

高等学校土木工程系列教材

结构力学

下册

第4版

刘昭培 张韫美 主编



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

组稿编辑：张文红
责任编辑：张文红
装帧设计：谷英卉
技术设计：油俊伟

结构力学

下册

2006

ISBN 7-5618-0266-8



02>



9 787561 802663

定价：23.20元

0342/30=3

:2

2006

高等学校土木工程系列教材

结 构 力 学 (下)

(第 4 版)

刘昭培 张韫美 主编

 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是按原国家教育委员会批准的《结构力学课程教学基本要求》(参考学时 110) 编写的。本书分上、下两册。对《基本要求》中规定的学习内容保证了必要的篇幅, 同时还编入了进一步加深、加宽的内容。因此, 本书除作为土建、水利专业本科生《结构力学》的教材外, 也可供土建、水利工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

结构力学 (下) / 刘昭培, 张韞美主编. —4 版 (修订版). —天津: 天津大学出版社, 2000.5 (2006.4 重印)

ISBN 7-5618-0266-8

I. 结... II. ①刘... ②张... III. 结构力学 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 34791 号

出 版 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内 (邮编: 300072)
电 话 发行部: 022-27403647 邮购部: 022-27402742
网 址 www.tjup.com
短信网址 发送“天大”至 916088
印 刷 迁安万隆印刷有限责任公司
发 行 新华书店天津发行所
开 本 185mm×260mm
印 张 14.5
字 数 363 千
版 次 1989 年 12 月第 1 版 2000 年 5 月第 2 版
2003 年 1 月第 3 版 2006 年 4 月第 4 版
印 次 2006 年 4 月第 9 次
印 数 22 001—26 000
定 价 23.20 元

天津大学建筑工程学院土木工程专业

教材教学指导委员会

(以姓氏笔画为序)

主 任：姜忻良

委 员：王铁成 任兴华 刘惠兰 刘锡良
李忠献 李增福 何玉敖 赵 彤
赵奎生 罗定安 郭传镇 顾晓鲁
康谷贻 梁建文 戴自强

本教材已通过天津大学建筑工程学院土木工程专业教材教学指导委员会审查，可作为四年制土木工程专业本科教材。

目 录

* 第 10 章 最小势能原理	(1)
10.1 概述	(1)
10.2 关于虚位移原理的进一步讨论	(1)
10.3 线性变形体系的变形势能	(5)
10.4 线性变形体系的最小势能原理	(7)
10.5 里兹法	(12)
习题	(16)
第 11 章 结构矩阵分析	(18)
11.1 概述	(18)
11.2 矩阵位移法的概念及连续梁的计算	(19)
11.3 平面杆件结构的单元分析	(27)
11.4 坐标变换	(31)
11.5 节点、单元及未知位移分量编号	(33)
11.6 平面杆件结构的整体分析	(38)
11.7 非节点荷载的处理	(46)
11.8 平面杆件结构的解题步骤及算例	(52)
习题	(60)
附录 I 连续梁及平面刚架静力分析的源程序	(63)
I.1 连续梁静力分析程序	(63)
I.2 平面刚架静力分析程序	(70)
附录 II 用高斯消去法解线性方程组	(93)
第 12 章 结构的动力计算	(100)
12.1 概述	(100)
12.2 单自由度体系的运动方程	(104)
12.3 单自由度体系的自由振动	(107)
12.4 单自由度体系在简谐荷载作用下的动力计算	(112)
12.5 单自由度体系在任意荷载作用下的动力计算	(119)
12.6 多自由度体系的自由振动	(124)
12.7 多自由度体系主振型的正交性	(136)
12.8 多自由度体系的强迫振动 简谐荷载作用下的直接解法	(139)
12.9 多自由度体系的强迫振动 振型叠加法	(143)
12.10 考虑阻尼时多自由度体系的强迫振动	(148)
* 12.11 无限自由度体系的自由振动	(153)
12.12 能量法计算自振频率	(156)
习题	(161)

第 13 章 梁和刚架的极限荷载	(167)
13.1 概述	(167)
13.2 极限弯矩及塑性铰、破坏机构	(168)
13.3 确定极限荷载的几个定理	(171)
13.4 超静定梁的极限荷载	(173)
* 13.5 用机构法求简单刚架的极限荷载	(179)
* 13.6 用增量变刚度法求刚架的极限荷载	(181)
习题	(184)
第 14 章 结构的稳定计算	(187)
14.1 稳定概念及两类稳定问题	(187)
14.2 确定临界荷载的静力准则 静力法	(190)
14.3 等截面压杆的稳定 应用位移和内力的初参数表达式建立稳定方程	(195)
14.4 确定临界荷载的能量准则 能量法	(200)
14.5 剪力对临界荷载的影响	(206)
14.6 组合压杆的稳定	(208)
* 14.7 用矩阵位移法计算刚架的临界荷载	(213)
习题	(222)
主要参考书目	(224)

