1-3).

性质: 有界, 偶函数, 没有最小正周期的周期函数.

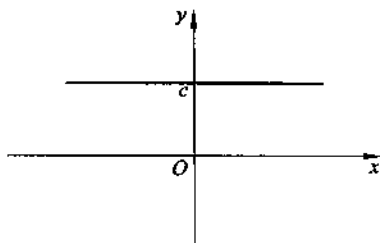


图 1-3

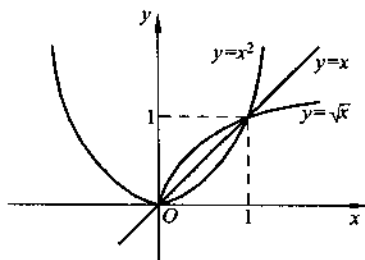


图 1-4

2. 幂函数

$$y = x^\mu \quad (\mu \text{ 任意实数})$$

定义域: 随 μ 取值而异.

图形如图 1-4 所示.

性质: 当 μ 是奇数时, $y = x^\mu$ 是奇函数; 当 μ 是偶数时, $y = x^\mu$ 是偶函数.

3. 指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

定义域: $(-\infty, +\infty)$.

图形: 过点 $(0, 1)$, 恒在 x 轴的上方(见图 1-5).

性质: 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 单调递减; 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 单调递增.

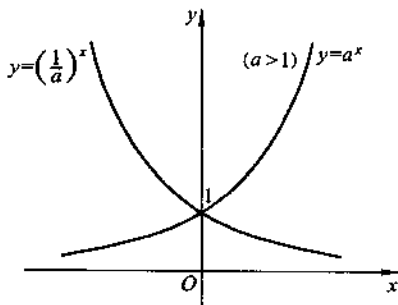


图 1-5

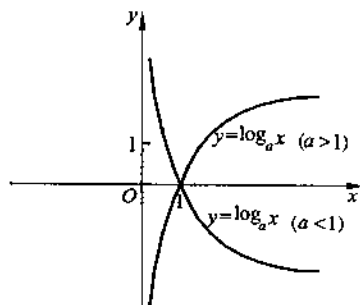


图 1-6

4. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

定义域: $(0, +\infty)$.

图形: 过点 $(1, 0)$, 恒在 y 轴的右方 (见图 1-6).

性质: 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调递减; 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调递增.

注意: 指数函数与对数函数互为反函数, 因此具有相同的单调性.

5. 三角函数

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x$$

$$y = \sec x, \quad y = \csc x$$

(1) 正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $[-1, +1]$.

图形如图 1-7 所示.

性质: 有界, 奇函数, 最小正周期为 2π .

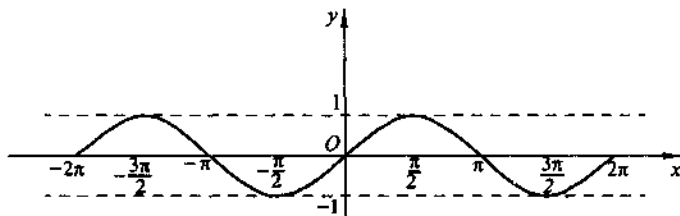


图 1-7

(2) 余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $[-1, +1]$.

图形如图 1-8 所示.

性质: 有界, 偶函数, 最小正周期为 2π .

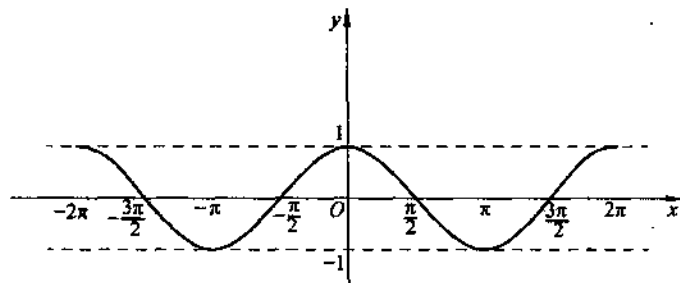


图 1-8

(3) 正切函数 $y = \tan x$ 的定义域: $\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

图形如图 1-9 所示.

性质: 奇函数, 单调递增, 最小正周期为 π .

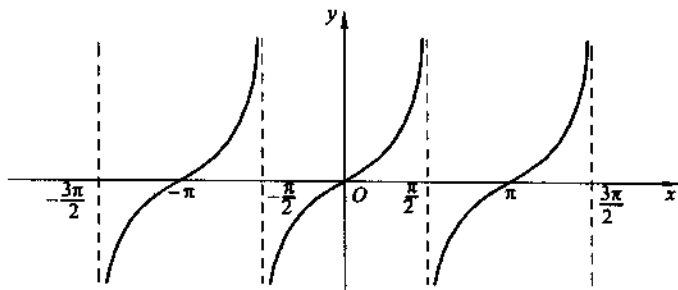


图 1-9

6. 反三角函数

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arccot} x$$

以上六类函数统称为基本初等函数.

五、初等函数

1. 复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 若 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内, 则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 其中 u 称为中间变量, $f(u)$ 称为外层函数, $\varphi(x)$ 称为内层函数.

例 5 已知 $y = e^u$, $u = \sin x$, 试把 y 表示为 x 的复合函数.

解 $y = e^u = e^{\sin x}$.

例 6 指出函数的复合过程, 并求其定义域:

$$(1) y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^2; \quad (2) y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

解 (1) $y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^2$ 是由函数 $y = u^2$, $u = \arcsin v$, $v = \frac{1}{x}$ 复合而成的. 要使 $y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^2$ 有意义, 只需 $\arcsin \frac{1}{x}$ 有意义, 即 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 即 $|x| \geq 1$.

1. 因此, $y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^2$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 是由函数 $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 - 3x + 2$ 复合而成的. 要使 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 有意义, 只需 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, 解此不等式, 得 $y =$

$\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的定义域为 $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

注意:

(1) 并不是任何两个函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 都可以构成一个复合函数, 关键在于外层函数 $y = f(u)$ 的定义域与内层函数 $u = \varphi(x)$ 的值域的交集是否为空集, 若其交集不空, 则这两个函数就可以复合, 否则, 就不能复合. 例如, $y = \sqrt{u}$ 及 $u = -2 - x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u = -2 - x^2$ 的值域为 $(-\infty, -2]$, 不包含在 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 $[0, +\infty)$ 内, 因而不能复合.

(2) 分析一个复合函数的复合过程, 每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式(即简单函数).

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成, 更多的是由基本初等函数经过四则运算构成的简单函数复合而成, 因此, 当分解到常数与基本初等函数的四则运算式(简单函数)时, 就不再分解了.

2. 初等函数

定义 1.3 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的, 并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

例如, $y = \sin^2 x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \lg(1 + \sqrt{1 + x^2})$ 都是初等函数. 而 $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 2x - 1, & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数.

六、常用经济函数

1. 需求函数

在经济学中, 某一商品的需求量是指在一定的价格水平下, 消费者愿意而且有支付能力购买的商品量. 影响商品需求的因素很多, 商品的价格是影响需求的一个主要因素. 另外, 还有其他因素, 如消费者收入的增减, 季节的变换以及消费者的偏好等都会影响需求. 如果把价格以外的其他因素都看做常量, 则需求量 Q 可视为该商品的价格 p 的函数, 这个函数称为需求函数, 记作

$$Q = Q(p)$$

2. 供给函数

供给是与需求相对的概念. 需求是就购买者而言, 而供给是就生产者而言. 某一商品的供给量是指在一定的价格水平下, 生产者愿意生产并可供出售的商