新大纲·新题型·新分值

2003

全国硕士学位研究生招生考试

数学最后冲刺

——标准化命题预测试卷及解析

经济类

考研数学命题研究组 审编
刘 斌 编著

中国经济出版社

新大纲·新题型·新分值

全国硕士学位研究生招生考试

数学最后冲刺

——标准化命题预测试卷及解析

经济类

考研数学命题研究组 审编
[illegible] 编著

CEPH 中国经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士学位研究生招生考试数学最后冲刺——标准化命题预测试卷及解析.经济类/刘斌编著.-北京:中国经济出版社,2002.7
ISBN 7-5017-5417-9

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.01-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 049627 号

责任编辑:张淑玲
总 策 划:谭隆全
封面设计:东 方

全国硕士学位研究生招生考试数学最后冲刺
——标准化命题预测试卷及解析(经济类)
刘 斌 编著

中国经济出版社出版发行
(北京市百万庄北街 3 号)
邮编:100037
各地新华书店经销
北京建工印刷厂印刷
开本:787×1092 毫米 1/16 33.5 印张 836 千字
2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷
印数:1～3000 册
ISBN 7-5017-5417-9/F·4348
共 2 册 定价:46.00 元(本册 23.00 元)

前　言

本书是由全国著名考研数学辅导专家严格按照中华人民共和国教育部最新制订的《2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》精心编写的。全面体现了新大纲、新题型和新分值。

编写本书的目的是为了帮助广大考生在临考前的较短时间内全面检查复习效果，巩固复习成果，以满足参加 2003 年考研的广大考生考前实战热身、强化提高的需要。

在编写本书的过程中，不仅严格以《2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》为依据，而且还是在总结了编者多年的数学辅导经验，并参考了众多考研辅导资料的基础上精心编写的。新大纲中经济数学四增加了“常微分方程”，为此，本书也相应地调整了这方面的题目。

按照新大纲，针对近年考研命题趋势，编者根据多年考研辅导所积累的经验，就重点、难点、热点问题，如中值定理有关命题的证明、不等式的证明和高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分知识相互交叉命题，精心新编了一部分试题，比如把矩阵的实特征值与概率论与数理统计中的随机变量联系起来的问题；把高等数学中的极值问题与概率论与数理统计的期望与方差和估计量的有效性等联系起来的问题，等等。由于这方面的题型是近年来考研命题的重要趋势之一，相信考生通过演练，能够更加全面系统地掌握所需知识，迅速提高综合解题能力。

鉴于一般复习考试用书很少编写专门的综合应试指导，本书在这方面作了一点尝试。对填空题、选择题与综合解答题进行分类解析指导，揭示相关的解题技巧。这部分内容有相当部分是编者在近年考研辅导中的经验总结，读者可作参考。需要指出的是，应试技巧是重要的但并不是万能的，关键还在于对基础知识、基本概念和基本技能的把握。

本书选编的每类十二套标准化命题预测试题，选题覆盖面广，题型新颖，重点类型突出，特别注重对综合性试题、应用性试题和证明题等有关重点内容的选择，题目难易适度，符合实际考试要求。每套试题按分值 150 分出题，且均附有详尽的解析，特别是对填空题和选择题全部给出了详细的解答。

本书数学三与数学四的标准化命题预测试题基本不重复，无论是报考数学三还是数学四，两类试题均可作为考前练习之用。另外，除个别特别优秀的历年试题外，本书尽量不选已考试题，这主要是为了便于读者通过练习能真正检验自己的复习效果。