* 第 10 章 最小势能原理

10.1 概 述

在结构静力分析中,可以直接应用平衡条件、几何变形条件和物理条件求解结构的内力和位移。这就是一般的静力法。如果将平衡条件或几何变形条件用相应的能量原理代替,以此为基础建立的解法叫做能量法。在静力法中有两个基本方法,即位移法(以结构的位移为基本未知量)和力法(以某些多余未知力为基本未知量)。与此对应,在能量原理中也有两种基本原理:与位移法对应的是最小势能原理;与力法对应的是最小余能原理。

由第 5 章中曾讨论过的虚功原理已经看到,由虚位移原理建立的虚功方程表现的是结构的平衡关系;由虚力原理建立的虚功方程表现的是结构的几何关系。需要指出,在第 5 章中,对这两个原理只讨论了为解决当时面临问题所需要的一个方面,并未给出全面的、完整的论述。实际上,在对虚位移原理和虚力原理进行完整论述的基础上,最小势能原理可以由虚位移原理导出;最小余能原理可以由虚力原理导出。

本章将重点讨论应用较广的最小势能原理。首先对虚位移原理做进一步的讨论,在此基础上导出最小势能原理。

最小势能原理可以用来求精确解,但更重要的是用来求复杂问题的近似解。为此,本章将介绍一种以最小势能原理为基础的近似解法,即里兹法。

10.2 关于虚位移原理的进一步讨论

在 5.2 节中曾讨论过虚功原理,对于某一杆件虚功原理可表述为:杆件 AB 处于静力可能的力状态,又假设有一个与之无关的几何可能的位移状态,则前者的外力由于后者的位移所做的虚外功 T 等于前者的切割面内力由于后者的变形所做的虚变形功 V 。对于悬臂杆(图 10-1 (a), (b)),由式 (5-9) 及式 (5-10) 所示的表达式,即为

$$\begin{aligned} N_B^* u(l) + Q_B^* v(l) + M_B^* \theta(l) - N(0) u_A^* - Q(0) v_A^* - M(0) \theta_A^* \\ + \int_A^B (pu + qv + m\theta) ds = \int_A^B (N\epsilon + Q\gamma + M\kappa) ds \end{aligned} \quad (5-11)$$

上式即为变形杆件的虚功方程。上式外力虚功项中包括了固定端处反力的虚功值,这是因为设想固定端已被切开,位移状态中该端有杆端位移,该处内力便可视做外力而做虚功。当几何可能的位移状态系虚设时,则虚功原理称为虚位移原理。

这里需要说明,在 5.2 节中我们并未对虚位移原理进行完整的论述。在那里,只是从必要条件一个方面来介绍这个原理的。实际上,虚位移原理可以这样表述:变形杆件处于平衡状态的充分和必要条件是对于任意的、微小的、几何可能的虚位移,外力所做的总虚功(T)等于切割面内力所做的虚变形功(V)。对于左端($S=0$)存在固定约束、该处虚位移

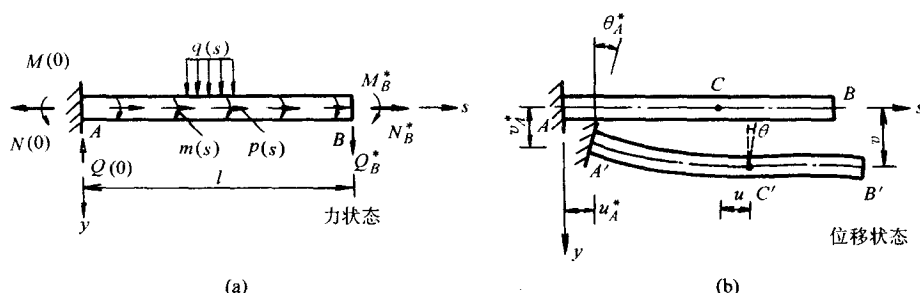


图 10-1 悬臂杆虚功原理的两种状态

为零的悬臂杆，用式子表达就是如下的虚位移方程 ($T = V$)

$$\begin{aligned} N_B^* u(l) + Q_B^* v(l) + M_B^* \theta(l) + \int_A^B (pu + qv + m\theta) ds \\ = \int_A^B (N\epsilon + Q\gamma + M\kappa) ds \end{aligned} \quad (10-1)$$

上式中 N_B^* 、 Q_B^* 、 M_B^* 表示自由端处的已知外力， $u(l)$ 、 $v(l)$ 、 $\theta(l)$ 表示与之相应的杆端虚位移。

在虚位移原理中，所谓几何可能的虚位移是指虚位移满足连续条件和实际体系给定的位移约束条件（图 10-2）。也就是说虚位移不应使杆件内部出现裂口或搭接现象，在位移给定的杆端虚位移应等于零。需要指出，此处所说的虚位移与第 5 章虚功原理中所说的位移状态不完全相同。此处并未解除实际体系的位移边界约束，虚位移只能在这种边界约束所允许的范围内给出，即在位

