College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

□ 浙江大学 盛 骤 谢式千 潘承毅 编

概率论与数理统计附册

学习辅导与习题选解

浙大·第四版

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计附册

学习辅导与习题选解

浙大·第四版

浙江大学 盛 骤 谢式千 潘承毅 编

高等教育出版社

内容提要

本书是浙江大学盛骤等编的《概率论与数理统计》（第四版）的配套学习辅导书，全书按照主教材的要求和章节顺序进行编排，每章主要包括：内容提要、例题、练习题和教材习题选解。旨在帮助读者掌握概率论与数理统计课程的基本内容和解题方法，提高学习效率。

本书可作为理工科和其他非数学类专业的学生学习概率论与数理统计的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计附册：学习辅导与习题选解：浙大·第四版/盛骤，谢式千，潘承毅编．—北京：高等教育出版社，2008.6

ISBN 978-7-04-023897-6

Ⅰ．概… Ⅱ．①盛…②谢…③潘… Ⅲ．①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 061542 号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹文军
版式设计 余 杨 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京泽明印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年6月第1版
印　　张	20.5	印　　次	2008年6月第1次印刷
字　　数	380 000	定　　价	19.80元

物料号　23897－00

前　言

本书是《概率论与数理统计》(第四版)(浙江大学盛骤等编,高等教育出版社2008年出版)(以下简称《教材》或教材)的配套学习辅导书,旨在帮助读者掌握概率论与数理统计课程的基本内容和解题方法,帮助读者提高学习效率。

本书的章节编排与《教材》相同。在《教材》中,第四版新增了第十章bootstrap方法和第十一章在数理统计中应用Excel软件,有关的内容在本书中未单独设章,而是分别插入有关的章。

在本书中:第一章至第五章为概率论部分,第六章至第九章为数理统计部分,第十二章至第十四章为随机过程部分,最后一章是《教材》“选做习题”的选解,前面各章每章内容分为四节:1. 内容提要便于读者在学习时提纲挈领地掌握课程内容。2. 例题通过典型例题的示范,指导读者解题,帮助读者掌握解题步骤与方法,指出易犯的错误,并究其原因,澄清不正确的想法。3. 练习题数量不多,其中有判断题,能考查读者对一些基本概念是否清楚,读者通过解这些题目还能自我评价对课程内容的掌握程度以增强学习效果。4.《教材》习题选解对《教材》习题中较为复杂的或概念性较强的或不易搞清楚的题目做了题解。第十五章是《教材》中“选做习题”的选解,这部分习题内容涉及课程的多个部分,其中有少数题目有点难。

通过我们对例题和习题的解题示范,使读者对于如何着手解题,如何思考有所启发。通过对本书的学习能提高读者分析问题、解决实际问题的能力,加深对基本内容的理解和掌握,并能开阔视野,还会增强学好这门课程的信心和兴趣。

关于题解,我们希望读者先自行思考,自己解题,然后与题解进行对照。如果自己不动手做题,只是照抄,那是无益的。

本书可作为大学理科、工科学生学习概率论与数理统计课程的辅导教材,可供报考研究生的读者作为参考书,也可供工程技术人员作参考。

本书第一章至第九章以及第十五章由盛骤、谢式千编写;第十二章至第十四章由潘承毅编写。

本书承浙江大学范大茵教授详细地审阅,她提出许多宝贵意见,对此我们表示衷心的感谢。

本书不足之处,诚恳地希望读者批评指正。

盛　骤　谢式千　潘承毅

2008年4月

目　　录

第一章 概率论的基本概念

一、内 容 提 要

1. 随机试验、样本空间

具有以下特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**.

试验可以在相同的条件下重复进行;每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 S. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**.

2. 随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**,简称**事件**. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一**事件发生**.

一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 样本空间 S,它是 S 自身的子集,它包含所有的样本点,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 也作为样本空间的子集,它不包含任何样本点,在每次试验中它都不发生,称为**不可能事件**.

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算自然按集合论中集合之间的关系和集合的运算来处理. 这些关系与运算在概率论中的提法和含义如下:

设试验 E 的样本空间为 S,A、B 是 S 的子集.