本书在编写过程中参考了众多的相关教材和辅导资料，在此向有关的作者、编者表示衷心的感谢！

由于时间仓促和编者水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请广大读者、同行和专家赐教。

编者

于北京

特别提示：请广大读者关注本书所附的“2002年版的本书对2002年全国统考试题的命中情况对照表”。

2002 年版本书对 2002 年全国硕士研究生入学统考试题的命中情况对照表

2002年全国硕士研究生入学统一考试经济数学试题			2002 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学试题在 2002 年版的本书中的出处	分值	备注
经济数学三	填空题	第(3)小题	第 33 页数学三模拟试题三第(4)小题	3 分	相同或相似
		第(5)小题	第 105 页数学三模拟试题十一选择题第(5)小题	3 分	相同或相似
	选择题	第(1)小题	第 104 页数学三模拟试题十一第(1)小题	3 分	相同或相似
		第(3)小题	第 25 页数学三模拟试题二第(3)小题	3 分	相同或相似
	解答题	第三大题	第 167 页数学四模拟试题六第三大题	5 分	相同或相似
		第四大题	第 53 页数学三模拟试题五第三大题	7 分	相同或相似
		第七大题	第 71 页数学三模拟试题七第八大题	7 分	相同或相似
经济数学四	填空题	第(2)小题	第 16 页数学三模拟试题一第(1)小题 第 129 页数学四模拟试题二第(2)小题	3 分	相同或相似
		第(3)小题	第 16 页数学三模拟试题一第(3)小题 第 199 页数学四模拟试题十第(4)小题	3 分	相同或相似
	选择题	第(1)小题	第 104 页数学三模拟试题十一第(1)小题	3 分	相同或相似
	解答题	第三大题	第 167 页数学四模拟试题六第三大题	5 分	相同或相似
		第四大题	第 53 页数学三模拟试题五第三大题	7 分	相同或相似
		第六大题	第 113 页数学三模拟试题十二第五大题	7 分	相同或相似
		第十大题	第 105 页数学三模拟试题十一第九大题	8 分	相同或相似

特别提示：欢迎广大读者用 2002 年版的本书与 2002 年的全国统考试题相对照（本书 2002 年版由北京出版社出版，书名《全国硕士研究生入学统一考试数学最后冲刺标准化全真模拟试卷精解（经济类）》）。

目录

附录：

第一部分　应试指导

一、2003年考研数学大纲修订情况

2003年考研经济数学大纲较以前大纲作了如下修改：

1. 数学四试卷中高等数学部分适当增加了"常微分方程".

2. 对考试内容和考试要求的表达更进一步明确.

3. 考试内容和考试要求中相同数学概念和术语作了进一步的规范.

4. 从2003年起硕士研究生入学统一考试数学试卷的满分调整为150分.

二、考试要求、典型题型与重要结论

微积分

(一) 函数、极限、连续

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念.

6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限.

8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理) 及其简单应用.

注：本部分的重点内容是极限，既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件，又要能熟练掌握常用的求极限的方法和技巧，正确求解各种类型的极限问题. 在考试中常用的求极限方法有：

1. 利用极限的四则运算法则.

2. 利用连续性.

3. 利用两个重要极限.

4. 利用等价无穷小替换(往往可使运算过程简化).

5. 利用洛必塔法则.

6. 利用夹逼定理.

7. 先利用"单调有界数列必有极限"准则证明数列的极限存在，再利用关系式求出极限.

8. 利用定积分的定义.

9. 利用泰勒公式等等.

当然，典型的考题往往需要综合运用以上多种方法求解.

讨论函数的连续性是通过极限工具进行的，所以连续性的问题本质上仍是求极限，因此这部分也是重点内容.

无穷小量阶的比较是一类特殊的极限问题，也是重点内容之一.

在函数概念这一部分内容中，重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

典型题型

1. 直接求给定式子的极限或已知函数的极限值反过来确定式中的参数.

2. 利用极限存在准则("夹逼定理"和"单调有界数列必有极限")和定积分定义等方法求极限.

3. 讨论函数的连续性，判断间断点的类型.

4. 无穷小的比较.

5. 讨论连续函数在给定区间的零点或方程在给定区间有无实根.

6. 求分段函数和复合函数等等.

重要结论

这里所指的重要结论是平时特别容易忽视，或考试中经常需要用到的一些公式、定理及其相关结论.没有罗列的，要么考生一般比较熟悉，要么很少用到，但并非不重要.我们列出的结论，主要是为考前备忘之用.

1. 无穷小量乘有界变量仍为无穷小量.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 极限不存在，或 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 极限不存在.当表达式中出现此种式子时，一般不直接用洛必塔法则求极限.