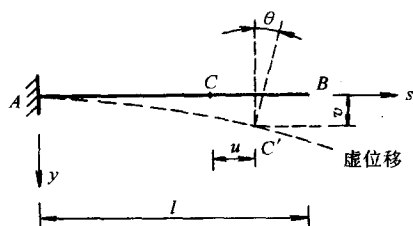


图 10-2 左端固定约束、悬臂杆的虚位移图

移给定的边界处无虚位移，因此杆端反力不做虚功，故方程 (10-1) 中不含固定端处反力的虚功项。而在第 5 章虚功原理中的位移状态则是解除了实际体系的位移边界约束，固定端反力可以经历位移状态给定的支座位移而做虚功。

虚位移原理应从必要性和充分性两个方面加以论证。以下先做一些推导，然后给以证明。

先从杆端虚位移未受限制的情况出发，我们利用第 5 章中的式 (5-9) 和式 (5-12)，该二式相减得

$$\begin{aligned} T - V = [N_B^* u(l) + Q_B^* v(l) + M_B^* \theta(l) - N(0) u_A^* - Q(0) v_A^* \\ - M(0) \theta_A^*] + \int_A^B (pu + qv + m\theta) ds - [u(l) N(l) \\ + v(l) Q(l) + \theta(l) M(l) - u(0) N(0) - v(0) Q(0) \\ - \theta(0) M(0)] + \int_A^B \left[u \frac{dN}{ds} + v \frac{dQ}{ds} + \theta \left(\frac{dM}{ds} + Q \right) \right] ds \end{aligned}$$

此处 T 为外力虚功式 (5-9)， V 为虚变形功式 (5-10)；再考虑到杆左端实为固定约束，固定端 (A) 处虚位移等于零，于是上式又可整理成 (此时 T 中不含 A 端反力的虚功项)

$$T = \int_A^B \left(\frac{dN}{ds} + p \right) u ds + \int_A^B \left(\frac{dQ}{ds} + q \right) v ds + \int_A^B \left(\frac{dM}{ds} + Q + m \right) \theta ds$$

$$+ [N_B^* - N(l)]u(l) + [Q_B^* - Q(l)]v(l) + [M_B^* - M(l)]\theta(l) + V \quad (a)$$

现在来证明虚位移原理。先证明必要条件：若杆件 AB 处于平衡状态，则式 (a) 等号右边前三项被积式小括弧中的式子都为零，中间三项方括弧内的式子也为零，于是得到 $T = V$ 。这就证明了原理的必要性。再证充分条件：若式 (10-1) 成立，即 $T = V$ ，则与式 (a) 比较必有

$$\begin{aligned} & \int_A^B \left(\frac{dN}{ds} + p \right) u ds + \int_A^B \left(\frac{dQ}{ds} + q \right) v ds + \int_A^B \left(\frac{dM}{ds} + Q + m \right) \theta ds \\ & + [N_B^* - N(l)]u(l) + [Q_B^* - Q(l)]v(l) + [M_B^* - M(l)]\theta(l) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

由于 u 、 v 、 θ 的任意性，故上式中积分号内各个小括弧中的式子以及各个方括弧中的式子必都等于零。这就说明杆件内部平衡条件和力的边界条件都得到满足，亦即杆件处于平衡状态。这就证明了原理的充分性。

以上关于虚位移原理的论证表明：虚位移方程 (10-1) 与体系的全部平衡条件是等价的。因此，人们常常应用虚位移方程来推导或者代替体系的平衡条件，这是虚位移原理的一个重要的应用方面。

上面所论述的虚位移原理，所给的虚位移应是微小的位移。在小挠度理论的范畴内，某种实际位移可以当做一种虚位移，例如在第 5 章中论述功的互等定理时，便是这样做的。除此之外，虚位移也可以是一种无限小的位移。我们用 δu 、 δv 、 $\delta \theta$ 表示这种无限小的虚位移，这时，悬臂杆的虚位移方程就是

$$\begin{aligned} & N_B^* \delta u(l) + Q_B^* \delta v(l) + M_B^* \delta \theta(l) + \int_A^B (p \delta u + q \delta v + m \delta \theta) ds \\ & = \int_A^B (N \delta \epsilon + Q \delta \gamma + M \delta \kappa) ds \end{aligned} \quad (10-2)$$

其中

$$\delta \epsilon = \frac{d \delta u}{ds} \quad \delta \gamma = \frac{d \delta v}{ds} - \delta \theta \quad \delta \kappa = \frac{d \delta \theta}{ds} \quad (10-3)$$