1° 若 $A \subset B$,则称事件 B 包含事件 A,这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,即 $A = B$,则称事件 A 与事件 B **相等**.

2° 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

3° 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 当且仅当 A,B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记为 AB.

4° 事件 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时事件 $A - B$ 发生.

5° 若 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与 B 是**互不相容的**,或**互斥的**. 这指的是事

件 A 与事件 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

6° 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 又称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**. 这指的是,对每次试验,事件 A、B 中必有一个发生,且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$,$\overline{A} = S - A$.

3. 频率与概率

在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$. 当试验次数 n 较小时,频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大;而当 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数,这种"频率的稳定性",即通常所说的**统计规律性**.

概率的定义 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的**概率**,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1° 非负性:对于每一个事件 A,有 $P(A) \geqslant 0$;

2° 规范性:对于必然事件 S,有 $P(S) = 1$;

3° 可列可加性:设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i \neq j$,$A_iA_j = \varnothing$,$i,j = 1,2,\cdots$,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$

概率有以下的一些重要性质:

性质 i $P(\varnothing) = 0$.

性质 ii(有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质 iii 设 A,B 是两个事件,若 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A);$$

$$P(B) \geqslant P(A).$$

性质 iv 对于任一事件 A,

$$P(A) \leqslant 1.$$

性质 v(逆事件的概率) 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 vi(加法公式) 对于任意两事件 A,B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

4. 等可能概型(古典概型)

具有以下两个特点的试验称为**等可能概型**,也称**古典概型**.

1° 试验的样本空间 S 的元素只有有限个;

2° 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

在古典概型中事件 A 的概率的计算公式是

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}.$$

5. 条件概率

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

6. 三个重要公式

1° **乘法公式** 设 A,B,C 是三个事件,且有 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(B\mid A)P(A).$$

设 $P(AB)>0$,则有

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A).$$

2° **全概率公式** 设试验 E 的样本空间为 S. $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 E 的事件,且 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$, $B_iB_j=\varnothing$, $i\neq j$, $P(B_i)>0$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 则有

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n).$$

3° **贝叶斯公式** 设试验 E 的样本空间为 S, $A,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 E 的事件,且 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$, $B_iB_j=\varnothing$, $i\neq j$, $P(A)>0$, $P(B_i)>0$, $i,j=1,2,\cdots,n$,则有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

7. 事件的独立性

设 A,B 是两个事件,如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A,B **相互独立**,简称 A,B **独立**.

设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B),\\P(BC)&=P(B)P(C),\\P(AC)&=P(A)P(C),\\P(ABC)&=P(A)P(B)P(C),\end{aligned}$$

则称事件 A,B,C **相互独立**.

一般，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n\ (n\geqslant 2)$ 个事件，如果对于其中任意 2 个，任意 3 个，…，任意 n 个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

由定义，可以得到以下两点推论.

1°　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 $k\ (2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的.

2°　若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

二、例　题

例 1　设 A,B,C,D 是四个事件，用 A,B,C,D 的运算关系表示下列事件.

(1) G_1:“A,B,C,D 中仅有 A 发生”

注意到仅有 A 发生，即为 A 发生而 B,C,D 均不发生，故

$$G_1=A\overline{B}\overline{C}\overline{D}.$$

(2) G_2:“A,B,C,D 中恰有一个发生”

注意到恰有一个发生，但未指定为哪一个发生，于是可以恰为 A 发生，也可恰为 B 发生，也可恰为 C 发生，也可恰为 D 发生，故

$$G_2=A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\cup\overline{A}B\overline{C}\overline{D}\cup\overline{A}\overline{B}C\overline{D}\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}D.$$

(3) G_3:“A,B 中至少有一个发生而 C,D 均不发生”

A,B 中至少有一个发生即为 $A\cup B$ 发生，而同时 C,D 均不发生，故

$$G_3=(A\cup B)\overline{C}\overline{D}.$$

(4) G_4:“A,B,C 中不多于一个发生，但 D 发生”