3. 当 $x\to+\infty$ 时，以下各函数趋向于无穷大的快慢次序(从慢到快)依次为

$$\ln x, x, x^{\mu}(\mu>1), a^{x}(a>1);$$

当 $n\to+\infty$ 时，以下各变量趋向于无穷大的快慢次序(从慢到快)依次为

$$\ln n, n, n^{\mu}(\mu>1), a^{n}(a>1), n!, n^{n}.$$

4. 当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小:

$\sin x\sim x, \arcsin x\sim x, \tan x\sim x, \arctan x\sim x$

$\ln(1+x)\sim x, e^{x}-1\sim x, (1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{x}{n}, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^{2}$

5. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

6. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$($1^{\infty}$ 型，0^{0} 型，∞^{0} 型) $=\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}$

特别还有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$($1^{\infty}$ 型) $=\lim\limits_{x\to x_0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)\cdot(f(x)-1)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)[f(x)-1]}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(a+\dfrac{b-a}{n}i)\dfrac{1}{n}=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$

特别地，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

(二) 一元函数微分学

考试要求

1. 理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系，了解导数的几何意义与经济意义(含边际与弹性的概念).

2. 掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，掌握反函数与隐函数求导法以及对数求导法.

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

4. 了解微分的概念，导数与微分之间的关系，以及一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

5. 理解罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理、了解柯西(Cauchy)中值定理，掌握这三个定理的简单应用.

6. 会用洛必达法则求极限.

7. 掌握函数单调性的判别方法及其应用，掌握函数极值、最大值和最小值的求法，会解较简单的应用题.

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点和渐近线.

9. 掌握函数作图的基本步骤和方法，会作简单函数的图形.

注:数学四中哥西中值定理不作要求.

一元函数微分学在微积分中占有极重要的位置，应重点掌握的内容包括：

1. 导数与微分的定义，特别要会利用导数定义讨论分段函数在分段点的可导性，可导与连续的关系.

2. 求导运算，在掌握了基本的运算规则后，重点内容是复合函数的求导、隐函数求导、参数方程求导和抽象函数求导.

3. 中值定理，包括罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理及其应用.高等数学部分难度大、技巧性强的题大都与此三个定理有关，这类证明题的关键是构造辅助函数，常用的方法有：参数变易法、不定积分法、常数 k 值法、微分方程法等等.

4. 导数应用，重点是利用导数研究函数的性态(包括函数的单调性与极值，函数图形的凹凸性与拐点，渐近线).

典型题型

1. 计算题.求给定函数的导数或微分(包括高阶导数)，包括隐函数和由参数方程确定的函数的求导.其中重点是复合函数求导，以及由此引申出来的所谓抽象函数求导(复合函数：$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 中，f 或 φ 未知)、变限定积分求导.

2. 证明题.利用罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理证明有关命题和不等式，或讨论方程在给定区间内的根的个数等.

此类题的证明，经常要构造辅助函数，要求读者掌握常用的构造辅助函数的方法和技巧，既能从题目所给条件进行分析、变形和推导，逐步引出所需的辅助函数，也能从所需证明的结论出

发“逆推”出所要构造的辅助函数.此外,在证明中还经常用到函数的单调性和连续函数的介值定理等.

3. 几何、物理方面的极值与最值问题.

4. 利用导数研究函数性态和描绘函数图像等等.

重要结论

1. 导数定义式

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=\cdots\cdots$$

2. $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Longleftrightarrow f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$.

3. 可导的偶(奇)函数,其导函数为奇(偶)函数.

4. 拉格朗日中值定理的几种等价形式.

① $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ (ξ 在 a 与 b 之间)

② $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ (ξ 在 a 与 b 之间)

③ $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

④ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x$ (ξ 在 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间)

⑤ $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$ $(0<\theta<1)$

⑥ $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ $(0<\theta<1)$

⑦ $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ $(0<\theta<1)$

5. 罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理之间的关系.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{罗尔定理}\\ f'(\xi)=0\end{array}}\ \xleftrightarrow[f(a)=f(b)]{\text{推广}}\ \boxed{\begin{array}{l}\text{拉格朗日中值定理}\\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\end{array}}\ \xleftrightarrow[g(x)=x]{\text{推广}}\ \boxed{\begin{array}{l}\text{柯西中值定理}\\ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\end{array}}$$

$$\text{推广}\downarrow\quad n=0\uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{泰勒定理}\\ f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\end{array}}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

(三)一元函数积分学

考试要求

1. 理解原函数与不定积分的概念,掌握不定积分的基本性质和基本积分公式,掌握不定积分的换元积分法和分部积分法.

