大学数学立体化教材

大学文科数学

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

大学数学立体化教材

大学文科数学

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学/吴赣昌主编.
北京：中国人民大学出版社，2007
大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-07987-5

Ⅰ. 大…
Ⅱ. 吴…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 043898 号

大学数学立体化教材
大学文科数学
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 4 月第 1 版
印　　张	15.25 插页 1	**印　　次**	2007 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	277 000	**定　　价**	28.00 元（含光盘）

内容简介

本书根据高等学校大学文科数学的教学大纲编写而成，内容设计简明，但结构体系上又不失完整，其中涵盖了微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分内容，具体包括函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、微分方程简介、行列式、矩阵与线性方程组、随机事件与概率、随机变量、数理统计基础知识、参数估计与假设检验等基本内容。同时，为了便于理解上述理论，培养文科生的高等数学应用能力，书中精选了一些具有文科数学教学特色的例题和适合文科生思维特点的课后习题。此外，本书还结合现代教学的新要求和现代科技的新发展，配备了一套内容丰富、功能强大的教学课件——《大学文科数学多媒体学习系统》（光盘），其中包括多媒体教案、习题详解、综合训练等功能模块，这些功能模块的设计方便学生们自学和自我提升：它有利于学生们了解一些数学历史和数学文化，也有助于学生们的课程学习和复习考试。在学习过程中，书与盘配合使用，形成了教与学的有机结合。

本书可作为普通高等院校纯文科类专业的数学公共课教材。

目　　录

绪　言

> 考虑到数学有无穷多的主题内容，数学，甚至是现代数学也是处于婴儿时期的一门科学．如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思维中压倒一切的新特点就是数学悟性要占统治地位．
>
> —— A.N. 怀特海

一、为什么学数学

以往文科大学生一般是不学数学的，为什么现在要如此重视地学习它呢？具体来说，大致有以下两方面的理由：

首先是当代数学及其应用的发展．数学在进入20世纪以后，向更加抽象的方向发展，各个学科更加系统和结构化，数学的各个分支学科之间交叉渗透，彼此的界限已经逐渐模糊．时至今日，数学学科的所有分支都或多或少地联系在一起，形成了一个复杂的、相互关联的网络．纯粹数学和应用数学一度存在的分歧在更高的层面上趋于缓和，并走向协调发展．总而言之，数学科学日益走向综合，现在已经形成一个包含上百个分支学科，相互交融渗透的庞大的科学体系，充分显示了数学科学的统一性．

数学与其他学科之间的交叉、渗透与相互作用，既使数学领域在深度和广度上进一步扩大，又导致众多新兴的交叉学科与边缘学科的蓬勃发展，如金融数学、生物数学、控制数学、定量社会学、数理语言学、计量史学、军事运筹学等等，这种交融大大促进了各相关学科的发展，使得数学的应用无所不在．20世纪的下半叶，数学与计算机技术的结合，产生了数学技术．数学技术的迅速兴起，使得数学对社会进步所起的作用从幕后走向了前台．计算机的迅速发展和普及，不仅为数学提供了强大的技术手段，也极大地改变了数学的研究方法和思维模式．所谓数学技术，就是数学的思想方法与当代计算机技术相结合而成的一种高级的、可实现的技术．数学的思想方法是数学技术的灵魂，拿掉它就只剩下一个空壳．数学技术对于人类社会的现代化起着极大的推动作用．正是从这个意义上，联合国教科文组织把21世纪的头一年定为“世界数学年”，并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”．

另外一个重要的理由是数学能够很好地培养人的理性思维．数学除了是科学的基础和工具外，还是一种十分重要的思维方式与文化精神．美国国家研究委员会在

一份题为“人人关心数学教育的未来”的研究报告中指出:“除了定理和理论外,数学提供了有特色的思考方式,包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断以及符号运算等. 它们是普遍适用的、强有力的思考方式. 应用这些数学思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代里日益重要的一种智力. 它使人们能批判地阅读,能识别谬误,能探索偏见,能估计风险,能提出变通办法. 数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.”数学在形成人类的理性思维方面起着核心的作用,而我国的传统文化教育在这方面恰恰是不足的. 一位西方数学史家曾说过:“我们讲授数学不只是要教涉及量的推理,不只是把它作为科学的语言来讲授——虽然这些都很重要——而且要让人们知道,如果不从数学在西方思想史上所起的重要作用方面理解它,就不可能完全理解人文科学、自然科学、人的所有创造和人类世界.”