“A,B,C 中不多于一个发生”，即为 A,B,C 中恰有一个发生或者是 A,B,C 都不发生，故

$$G_4=(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C})D.$$

也可以这样想，“A,B,C 不多于一个发生”也就是“A,B,C 中至少有两个不发生”，于是 G_4 也可以表示为

$$G_4=(\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{C}\overline{A})D.$$

(5) G_5:“A,B 中至少有一个发生，C,D 中至少有一个不发生”应为

$$G_5=(A\cup B)(\overline{C}\cup\overline{D}),$$

或

$$G_5=(A\cup B)\,\overline{CD}.$$

(6) G_6:“A,B,C 中至少有一个不发生，D 发生”

$$G_6=(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})D,\quad 或\quad G_6=\overline{ABC}\,D.$$

(7) 将 $G_7 = A \cup B \cup C \cup D$ 表示成两两互不相容的事件的和事件. 表示的方法不是唯一的，例如可表示为

$$G_7 = A \cup (B - A) \cup (C - A - B) \cup (D - A - B - C)$$
$$= A \cup B\overline{A} \cup C\overline{A}\overline{B} \cup D\overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

(8) 将 $G_8 = A \cup B \cup C \cup D$ 表示成 $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$，其中 $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4$. 表示的方法不是唯一的，例如可表示为

$G_8 = A \cup (A \cup B) \cup (A \cup B \cup C) \cup (A \cup B \cup C \cup D)$，

取 $M_1 = A, M_2 = A \cup B, M_3 = A \cup B \cup C, M_4 = A \cup B \cup C \cup D$.

注意：(i) "两事件的差"可用"对立事件"来表示，例如 $A - B = A\overline{B}$，$A - BC = A\,\overline{BC}$.

(ii) 易犯的错误是，误将$\overline{AB}$ 与 $\overline{A}\overline{B}$ 等同起来，误以为$\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$. 事实上，$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B} \neq \overline{A}\overline{B}$. 又如$\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \neq \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(iii) 误以为 $S = A \cup B \cup C \cup D$. 例如误将$\overline{ABCD}$ 写成 $A \cup B \cup C \cup D - ABCD$. 事实上，$S - (A \cup B \cup C \cup D)$ 可能不等于 $\varnothing$，一般 $S \supset A \cup B \cup C \cup D$.

例 2　盒中有 9 只红球，3 只白球.

(1) 在盒中随机地取 5 只球，求其中恰有 2 只白球 3 只红球(这一事件记为 A) 的概率.

(2) 在盒中取球 5 次，每次取 1 只，作不放回抽样，求其中恰有 2 只白球 3 只红球(这一事件记为 B) 的概率.

(3) 在盒中取球 5 次，每次取 1 只，作放回抽样，求其中恰有 2 只白球 3 只红球(这一事件记为 C) 的概率.

解　(1) 在盒中取 5 只球，每一种取法为一样本点，现不考虑取球的次序，样本点的总数为 $\binom{12}{5}$. 对于事件 A 而言，在 3 只白球中任取 2 只共有 $\binom{3}{2}$ 种取法，又在 9 只红球中任取 3 只共有 $\binom{9}{3}$ 种取法，由乘法原理得 A 中包含的样本点的总数为 $\binom{3}{2}\binom{9}{3}$. 于是

$$P(A) = \binom{3}{2}\binom{9}{3}\Big/\binom{12}{5} = \frac{7}{22}.$$

若考虑取球的次序，样本点的总数为 A_{12}^5，对于事件 A 而言，先不考虑取球的次序共有 $\binom{3}{2}\binom{9}{3}$ 种取法，再将取出的 5 只球进行全排列，故若考虑取球的次序取球的方法有 $\binom{3}{2}\binom{9}{3} \times 5!$ 种. 于是

$$P(A)=\binom{3}{2}\binom{9}{3}\times 5!/A_{12}^{5}=\frac{7}{22}.$$

也可以这样来考虑，先在5个位置中挑出2个位置放白球，共有$\binom{5}{2}$种挑选法. 再者白球有$3\times 2=A_3^2$种取法，而红球有$9\times 8\times 7=A_9^3$种取法，故A中包含的样本点数为$\binom{5}{2}A_3^2A_9^3$. 于是