乃是由于虚位移 δu 、 δv 、 $\delta \theta$ 引起的虚变形。

这里“ δ ”是变分符号。 δu 、 δv 和 $\delta \theta$ 分别代表 u 、 v 和 θ 的变分。注意函数的变分与函数的微分有原则区别，如函数 $v(s)$ 的微分 dv 乃是由于自变量 s 的改变引起的；而函数的变分 $\delta v(s)$ 并非因 s 变化，而是由函数（曲线）自身的微小改变所形成。这里需要指出，式 (10-3) 中函数的变分与微分的次序可以互换。如图 10-3 所示，若令

$$\delta v(s) = \bar{v}(s) - v(s)$$

等号两边求导数则有

$$[\delta v(s)]' = \bar{v}'(s) - v'(s) = \delta[v'(s)]$$

这表明函数变分的导数等于函数导数的变分。就是说变分与微分的次序可以互换。因此，式 (10-3) 也可以写成

$$\delta \epsilon = \delta \frac{du}{ds} \quad \delta \gamma = \delta \left(\frac{dv}{ds} - \theta \right) \quad \delta \kappa = \delta \frac{d\theta}{ds}$$

例 10-1 图 10-4 所示简支梁在均布荷载 q 作用下产生挠曲，试应用虚位移原理确定挠曲线 $v(x)$ 。

【解】 将 $v(x)$ 展为正弦级数

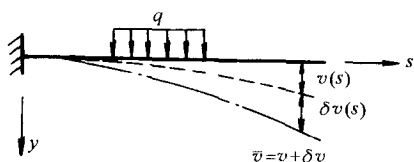


图 10-3 函数 $v(s)$ 的变分

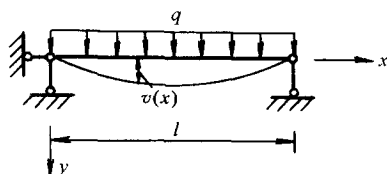


图 10-4 例 10-1 图

$$v(x) = \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (a)$$

上列位移函数满足简支端位移为零的位移边界条件: $v(0) = v(l) = 0$; 因结构与荷载都对称, 位移必也对称, 故级数中未包括反映反对称位移的偶数项。式 (a) 两边取变分, 得梁的虚位移为

$$\delta v = \sum_{m=1,3,5,\dots} \delta A_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{l}$$

设梁为细长杆, 因之可忽略剪切变形的影响, 写出梁的虚位移方程为

$$\int_0^l q \delta v dx = \int_0^l M \delta \kappa dx \quad (b)$$

注意到这时 $\delta \kappa dx = d\delta\theta = d\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)$ 以及 $M = EIv''(x)$, 代入上式得

$$\int_0^l q \delta v dx = \int_0^l EIv''(x) \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} dx$$

将式(a)和式(b)代入上式, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^l q \sum_{m=1,3,5,\dots} \delta A_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \int_0^l EI \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \sum_{m=1,3,5,\dots} \delta A_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

对上式逐项作积分运算, 注意到三角函数的正交关系

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{l}{2} & (m = n) \end{cases}$$

再经整理可得到

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{2ql}{m\pi} \delta A_m = \sum_{m=1,3,5,\dots} EIA_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} \delta A_m$$

或

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \left(\frac{2ql}{m\pi} - \frac{EI m^4 \pi^4}{2l^3} A_m \right) \delta A_m = 0$$

上式来自虚位移方程, 对于任意的 δA_m ($m = 1, 3, 5, \dots$) 都应成立, 因此得到

$$\frac{2ql}{m\pi} - \frac{EI m^4 \pi^4}{2l^3} A_m = 0$$

所以

$$A_m = \frac{1}{m^5 \pi^5} \cdot \frac{4ql^4}{EI}$$

代入式 (a) 即可求得 $v(x)$ 。

位移函数的级数表达式 (a) 是连续的, 又满足了梁端的位移边界条件, 如能再满足梁的全部平衡条件 (包括梁的平衡微分方程的边界条件), 则必是梁的真实解答。而式 (a) 中的待定系数 A_m ($m=1, 3, 5, \dots$) 乃是应用虚位移原理通过虚功方程来确定的。由于虚位移原理与梁的全部平衡条件等价, 所以这样求得的 $v(x)$ 即为所求问题的真实解答。