二、数学是什么

《数学是什么》是20世纪著名数学家库朗(R. Courant)的名著. 每一个受过教育的人都不会认为自己不知道数学是什么,但是每个读过这本书的人都会感到受益匪浅. 人们了解数学是通过像算术、代数、几何与微积分等教材和著作,知道数学的一些内容. 但这只是数学极小的一部分. 库朗认为,数学教育应该使人了解数学在人类认识自己和认识自然中所起的作用,而不只是一些数学理论和公式.

凡是学过数学的人,都能领略到它的特点——理论抽象、逻辑严密,从而显示出一种其他学科无法比拟的精确和可靠. 但是人们更需要了解的是数学对整个人类文明的重要影响. 回顾人类的文明史,2 500年来,数学一直在追求真理,而且成就辉煌. 数学使人类充满自信,因为由此能够俯视世界、探索宇宙. 人类改变世界和自身所依赖的是科学,而科学之所以能实现人的意志是因为**科学的数学化**. 马克思曾说过:“一门科学,只有当它成功地运用数学时,才能达到真正完善的地步.”一百多年前,成功地由数学完善其理论的不过是力学、天文和某些物理学分支. 化学很少用到数学,生物学与数学毫无关系. 而现在就完全不同了,几乎所有的科学,不仅是自然科学,而且在社会科学和人文科学的各个领域中,都正在大量采用数学理论. 这正是20世纪人类社会和自然面貌迅速改变的原因. 我们还可以回顾一下,在人类进入近代文明之前,对于现实世界的认识和描述大多是定性的,诸如“日月星辰绕地球旋转”、“重的物体下落比轻的快”,等等. 而现在的科学则要求定量地知道,一个物体以什么样的速度沿什么样的轨道运行,怎样可以准确无误地把人送到月球上指定的地点,等等. 一个科学理论,必须经得起反复的观察验证,而且可以精确地预言即将出现的事物和现象,只有这样才能按照人的意志改造客观世界. 不论是验证还是预言,都需要有定量的标准,这就要求科学数学化. 现在,数学化了的科学已经渗透到社会的所有领域的各个层面,人类可以在大范围内预报中、长期的气象,可以预料一个地区、一个国家甚至全世界的经济前景. 这是因为现在对于这些看似纷

乱的现象已经可以建立数学模型，再经过演算和推理得出人们想知道的结论．金融、保险、教育、人口、资源、遗传，甚至语言、历史、文学都不同程度地采用数学方法，许多领域的科学论文都以它所使用的数学工具作为重要的评估标准之一．电视、通信、摄影技术正在数字化，其目的在于通过计算机技术更准确细微地反映图像、声音．甚至歌星与球队的排名都有许多计算方法．因此有人说："一个国家的科学进步可以用它消耗的数学来度量"．

20世纪初期，科学与数学中出现的深刻变化，促使人们从哲学高度进行反思，从整个文明发展进程的角度来加以总结，并认识到：数学是一种语言，它精确地描述着自然界和人类自身；数学是一种工具，它普遍地适用于所有科学领域；数学是一种精神，它理性地促使人类的思维日臻完善；数学是一种文化，它决定性地影响着人类的物质和精神文明的各个方面．

三、数学科学的形成与发展

当人类试图按照自己的意志来支配和改造自然界时，就需要用数学的方法来构想、描述和落实，因此，在人类文明之初就诞生了数学．每一个伟大的古代文明，如古代的巴比伦、埃及、中国、希腊和印度都有重要的数学发明，不过从现代的意义说，数学形成于古希腊．著名的欧几里得几何学是第一个成熟的数学分支．相比于欧几里得几何学，其他文明中的数学并未形成一个独立的体系，也没有形成一套方法，而是一系列相互无关的，用于解决日常问题的规则，诸如历法推算和用于农业与商业的数学法则等．这些法则如同人类的其他知识一样是源于经验归纳而成的，因此往往只是近似正确的．有许多像"径一周三"以三表示圆周率这样的命题．欧几里得几何学则完全不同，它是一个逻辑严密的庞大体系，仅从10条公理出发，推导出487个命题，采用的是与归纳思维法相反的演绎推理方法．归纳法是由特殊现象归纳出一般规律的思维方法，而演绎法则正好相反，它从已有的一般结论推导出特殊命题．例如，假定有"一个运用数学的学科是成熟的学科"这样一个公认正确的一般结论，即所谓大前提；"物理学运用了数学"这是一个特殊的命题，即所谓小前提；由以上两点可以得出结论："物理学是成熟的学科"．这就是常说的三段论逻辑．演绎法就是运用这样的逻辑，其主要特征是在前题正确的情况下，结论一定正确．意识到逻辑推理的作用是古希腊文明对人类的一项巨大贡献．