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}A_3^2A_9^3}{A_{12}^5}=\frac{\binom{5}{2}3\cdot 2\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}=\frac{7}{22}.$$

(2) 这种取球方法与(1)中考虑次序的取球方法一样，故$P(B)=P(A)$，即有

$$P(B)=\frac{\binom{5}{2}3\cdot 2\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}=\frac{7}{22}.$$

(3) 在盒中取5只球，每一种取法为一个样本点，考虑取球的次序，因第1次有12只球可供抽取，第2次，……，第5次均有12只球可供抽取，由乘法原理共有$12\times 12\times 12\times 12\times 12=12^5$种取法，即样本空间中样本点的总数为$12^5$. 在5个位置中挑出2个位置放白球，共有$\binom{5}{2}$种挑选法，再者白球有$3\times 3=3^2$种取法，红球有$9\times 9\times 9=9^3$种取法，故$C$中包含$\binom{5}{2}3^2\times 9^3$个样本点，因而

$$P(C)=\frac{\binom{5}{2}\cdot 3^2\cdot 9^3}{12^5}=\frac{135}{512}.$$

本题(1)或(2)易犯的错误是将$P(A)$或$P(B)$误写成$\dfrac{\binom{3}{2}\binom{9}{3}}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}$(即分母考虑取球次序，而分子未考虑次序)，或误写成$\dfrac{3\cdot 2\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}$(即分子未考虑白球与红球之间的排列次序).

例3　(1) 将8只球随机地放入编号为1,2,3,4的四只盒子中去，试求1号盒子恰有2只球，2号盒子恰有3只球的概率.

(2) 将n只球随机地放入编号为$1,2,\cdots,n$的n只盒子中去，求恰有一只空盒的概率.

解　(1) 以A记事件“1号盒子恰有2只球，2号盒子恰有3只球”. 因每只球

均可随机地放入四只盒子中去，对于第一只球而言，有四只盒子可选择，对于第2只球也有四只盒子可选择，对于第3只球，……，第8只球均如此，于是所有可能的放球的方法共有$4\times4\times\cdots\times4=4^8$种，每一种为一样本点，样本空间中样本点的总数为$4^8$.

计算A所包含的样本点数，因要A发生只要1号盒放入2只球，2号盒放入3只球，但并未指定是什么球，因此第一步可以从8只球中任选2只放入1号盒，然后再从剩下的6只球任选3只放入2号盒，而剩下的3只球中每一只可放入3号4号盒中的任意一盒，此时这3只球每一只都有2种放法，共有2^3种放法，由乘法原理A所包含的样本点的总数为$\binom{8}{2}\binom{6}{3}2^3$. 于是

$$P(A)=\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{3}2^3}{4^8}=\frac{35}{512}.$$

(2) 以B记事件“恰有一只空盒”. 与(1)一样，将n只球放入n只盒子的一种放法作为一个样本点，样本空间中样本点的总数为n^n. 注意到由于球的只数与盒子数相同，故B发生相当于n只盒子中恰有一只空盒，恰有一只盒子装有两只球而另外$n-2$只盒子均各装一只球，于是A所包含的样本点的个数为

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n}{2}(n-2)!,$$

这里第1个因子$\binom{n}{1}$是挑选一只空盒的选法(因不同的空盒对应不同的样本点，n只盒子都可以取作空盒，空盒有$\binom{n}{1}$种选取法)，第2个因子$\binom{n-1}{1}$是挑选一只放2只球的盒子的选取法，第3个因子$\binom{n}{2}$是挑选放在同一只盒子的两只球的选取法(因对于这两只球或另外两只球对应不同的样本点)，第4个因子$(n-2)!$是将余下的$n-2$只球放入余下的$n-2$只盒子中去，每只盒子放一只球的不同放法，故所求概率为

$$P(A)=\left[\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n}{2}(n-2)!\right]\Big/n^n.$$

例4　将6只球随机地放入3只盒子中去，求每只盒子都有球的概率.