例 10-2 图 10-5 (a) 所示为刚架在水平荷载 P 作用下的弯矩图, 试用虚位移原理检验此弯矩图是否满足平衡条件。

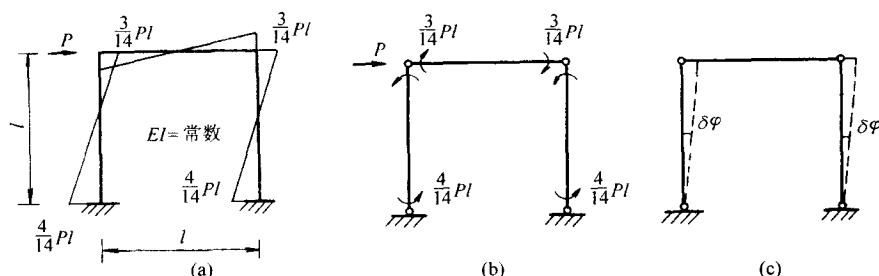


图 10-5 例 10-2 图

【解】 此例只需检验各节点处的杆端弯矩与外荷载是否满足整体平衡条件。为此, 解除各节点处限制相对转动的约束, 使之变为铰结, 施加上相应的杆端弯矩如图 10-5 (b) 所示。这时结构变为机构, 问题变为检验作用于机构上的杆端弯矩与外荷载是否保持平衡。令机构有一虚位移 $\delta\varphi$ (图 10-5 (c)), 则 (图 10-5 (b)) 的内、外力在此虚位移上做功。注意到这是一种刚体虚位移, 虚变形功等于零, 虚位移方程为

$$P \cdot \delta\varphi \cdot l - \frac{3}{14}Pl \cdot \delta\varphi - \frac{3}{14}Pl \cdot \delta\varphi - \frac{4}{14}Pl \cdot \delta\varphi - \frac{4}{14}Pl \cdot \delta\varphi = 0$$

或 $(Pl - Pl)\delta\varphi = 0$

由此式可见, 对任意的 $\delta\varphi$ 虚位移方程恒成立, 根据虚位移原理知体系处于平衡, 因此图 10-5 (a) 所示的弯矩图满足平衡条件。

思考题

- (1) 请指出所谓“任意的、微小的、几何可能的虚位移”有哪些具体含义?
- (2) 在论证虚位移原理时何处用到了虚位移是微小的、任意的、几何可能的这些条件?
- (3) 为什么说虚位移方程等价于体系的全部平衡条件?

10.3 线性变形体系的变形势能

体系在外力作用下将产生变形和内力, 这时, 外力做功。对线性变形体系来说, 当外力全部卸除后, 体系即完全恢复原状。而且, 如果我们不考虑在这一过程中任何能量损耗, 则外力所做的功将全部以变形能的形式储存于体系内, 我们称之为变形势能。设 T 表示外力功, U 表示体系的变形势能, 即应有

$$T = U \quad (10-4)$$

下面我们推导变形势能的计算公式。一般说来，体系的杆件中各个截面的内力是不同的，需要截取一个微段（如图 10-6 (a)）加以研究。当作用于体系上的静力荷载达到最后值时，微段上的弯矩、轴力和剪力也将分别由零增加到最后值 M 、 N 和 Q 。根据式 (10-4)，微段的变形势能 dU 满足关系式

$$dT = dU \quad (a)$$

式中 dT 是微段上的外力功，而 M 、 N 、 Q 是作用在微段上的外力，相应的变形分别为弯曲变形 $d\theta$ 、轴向变形 du 和剪切变形 γds （图 10-6 (b)、(c)、(d)）略去高价微量 (qds 、 dN 、 dQ 及 dM 所做功)，得微段上的外力功为

$$dT = \frac{1}{2} M d\theta + \frac{1}{2} N du + \frac{1}{2} Q \gamma ds \quad (b)$$

由材料力学公式，有

$$\left. \begin{aligned} M &= EI\kappa = EI \frac{d\theta}{ds} \\ N &= EA\epsilon = EA \frac{du}{ds} \\ Q &= \frac{GA}{k} \gamma = \frac{GA}{k} \left(\frac{dv}{ds} - \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

所以

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds, \quad du = \frac{N}{EA} ds, \quad \gamma ds = \frac{kQ}{GA} ds \quad (d)$$

将式 (d) 代入式 (b)，根据式 (a) 的关系，得微段上的变形势能

$$dU = dT = \frac{M^2}{2EI} ds + \frac{N^2}{2EA} ds + \frac{kQ^2}{2GA} ds \quad (e)$$

沿杆长积分，得整根杆的变形势能；再将所有各杆的变形势能相加，即得整个体系变形势能的计算公式，即

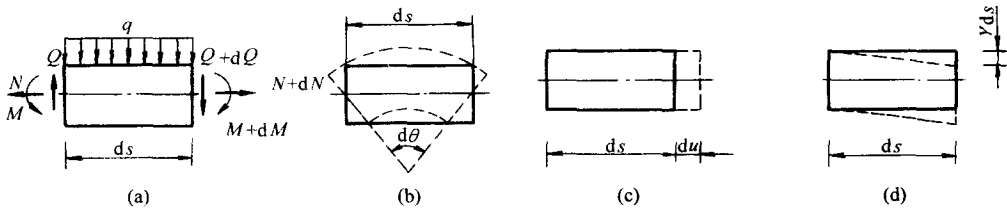


图 10-6 杆件微段的受力及变形

$$U = \Sigma \int \frac{M^2}{2EI} ds + \Sigma \int \frac{N^2}{2EA} ds + \Sigma \int \frac{kQ^2}{2GA} ds \quad (10-5)$$