在希腊被罗马帝国毁灭之后，古希腊的数学研究中断了将近2 000年．罗马的历史与希腊平行，但是在它持续的1 100年间没有出过一位数学家．他们夸耀自己讲究实际，兴建过许多庞大的工程．但是过于务实的文化不能产生深刻的数学．以后统治欧洲的基督教提倡心灵作好准备，以便死后去天国，对于现实的物理世界缺乏兴趣．这一时期，数学在中国、印度和阿拉伯地区继续发展，也有许多重要的创造．但是这些古代文明，不像希腊那样追求绝对可靠的真理，因此没有形成大规模的理论结构体系．例如，著名的祖冲之，他的圆周密率领先欧洲1 000多年，但是他没有给出推导密率的理论依据．

被罗马帝国和基督教逐出的希腊文明，在1 000多年后重返欧洲．当时，教会仍然主宰一切，真理只存在于圣经之中．饱受压抑而善于思索的学者们看清了希腊文明远比教会高明，他们立即接受了这份遗产，特别是世界是按数学设计的信念．哥白尼经过多年的观察和计算，创立了日心说，认定是太阳而不是地球才是宇宙的中心．日心说不仅改变了那个时代人类对宇宙的认识，而且动摇了宗教的基本教义：上帝把最珍爱的创造物——人类安置在宇宙的中心——地球．日心说是近代科学的开端，而科学正是现代社会的标志．科学使处于低水平的西欧文明迅速崛起，短短两三百年后领先于全世界．

科学发展的下一个决定性的步伐是由伽利略 (G. Galileo) 迈出、由牛顿完成的，这就是**科学的数学化**．伽利略认为，基本原理必须源于经验和实验，而不是智慧的大脑．这是革命性的关键的一步，**开辟了近代实验科学的新纪元**．人脑可以提供假设，但假设和猜想必须通过检验．哥白尼的日心说是如此，牛顿的万有引力是如此，爱因斯坦的相对论也是如此．为了使科学理论可以得到反复验证，伽利略认为科学必须数学化，他要求人们不要用定性的模糊的命题来解释现象，而是追求定量的数学描述，因为数量是可以反复验证、可以精确测定的．**追求数学描述而不顾物理原因是现代科学的特征**．

50年后，牛顿用这种新的方法论取得了辉煌的成功，以至于几乎所有科学家都立即接受了这种方法，并取得了丰硕的成就．这种方法称为西欧工业革命的科学基础．牛顿决心找出宇宙的一般法则，他提出著名的力学三定律和万有引力假设．然后用他发明的微积分方法，经过复杂的计算和演绎，既导出了地球上物体的运动规律，也导出了天空中物体的运动规律，统一了宇宙中的各种运动，而这些都是由数学推导完成的，从而引起了巨大的轰动．17世纪的伟大学者们发现了一个量化了的世界，这就是繁荣至今的科学数学化的开始．

牛顿的广泛的研究方向，以及他和莱布尼茨 (G. Leibniz) 共同创造的微积分，成为从那以后的100多年间科学家研究的课题．由于追求量化的结论，当时的科学家都是数学家，而伟大的数学家也没有例外地都是科学家．科学家寻求一个量化的世界的努力一直延续至今，他们不再把解释自然当作主要目标，而是为了作出预测，以便实现各种理想和愿望．在这个过程中，以几何为基础的数学，重心转移到了代数、微积分及其各种数量关系的后续分支上．

代数成为一门学科可以认为开始于韦达 (F. Vieta)．在此之前，代数是用文字表示的一些应用问题，只不过是一些实用的方法和计算的“艺术”，没有自己的理论．韦达的功绩是用一整套符号表示代数中的已知量、未知量和运算．这使得代数问题可以抽象归结为符号算式，这样就脱离了它的具体背景，根据一整套规定的法则作恒等变形，直至求出答案．后来，笛卡尔 (R. Descartes) 用坐标方法，把点表示为坐标，把曲线表示为方程，实现了几何对象的代数化．传统的几何问题都可以量化为代数方程求解．