解　以A记事件“每只盒子都有球”. 一只球可以放入3只盒子的任一只盒子中去，样本点的总数为3^6，只需求A中包含的样本点数.

A发生分为三种情况：

(i) 3 只盒子装球数分别为 4,1,1,所含的样本点数为

$$\binom{3}{1}\binom{6}{4}\times 2=90.$$

这里$\binom{3}{1}$表示选一只装 4 只球的盒子的选法,$\binom{6}{4}$表示装入同一盒子的 4 只球的选法,2 表示将余下的 2 只球分别装入另外两只盒子的装法.

(ii) 3 只盒子装球数分别为 3,2,1,所含样本点数为

$$\binom{3}{1}\binom{6}{3}\binom{2}{1}\binom{3}{2}=360.$$

这里$\binom{3}{1}$表示选一装 3 只球的盒子的选法,$\binom{6}{3}$表示装入同一只盒子的 3 只球的选法,$\binom{2}{1}$表示在余下的 2 只盒子中选一只盒子装 2 只球的选法,$\binom{3}{2}$表示在余下的 3 只球中选 2 只装入同一盒子的选法.

(iii) 3 只盒子装球数均为 2,所含样本点数为

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2}=90.$$

这里$\binom{6}{2}$表示选 2 只球装入第一只盒子的选法,$\binom{4}{2}$表示在余下的球中选 2 只装入第二只盒子的选法.

综合三种情况,知 A 中包含 $90+360+90=540$ 个样本点,故

$$P(A)=540/3^6=20/27.$$

错误做法:先在 6 只球中任选 3 只(有$\binom{6}{3}$种选法),分别放入 3 只盒子,共有 3!种放法(其考虑是保证每只盒子都有球),然后再将余下的 3 只球随机地放入 3 只盒子中去,共有 3^3 种放法,因此 A 包含 $3!\binom{6}{3}\cdot 3^3$ 个样本点,这样

$$P(A)=3!\binom{6}{3}\cdot 3^3/3^6=\frac{40}{9}>1.$$

这是荒谬的!

错解原因分析:将 6 只球放入 3 只盒子,一种放球法是一个样本点.在错误做法中球是分批放入的.第一批选 3 只球每只盒子放一只,第二批将余下的 3 只球再放入盒子中去,这样就将由不同批放入盒子所对应的放球法看成是不相同的样本点从而造成了重复.例如对于情况(i),盒 A 放入球 a,盒 B 放入球 b,盒 C 放入球 c、d、e、f,这种放球法是一个样本点.但分批放球时却将以下 4 种情况误认为是 4 种不同的放球法,误认为是 4 个样本点.

盒 A	盒 B	盒 C	
a	b	$c(def)$	括号中是第二
a	b	$d(cef)$	批放入的球.
a	b	$e(cdf)$	
a	b	$f(cde)$	

这样样本点数被误增为 4 倍. 类似地经分析得知，对于情况(ii) 和(iii)，样本点数分别被误增为 6 倍、8 倍，从而得出了荒谬的答案.

本题也可先求对立事件 $\overline{A}$ 的概率. 以 p_1、p_2 分别记有一只空盒、2 只空盒的概率，则 $p_1 = 186/3^6$，$p_2 = 3/3^6$，于是 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (p_1 + p_2)$.（比较起来后一方法方便且不易错.）

例 5　从 n 双不同的鞋子中任选 $2r$ 只($2r < n$)，试求没有成对的鞋子(这一事件记为 A) 的概率.

解　样本点总数为 $\binom{2n}{2r}$. 下面计算 A 中包含的样本点数.

错误做法：A 中所含样本点数为

$$\binom{2n}{1}\binom{2n-2}{1}\binom{2n-4}{1}\times\cdots\times\binom{2n-4r+2}{1}.$$

错误的原因是考虑了所选 $2r$ 只鞋子的先后次序(而在计算样本空间中样本点总数时，是未考虑所选的 $2r$ 只鞋子的先后次序的)，因此 A 中的样本点数被误增为 $(2r)!$ 倍.