将式 (c) 的关系代入，可得用位移表达变形势能的表达式

$$U = \Sigma \int \frac{1}{2} EI [\theta' (s)]^2 ds + \Sigma \int \frac{1}{2} EA [u' (s)]^2 ds + \Sigma \int \frac{GA}{2k} [v' (s) - \theta (s)]^2 ds \quad (10-6)$$

对于线性变形体系，变形势能有以下的性质。

- (1) 变形势能总是正的，因为在它的计算公式中， M 、 N 和 Q 都是二次方。
- (2) 计算变形势能时不能应用叠加原理，即体系在几个力同时作用下的变形势能，不能

由这几个力分别作用下的变形势能相叠加而得到（以单个杆同时受轴力 N_1 和 N_2 的作用为例），即

$$\frac{l}{2EA}(N_1 + N_2)^2 \neq \frac{l}{2EA}(N_1^2 + N_2^2)$$

(3) 变形势能是状态函数。从式 (10-6) 可以看出，只要体系的最后变形状态确定，变形势能即惟一地确定。也就是说，如果有几组荷载作用于同一体系，不论其作用的先后次序如何，只要最后的变形形态相同，则在体系内储存的变形势能也都相同。

思考题

在推导变形势能表达式的过程中何时应用了线性变形体系的前提条件？

10.4 线性变形体系的最小势能原理

首先给出线性变形体系总势能 Π 的定义，即

$$\Pi = U + W \quad (10-7)$$

式中 U 为体系的变形势能。对于单个杆件，变形势能为

$$U = \frac{1}{2} \int EI [\theta'(s)]^2 ds + \frac{1}{2} \int EA [u'(s)]^2 ds + \frac{1}{2} \int \frac{GA}{k} [v'(s) - \theta(s)]^2 ds \quad (10-8)$$

W 为体系的外力势能。对于 A 端固定的悬臂杆，外力势能是

$$W = - \int_A^B (pu + qv + m\theta) ds - [N_B^* u(l) + Q_B^* v(l) + M_B^* \theta(l)] \quad (10-9)$$

式中 p 、 q 分别为轴向和横向分布荷载； m 为分布外力偶； N_B^* 、 Q_B^* 、 M_B^* 为自由端处的外力（见图 10-1 (a)）。

当结构和荷载给定后， Π 只与位移分量 u 、 v 、 θ 有关，这里 u 、 v 、 θ 是 s 的函数。而 Π 以积分的形式又表现为 u 、 v 、 θ 的函数，在变分法中称为泛函。泛函 Π 的自变函数是 u 、 v 、 θ ，这里的 u 、 v 、 θ 是连续函数，并满足体系给定的位移边界条件。满足这些条件的位移称为容许位移，也就是几何可能的位移。容许位移可有无限多种，它们满足全部变形谐调条件，但不一定满足平衡条件。容许位移中只有同时（通过几何和物理关系）满足全部平衡条件者才是所给力学问题的真实解答。

以下将证明， u 、 v 、 θ 的真实解答将使 Π 取极值。从变分法中知道，泛函 Π 取极值的必要条件是它的一阶变分等于零，即 $\delta\Pi = 0$ 。为了阐述和证明最小势能原理，需要对总势能进行变分运算。注意到泛函 Π 的自变函数是 u 、 v 、 θ ，在变分运算中荷载看做不变量。

将式 (10-8) 和式 (10-9) 代入式 (10-7)，然后等号两边取变分，有

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta U + \delta W \\ &= \int_A^B EI [\theta'(s)] \delta[\theta'(s)] ds + \int_A^B EA [u'(s)] \delta[u'(s)] ds \\ &\quad + \int_A^B \frac{GA}{k} [v'(s) - \theta(s)] \delta[v'(s) - \theta(s)] ds \\ &\quad - \int_A^B (p\delta u + q\delta v + m\delta\theta) ds - [N_B^* \delta u(l) + Q_B^* \delta v(l) + M_B^* \delta\theta(l)] \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\delta\Pi = & \int_A^B M\delta\kappa ds + \int_A^B N\delta\epsilon ds + \int_A^B Q\delta\gamma ds \\ & - \int_A^B (p\delta u + q\delta v + m\delta\theta) ds - [N_B^* \delta u(l) + Q_B^* \delta v(l) + M_B^* \delta\theta(l)]\end{aligned}$$