代数方法是机械的，思路明确简单，不像几何问题那样需要机智巧妙地处理．那个时期，笛卡尔实际上已经洞察到了代数将使数学机械化，使得数学创造变成一种几乎是自动化的工作．等到牛顿，尤其是莱布尼茨把微积分也像代数一样形式化，并解决了大量科学问题之后，符号化的定量数学终于代替几何学成了数学的基础．20 世纪中叶计算机出现以后，数学机械化的思想得以广泛应用于解决各个领域的实际问题，而借助计算机工具，数学也越来越深入到社会生活的各个领域．

四、结语

古往今来对数学作出开创性工作的大数学家，其创造动机都不是追求物质，而是追求一种理想，或是为了揭开自然的奥秘，或是出于某种哲学信念．数学是一种理想，为理想而奋斗才有力量．数学是人类智慧的杰出结晶，是人脑最富创造性的产物．与文学、艺术、音乐等创造有共同之处的是，指引数学创造的是数学家的一种审美直觉．数学是介于自然科学与人文科学之间的一种特殊学科，是影响人类文化全局的一种文化现象．每一个时代的总的特征与这个时代的数学活动密切相关．著名的数学史家克莱因 (M.Klein) 曾以抒情的笔调写道："音乐能激起或平静人的心灵，绘画能愉悦人的视觉，诗歌能激发人的感情，哲学能使思想得到满足，工程技术能改善人的物质生活，而数学则能做到所有这一切．"

第一部分　微积分

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

§1.1　函　　数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着．17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的 200 多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置．

本节将介绍函数的概念、函数的特性、函数关系的构建与初等函数．

一、实数与区间

公元前三千年以前，人类的祖先最先认识的数是自然数 1, 2, 3, ⋯. 从那以后，伴随着人类文明的发展，数的范围不断扩展，这种扩展一方面与社会实践的需要有关，另一方面与数的运算需要有关．这里我们仅就数的运算需要做些解释，例如，在自然数的范围内，对于加法和乘法运算是封闭的，即两个自然数的和与积仍是自然数．然而，两个自然数的差就不一定是自然数了．为使自然数对于减法运算封闭，就引进了负数和零，这样，人类对数的认识就从自然数扩展到了整数．在整数范围内，加法运算、乘法运算与减法运算都是封闭的，但两个整数的商又不一定是整数了．探索使整数对于除法运算也封闭的数的集合，导致了整数集向有理数集的扩展．

任意一个有理数均可表示成 $\dfrac{p}{q}$ (其中 p, q 为整数，且 $q\neq0$)，与整数相比较，有理数具有整数所没有的良好性质，例如，任意两个有理数之间都包含着无穷多个有理数，此即所谓有理数集的**稠密性**；又如，任一有理数均可在数轴上找到唯一的对

应点(称其为**有理点**)，而在数轴上有理点是从左到右按大小次序排列的，此即所谓有理数集的**有序性**.

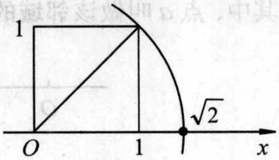


图 1-1-1

虽然有理点在数轴上是稠密的，但它并没有充满整个数轴. 例如，对边长为1的正方形，假设其对角线长为 x(见图1-1-1)，则由勾股定理，有 $x^2=2$，解此方程，得 $x=\sqrt{2}$，虽然这个点确定地落在数轴上，但在数轴上却找不到一个有理点与它相对应，这说明在数轴上除了有理点外还有许多空隙，同时也说明了有理数尽管很稠密，但却并不具有连续性. 我们把这些空隙处的点称为**无理点**，把无理点对应的数称为**无理数**. 无理数是无限不循环的小数，如 $\sqrt{2}$, π，等等.

有理数与无理数的全体称为**实数**，这样就把有理数集扩展到了实数集. 实数集不仅对于四则运算是封闭的，而且对于开方运算也是封闭的. 可以证明，实数点能铺满整个数轴，而不会留下任何空隙，此即所谓实数的**连续性**. 数学家完全弄清实数及其相关理论，已是19世纪的事情了.

由于任给一个实数，在数轴上就有唯一的点与它相对应；反之，数轴上任意的一个点也对应着唯一的一个实数，可见实数集等价于整个数轴上的点集，因此，在本书今后的讨论中，对实数与数轴上的点就不加区分. 此外，为后面的叙述方便，我们给出几个数集的常用记号：自然数集记为 $\mathbf{N}$，整数集记为 $\mathbf{Z}$，有理数集记为 $\mathbf{Q}$，实数集记为 $\mathbf{R}$.