正确做法是 A 中所含样本点数为(记为 $N(A)$)

$$\binom{2n}{1}\binom{2n-2}{1}\binom{2n-4}{1}\times\cdots\times\binom{2n-4r+2}{1}\Big/(2r)!,$$

于是

$$P(A) = N(A)\Big/\binom{2n}{2r}.$$

例 6　在数集$\{1,2,\cdots,100\}$ 中随机地取一个数，已知取到的数不能被 2 整除，求它能被 3 或 5 整除的概率.

解　以 A_2, A_3, A_5 分别表示取到的数能被 2,3,5 整除，所求概率为

$$p = P(A_3 \cup A_5 \mid \overline{A}_2) = \frac{P[(A_3 \cup A_5)\overline{A}_2]}{P(\overline{A}_2)}$$

$$= \frac{P(A_3\overline{A}_2) + P(A_5\overline{A}_2) - P(A_3A_5\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}.$$

而

$$P(A_3\overline{A}_2) = P[A_3(S - A_2)] = P(A_3) - P(A_3A_2).$$

因 A_3A_2 表示事件"能被 6 整除",故 $P(A_3A_2)=\dfrac{16}{100}$. 于是

$$P(A_3\overline{A}_2)=\frac{33}{100}-\frac{16}{100}=\frac{17}{100}.$$

同样

$$\begin{aligned}P(A_5\overline{A}_2)&=P[A_5(S-A_2)]=P(A_5)-P(A_5A_2)\\&=\frac{20}{100}-\frac{10}{100}=\frac{10}{100}(\text{因 }A_5A_2\text{ 表示事件“能被 10 整除”}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_3A_5\overline{A}_2)&=P[A_3A_5(S-A_2)]\\&=P(A_3A_5)-P(A_3A_5A_2)\\&=\frac{6}{100}-\frac{3}{100}=\frac{3}{100}(\text{因 }A_3A_5A_2\text{ 表示事件“能被 30 整除”}).\end{aligned}$$

故

$$p=\frac{17+10-3}{100}\Big/\frac{1}{2}=\frac{12}{25}.$$

注意:只有当 $B\subset A$ 时才有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

例 7 设盒 Ⅰ 有 6 只红球,4 只白球;盒 Ⅱ 有 7 只红球,3 只白球. 自盒 Ⅰ 中随机地取一只球放入盒 Ⅱ,接着在盒 Ⅱ 中随机地取一只球放入盒 Ⅰ.

(1) 然后在盒 Ⅰ 随机地取一只球,求取到的是红球的概率.

(2) 求盒 Ⅰ 中仍有 6 只红球 4 只白球的概率.

解 以 R_1 记事件"第一次在盒 Ⅰ 中取到一只红球",以 R_2 记事件"第二次在盒 Ⅰ 取到一只红球",以 C 记事件"在盒 Ⅱ 中取到一只红球".

(1) $R_2=[R_1(CR_2\cup\overline{C}R_2)]\cup[\overline{R}_1(CR_2\cup\overline{C}R_2)]$,

$$\begin{aligned}&P[R_1(CR_2\cup\overline{C}R_2)]\\&=P(R_1CR_2)+P(R_1\overline{C}R_2)\\&=P(R_2\mid CR_1)P(C\mid R_1)P(R_1)+P(R_2\mid\overline{C}R_1)P(\overline{C}\mid R_1)P(R_1)\\&=\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{6}{10}=\frac{378}{1\,100}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P[\overline{R}_1(CR_2\cup\overline{C}R_2)]\\&=P(\overline{R}_1CR_2)+P(\overline{R}_1\overline{C}R_2)\\&=P(R_2\mid C\overline{R}_1)P(C\mid\overline{R}_1)P(\overline{R}_1)+P(R_2\mid\overline{C}\overline{R}_1)P(\overline{C}\mid\overline{R}_1)P(\overline{R}_1)\\&=\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{292}{1\,100}.\end{aligned}$$

于是

$$P(R_2)=\frac{378}{1\,100}+\frac{292}{1\,100}=\frac{670}{1\,100}=0.609.$$

(2) 以 G 记事件"盒 Ⅰ 中仍有 6 只红球 4 只白球",则