将上式与虚位移方程 (10-2) 对比, 可见 $\delta\Pi = 0$ 与虚位移方程等价, 这就说明了变分方程

$$\delta\Pi = 0 \quad (10-10)$$

与体系的全部平衡条件是等价的。

由于 Π 的自变函数 u 、 v 、 θ 都是预先满足变形谐调条件的容许位移, 若再使方程 (10-10) 成立, 则也满足了全部平衡条件, 因此必是真实解答。反过来, 如果 u 、 v 、 θ 是真实解答, 则必满足所有平衡条件, 从而必使 $\delta\Pi = 0$ 。已知方程 (10-10) 是泛函 Π 取极值的必要条件, 如果考虑二阶变分就可以证明 (证明下面给出), 对于稳定的平衡状态, 这个极值是最小值。于是得出结论: 在几何可能的一切容许位移中, 真实的位移使总势能取最小值; 反之, 使总势能取最小值者必也是真实的位移。这就是最小势能原理。

现在来证明真实的位移使总势能取最小值。设 u 、 v 、 θ 和 ϵ 、 γ 、 κ 为真实解答的位移和变形, 相应的总势能为

$$\begin{aligned}\Pi = & \frac{1}{2} \int EI\kappa^2 ds + \frac{1}{2} \int EA\epsilon^2 ds + \frac{1}{2} \int \frac{GA}{k} \gamma^2 ds \\ & - \int (pu + qv + m\theta) ds - [N_B^* u(l) + Q_B^* v(l) + M_B^* \theta(l)]\end{aligned} \quad (a)$$

其次, 考虑在真实位移附近的任一几何可能的位移状态, 其位移和变形分别是 $u + \delta u$ 、 $v + \delta v$ 、 $\theta + \delta\theta$ 和 $\epsilon + \delta\epsilon$ 、 $\gamma + \delta\gamma$ 、 $\kappa + \delta\kappa$, 相应的总势能为

$$\begin{aligned}\bar{\Pi} = & \frac{1}{2} \int EI(\kappa + \delta\kappa)^2 ds + \frac{1}{2} \int EA(\epsilon + \delta\epsilon)^2 ds + \frac{1}{2} \int \frac{GA}{k} (\gamma + \delta\gamma)^2 ds \\ & - \int [p(u + \delta u) + q(v + \delta v) + m(\theta + \delta\theta)] ds \\ & - N_B^* [u(l) + \delta u(l)] - Q_B^* [v(l) + \delta v(l)] - M_B^* [\theta(l) + \delta\theta(l)]\end{aligned}$$

展开之, 经整理可得

$$\bar{\Pi} = \Pi + \delta\Pi + \delta^2\Pi$$

其中 Π 如式 (a) 所示, 即

$$\begin{aligned}\delta\Pi = & \int EI\kappa\delta\kappa ds + \int EA\epsilon\delta\epsilon ds + \int \frac{GA}{k} \gamma\delta\gamma ds \\ & - \int (p\delta u + q\delta v + m\delta\theta) ds - N_B^* \delta u(l) - Q_B^* \delta v(l) - M_B^* \delta\theta(l) \\ \delta^2\Pi = & \frac{1}{2} \int EI(\delta\kappa)^2 ds + \frac{1}{2} \int EA(\delta\epsilon)^2 ds + \frac{1}{2} \int \frac{GA}{k} (\delta\gamma)^2 ds\end{aligned}$$

二者分别称为总势能的一阶变分和二阶变分。由方程 (10-10) 知 $\delta\Pi = 0$, 又因 $\delta\kappa$ 、 $\delta\epsilon$ 和 $\delta\gamma$ 不会都恒为零, 所以 $\delta^2\Pi > 0$ 。于是得到

$$\bar{\Pi} > \Pi$$

上式表明: 在体系处于稳定平衡的情况下, 与各种几何可能的位移相比, 真实的位移使总势能取最小值。证毕。

最小势能原理有广泛的应用。在许多场合下我们可以用总势能的极值条件来导出或者代替体系的平衡方程和力的边界条件。在近似解法中, 最小势能原理是里兹法的理论基础。

以上是以单根杆件为例介绍了最小势能原理。实际上这一原理对于任何线性变形体系都是适用的, 只不过不同的结构形式其变形势能和外力势能的具体表达式有所不同而已。

例 10-3 试应用最小势能原理导出图 10-7 所示简支梁的平衡微分方程和力的边界条件。设 q 为横向均布荷载, M_B^* 为梁右端外力偶, 忽略剪切变形的影响。

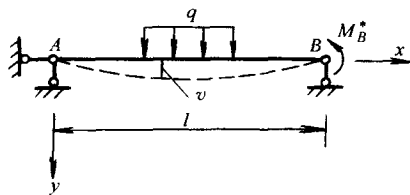


图 10-7 例 10-3 图

【解】 不考虑剪切变形时, $\gamma = v' - \theta = 0$, 故有 $v' = \theta$, 又 $\kappa = \theta' = v''$, 这样可消去一个未知函数 θ 。总势能的表达式为

$$\Pi = U + W = \frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 dx - \int_0^l q v dx - [-M_B^* v'(l)] \quad (a)$$