2. 了解定积分的概念和基本性质,了解定积分中值定理,理解变上限定积分定义的函数并会求它的导数,掌握牛顿—莱布尼茨公式,以及定积分的换元积分法和分部积分法.

3. 会利用定积分计算平面图形的面积和旋转体的体积,会利用定积分求解简单的经济应用问题.

4. 了解广义积分的概念，会计算广义积分.

注：本部分重点内容包括：

1. 三法一表，不定积分与定积分的直接积分法、换元积分法和分部积分法以及基本积分公式表.

2. 定积分的概念及其应用.

3. 变上限积分及其导数公式.

典型题型

1. 计算题. 计算不定积分、定积分及广义积分. 注意对被积函数含有绝对值、平方根式的情形，计算不定积分与定积分时的异同.

2. 与变上限积分有关的问题. 变上限积分实质上是一种特殊形式的函数，因此所有对函数讨论的问题：求极限、求导、求极值、比较无穷小量的阶等等，对变上限的定积分都是适用的. 不过，在求导时，被积函数中除积分变量外，不能含有自变量 x，若有，应首先设法通过变量代换等把 x 换到积分限上或积分号外再求导.

3. 关于积分中值定理的证明题.

4. 定积分应用问题.

重要结论

1. 积分可加性

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

对于被积函数为分段函数或含有绝对值的函数经常需要利用此公式；对于与积分有关的不等式与等式的证明，也经常利用此公式变形.

2. 变限积分求导

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

3. 对称区间上的积分

① 设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，则 $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x$；

② 若 $f(x)$ 为连续的奇函数，则 $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 0$；

③ 若 $f(x)$ 为连续的偶函数，则 $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$；

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

（四）多元函数微积分学

考试要求

1. 了解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续的直观意义，了解有界闭区域上二元连续函数的性质.

3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分，会用隐函数的求导法则.

4. 了解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值,会求解一些简单的应用题.

5. 了解二重积分的概念与基本性质,掌握二重积分(直角坐标、极坐标)的计算方法.会计算无界区域上的较简单的二重积分.

典型题型

1. 求二元、三元函数的偏导数、全微分.

2. 求复合函数的二阶偏导数,求隐函数的一阶、二阶偏导数.

3. 多元函数的极值.

4. 二重积分对各种坐标的计算.

重要结论

1. 二元函数在一点连续、可导(两个偏导数存在与可微的关系):

$$\boxed{f(x,y)\text{ 在}(x_0,y_0)\text{ 可微}} \Rightarrow \boxed{f(x,y)\text{ 在}(x_0,y_0)\text{ 连续}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x,y)\text{ 在}(x_0,y_0)\text{ 偏导存在}}$$

2. 如果积分域 D 关于 x 轴对称,$f(x,y)$ 为 y 的奇偶函数,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f\text{ 关于 }y\text{ 为奇函数,即 }f(x,-y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{ 关于 }y\text{ 为偶函数,即 }f(x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

D_1 为 D 在上半平面部分.

3. 如果 D 关于 y 轴对称,$f(x,y)$ 为 x 的奇偶函数,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f\text{ 关于 }x\text{ 为奇函数,即 }f(-x,y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{ 关于 }x\text{ 为偶函数,即 }f(-x,y)=f(x,y) \end{cases}$$

D_2 为 D 在右半平面部分.

4. 如果 D 关于原点对称,$f(x,y)$ 同时为 x,y 的奇偶函数,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f\text{ 关于 }x,y\text{ 为奇函数,即 }f(-x,-y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{ 关于 }x,y\text{ 为偶函数,即 }f(-x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

D_1 为 D 在上半平面部分.

(五) 无穷级数(数学四不作要求)

考试要求

1. 了解级数的收敛与发散、收敛级数的和的概念.

2. 掌握级数的基本性质和级数收敛的必要条件.掌握几何级数及 p 级数的收敛与发散的条件.掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法.

3. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念,以及绝对收敛与收敛的关系.掌握交错级数的莱布尼茨判别法.

4. 会求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域.

5. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项微分和逐项积分),会求简单幂级数在其收敛区间内的和函数.

6. 掌握 e^x、$\sin x$、$\cos x$、$\ln(1+x)$ 与 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式,会用它们将简单函数间接展开成幂级数.

注:重点内容是:判断数项级数的敛散性.其他考查内容包括:1° 求幂级数的收敛半径、收敛区间(开区间)、收敛域;2° 将函数展开成幂级数;3° 求某些数项级数的和或某些幂级数的和函数.

关于求幂级数的收敛域,首先求出收敛半径,得到收敛区间,再考虑两个端点的收敛性,从而求得收敛域,在求收敛半径时,若用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, R = \dfrac{1}{\rho}$ 时,注意此时的级数是形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的标准形式.若为形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的幂级数,此时 x 的取值范围为 $|x-x_0| < R$,再考虑端点 $x = x_0 \pm R$,得到最终的收敛域.

关于将已知函数展开为幂级数,事实上只需要掌握间接展开法.所谓间接法,是根据幂级数展开的惟一性,将要展开的函数通过代数运算、变量置换、逐项求导、逐项积分等手段化成已知幂级数展开式的函数,而得到该函数的幂级数展开式,因此要求:

1° 记住诸如 $\dfrac{1}{1-x}$,e^x,$\sin x$,$\cos x$,$\ln(1+x)$ 等函数的展开式及收敛域,且将 x 理解为中间变量.

2° 将函数 $f(x)$ 通过代数运算、变量置换、逐项求导或逐项积分化成 1° 中已知展开式的幂级数展开.

典型题型

1. 判别数项级数的敛散性.

① 正项级数的判敛程序.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geqslant 0} \arrow[r] & \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n \overset{?}{=\!=} 0} \arrow[r, "\text{是}"] \arrow[d, "\text{否}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{比值法}\\ \text{根值法}\end{array}} \arrow[r, "\rho = 1"] \arrow[d, "\rho > 1"] & \boxed{\text{比较法,定义}} \arrow[d, "\rho < 1"] \\
 & \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}
\end{tikzcd}$$

注:1° 若一般项中含有 $n!$ 或几个因子乘积的形式,一般用比值判别法;

2° 若通项中含有 n^α 因子,一般用比较法或比较法的极限形式,比较法的极限形式其实质是比无穷小量的阶,比较的对象一般是 p 级数和几何级数,或者题设中隐含或已知敛散性的对象;

3° 若通项为 $[f(n)]^n$ 的形式,可采用根值判别法;

4° 利用级数的性质或直接用定义判别敛散性.

② 一般项级数的判敛程序.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n} \longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} u_n \overset{?}{=\!=} 0} \xrightarrow{\text{是}} \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 用正项级数判别法}} \xrightarrow{\text{发散}} \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 是否为交错级数}} \xrightarrow{\text{是}} \boxed{\text{用莱布尼兹判别法}} \xrightarrow{\text{收敛}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛}$$

$\lim_{n\to\infty} u_n \overset{?}{=} 0$ $\big\downarrow$ 否 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ $\big\downarrow$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

2. 用间接法将已知函数展开成幂级数.

3. 求某些数项级数的和或某些幂级数的和函数.

重要结论

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1 \text{ 收敛} \\ p \leqslant 1 \text{ 发散} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \begin{cases} |r| < 1 \text{ 收敛} \\ |r| \geqslant 1 \text{ 发散} \end{cases}$

2.① $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in (-1,1))$

② $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in (-\infty, +\infty))$

③ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in (-\infty, +\infty))$

④ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in (-\infty, +\infty))$

⑤ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (x \in (-1, 1])$

注: $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad (x \in [-1, 1))$

3. 记住已知幂级数的和函数.

① $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (|x| < 1)$

4. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 在 $x = a$ 点收敛,则当 $|x - x_0| < |a - x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 绝对收敛.

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 在 $x = a$ 点发散,则当 $|x - x_0| > |a - x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 发散.

特别地,若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 点收敛(发散),则当 $|x| < |x_0|$ ($|x| > |x_0|$) 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 绝对收敛(发散).