区间是高等数学中常用的实数集，包括四种**有限区间**和五种**无限区间**.

有限区间

设 a, b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a, b]=\{x\,|\,a\le x\le b\},\ [a, b)=\{x\,|\,a\le x<b\},\ (a, b]=\{x\,|\,a<x\le b\}.$$

无限区间

引入记号 $+\infty$ (读作"正无穷大") 及 $-\infty$ (读作"负无穷大")，则可类似地表示无限区间. 例如

$$[a, +\infty)=\{x\,|\,a\le x\},\ (-\infty, b)=\{x\,|\,x<b\}.$$

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限区间 $(-\infty, +\infty)$.

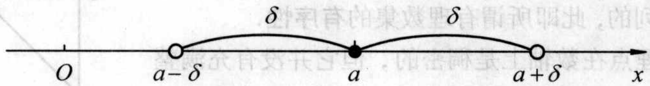
注：在本教程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时，常将其简称为"区间"，并常用 I 表示之.

二、邻域

定义1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记为

$$U(a, \delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中，点 a 叫做该**邻域的中心**，δ 叫做该**邻域的半径**（见图1–1–2）.



$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$$

图 1–1–2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\,||x-a|<\delta\}.$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心的** δ **邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$.

三、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量（变量），这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是描述这种联系的一个法则.

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s.

假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度.

定义 2　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**.

对 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0（记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 W 或 $f(D)$，即

$$W=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}.$$

函数定义明确地给出了函数模型的结构，它由定义域、对应法则和值域三个要素所构成. 定义域与对应法则是主导要素，值域则是派生要素，这一模型如同一部生产机器，从定义域中任取一实数 x，输入 $f(\ )$ 中，便产生出值域中的一个实数 y.

函数的图形

对函数 $y=f(x),\ x\in D$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点 (x,y)，当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**（见图1–1–3）.

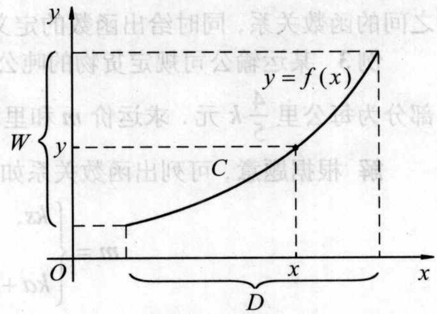


图 1–1–3

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**．本书今后只讨论单值函数．

函数的常用表示法

(1) 表格法 自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) 图像法 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) 公式法（解析法） 自变量和因变量之间的关系用数学表达式（又称为解析表达式）来表示的方法．根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种：

(i) 显函数 函数 y 由 x 的解析表达式直接表示．例如，$y=x^2+1$.

(ii) 隐函数 函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定．例如，$\ln y=\sin(x+y)$.

(iii) 分段函数 函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式．以下是几个分段函数的例子.

例 1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，图形如图1–1–4 所示.

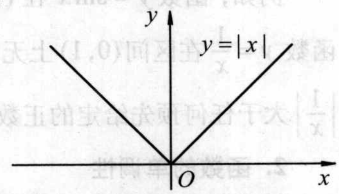


图 1–1–4

例 2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图1–1–5 所示.

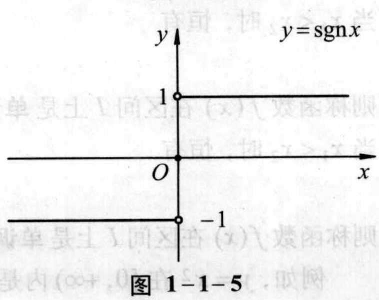


图 1–1–5

四、函数关系的建立

为解决实际应用问题，首先要将该问题量化，从而建立起该问题的**数学模型**，即建立**函数关系**.

要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，首先应分析哪些是常量，哪些是变量，然后确定选取哪个为自变量，哪个为因变量，最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域.

例 3 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意，可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\le a \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a), & a<s \end{cases},$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数来表示的，定义域为 $(0, +\infty)$.

五、函数特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\le M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**；否则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\le 1$. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，因为可以取无限靠近于零的数，使该函数的绝对值 $\left|\frac{1}{x}\right|$ 大于任何预先给定的正数 M. 但易见该函数在 $[1,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在 $(-\infty,$