上式最后一项第一个负号是 Π 的定义式中原有的; 第二个负号是因所设外力偶 M_B^* 的转向与 $v'(l)$ 的正方向相反, 故二者乘积取负号。

列出总势能的极值条件

$$\delta \Pi = \int_0^l EI \kappa \delta \kappa dx - \int_0^l q \delta v dx + M_B^* \delta [v'(l)] = 0 \quad (b)$$

对等号右端第一项作分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^l EI \kappa \delta \kappa dx &= \int_0^l M \delta \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_0^l M \frac{d}{dx} \left[\delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \right] dx \\ &= \left[M \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \right]_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) dx \\ &= \left[M \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) \right]_0^l - \left[\frac{dM}{dx} \delta v \right]_0^l + \int_0^l \frac{d^2 M}{dx^2} \delta v dx \end{aligned} \quad (c)$$

将式(c)代回式(b), 注意到 $x=0$ 和 $x=l$ 处 $\delta v=0$, 经整理得

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 M}{dx^2} - q \right) \delta v dx - M(0) \delta [v'(0)] + [M(l) + M_B^*] \delta [v'(l)] = 0 \quad (d)$$

由于 δv 的任意性, 于是得到

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - q = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (e)$$

$$M(0) = 0 \quad (x=0) \quad (f)$$

$$M(l) = -M_B^* \quad (x=l) \quad (g)$$

式(e)即为梁的平衡微分方程; 式(f)和式(g)分别是梁左端和右端的边界条件。

如果体系的总势能可以用有限个表征位移的未知参数来描述, 则总势能便由容许位移的泛函转化为这些位移参数的函数。这时, 泛函的极值条件(变分方程)便转化为函数的极值条件, 从而形成以上述位移参数为未知量的代数方程, 位移参数即可由这种代数方程解出。例如, 我们可以像本书上册第7章所介绍的位移法那样, 以结构的节点角位移和线位移作为

基本未知量，由总势能的极值条件可以得到求解这种未知量的基本方程。以下用几个算例说明具体做法。

例 10-4 求图 10-8 所示结构在荷载 P 作用下各杆的轴力。设各杆 $EA = \text{常数}$ ，斜杆长为 l 。

【解】 以节点 A 的竖向位移 Δ_A 为基本未知量， AB 杆和 AD 杆的伸长为 $\Delta = \Delta_A \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Delta_A$ ， AC 杆的伸长即为 Δ_A 。各杆的轴力为

$$\left. \begin{aligned} N_{AB} &= N_{AD} = \frac{EA\Delta}{l} = \frac{EA\Delta_A}{l\sqrt{2}} \\ N_{AC} &= \frac{\sqrt{2}EA}{l}\Delta_A \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

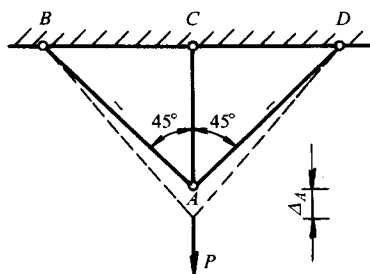


图 10-8 例 10-4 图

各杆的变形势能在数值上应等于杆轴力与杆伸长量乘积之半，故结构的变形势能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} N_{AB}\Delta + \frac{1}{2} N_{AD}\Delta + \frac{1}{2} N_{AC}\Delta_A \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \frac{EA\Delta_A}{l\sqrt{2}} \cdot \frac{\Delta_A}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}EA}{l} \Delta_A \cdot \Delta_A \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad U = \frac{(1+\sqrt{2})EA}{2l} \Delta_A^2 \quad (b)$$

外力势能

$$W = -P\Delta_A \quad (c)$$

总势能为

$$\Pi = U + W = \frac{(1+\sqrt{2})EA}{2l} \Delta_A^2 - P\Delta_A \quad (d)$$

总势能成为位移参数 Δ_A 的函数，其极值条件是

$$\frac{d\Pi}{d\Delta_A} = 0 \quad (e)$$

将式(d)代入上式，得

$$\begin{aligned} \frac{(1+\sqrt{2})EA}{l} \Delta_A - P &= 0 \\ \Delta_A &= \frac{Pl}{(1+\sqrt{2})EA} \end{aligned} \quad (f)$$

代入式(a)，得各杆轴力为

$$\left. \begin{aligned} N_{AB} &= N_{AD} = \frac{P}{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}} \\ N_{AC} &= \frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})} P \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

例 10-5 图 10-9 (a) 所示刚架节点 C 处作用一外力偶 M ，节点 B 处作用一水平力 P 。设各杆 $EI = \text{常数}$ ，求节点 C 的转角 φ_C 和横梁 AB 的侧移 Δ ；设 $M = Pl$ ，绘出弯矩图。

【解】 以节点 C 的转角 φ_C 和柱 CD 的侧移 Δ 为基本未知量。按照位移法中转角位移方程写出各杆端弯矩