

Quality Controlling Theory and Applications in
Geodetic Data Processing

大地测量质量控制 理论与应用

——杨元喜研究员论文选集

西安地图出版社

Quality Controlling Theory and Applications in
Geodetic Data Processing

大地测量质量控制 理论与应用

——杨元喜研究员论文选集

西安地图出版社

大地测量控制理论与应用
——杨元喜研究员论文选集
杨元喜 编著

西安地图出版社出版发行

(西安市友谊东路 334 号 邮编 710054)

新华书店经销 陕西文源彩色印刷厂印刷

880×1230 毫米 1/16 开本 21.5 印张 400 千字

2003 年 5 月第 1 版 2003 年 5 月第 1 次印刷

印数:001—200

ISBN 7-80670-411-6/P·9

前 言

大地测量成果的质量取决于函数模型的质量、随机模型的质量以及计算方法的优劣。而现代大地测量函数模型、随机模型的不确定性又比传统大地测量复杂得多。如空间大地测量各类观测信息的传播模型、动态大地测量中运动载体的函数模型等尚不够完善,各类观测信息的误差污染、尤其是动态观测信息的误差污染、模型参数的先验信息的误差污染、相关观测信息的误差污染等,尚无完整的、现成的质量控制理论和方案。针对现代大地测量实践中的各类不确定性,作者做了较系统的研究,许多新发展的理论已成功地用于大地测量生产实践。为便于教学、科研和大地测量生产实践参考,特意从作者已发表的一百四十多篇论文中选择部分有代表性的研究论文汇编成册,若原文以中文发表则编于中文论文集,若原文以英文形式发表则汇于英文论文集。

该论文选集的汇编成册,得到了西安测绘研究所高级工程师尹明、硕士研究生和博士研究生秦显平、徐天河、崔先强,以及工程师周成文等同志的大力的支持和帮助,作者在此向他们表示衷心的感谢。

本文集中的大多数论文都曾得到国家自然科学基金和总参测绘局的支持,总参测绘研究所、信息工程大学测绘学院、中科院武汉测量与地球物理研究所、美国 Texas 大学空间研究中心、德国 Bonn 大学理论大地测量研究所、德国 Potsdam 地学研究中心、荷兰 Delft 大学大地测量计算中心等单位也为作者提供过良好的研究条件。在此,作者向这些单位和其他许多支持和鼓励过作者的朋友们表示衷心的感谢。

由于作者水平所限,论文集中一定存在这样或那样的错误和疏漏,恳请老师和同事们提出批评指正。

杨元喜

2003 年 5 月

目 录

泛函分析在最小二乘平差中的应用	1
整体大地测量中各类观测值的分工与贡献	6
重力位几何参数与点位应变参数之间的关系	13
抗差贝叶斯估计及应用	19
自适应抗差最小二乘估计	27
重力异常的拟合推估迭代解算模型及算法	33
污染分布的逼近及应用	38
重力异常的一种逼近方法	47
论动态自适应滤波	53
大地测量相关观测抗差估计理论	62
拟合推估两步极小解法	71
动态定位有色噪声影响函数	76
卫星精密轨道综合自适应抗差滤波技术	83
参数 M 估计及验后精度综述	92
抗差估计的概念及其任务	99
异常影响诊断与抗差估计	103
等价权原理——参数平差模型的抗差最小二乘解	106
条件平差、混合平差模型的抗差最小二乘解	112
秩亏抗差最小二乘估计原理	116
相关观测抗差最小二乘估计	120
不同坐标系综合变换法	124
卫星动力测地非线性观测方程组的解算设想	132
地壳形变分析模型	140
四维整体大地测量实用模型及观测方程	147
测量平差模型的抗差最小二乘解及影响函数	156
复测水准网拟稳抗差解算模型	164
动态系统的抗差 Kalman 滤波	171
相关观测抗差估计	178

拟合推估抗差化	188
有界影响抗差估计	196
高崩溃污染率和高效抗差估计	205
高崩溃污染率坐标转换法	211
多种抗差滤波模型的理论基础及比较	119
非正态分布情形下的参数验后密度逼近模型及其计算	226
参数最小二乘估计验后置信空间的多种逼近法	230
海平面动态抗差模型及其解	235
多历元大地网联合平差的地壳形变改正问题	240
局部似大地水准面的确定	245
地面网与空间网联解的若干问题	252
双因子方差膨胀抗差估计	258
绝对重力与相对重力混合平差的基准及质量控制	266
全国 GPS 网的抗差平差	273
最小二乘滤波、配置在测量平差中的应用	279
序贯秩亏平差法	288
旋转椭球的第一、第二基本齐式及其应用	296
四维整体大地测量的解算及其协方差函数的确定	300
四维整体大地测量计算程序及主要技术说明	306
地面网与空间网的抗差联解方案	310
重力、水准观测值的非线性联解	319
非线性混合边值问题及其抗差解	326
附录:主要论著目录	334

泛函分析在最小二乘平差中的应用*

杨元喜

【提要】利用泛函分析方法讨论最小二乘平差问题，曾有人作过系统的讨论（P.Meissil (9) H.Moritz (5)）。本文则侧重于用观测值向量空间的直交分解，泛函投影方法，简单直观地推导了在具有核函数的 Hilbert 空间中的间接平差和条件平差公式；从几何上揭示了最小二乘平差；根据核函数的性质自然地引入了带权的内积问题；将核函数定义稍加扩展，得出了协方差传播的内积表示；对于 $Q_{\bar{L}V} = 0, Q_{XV} = 0$ ，以及同一问题的间接平差和条差和条件平差模型方程的系数之积为零（ $BA=0$ ）的问题用泛函分析作了解释。利用这些关系以及投影算子的性质，简化了平差解向量、权倒数及 $V^T PV$ 的表达式的推导过程。

一、投影引理

下面这些引理在文献（1）都有证明。

引理 1 设 H_A 是内积空间 H 的线性子空间（ $H_A \subset H$ ）， $L \in H$ ，如果 $\bar{L}$ 是 L 在 H_A 上的投影，那么

$$\|\bar{L} - L\| = \inf_{L_0 \in H_A} \|L_0 - L\| \quad (1-1)$$

而且 $\bar{L}$ 是 H_A 中使式（1-1）成立的惟一向量。

引理 2 设 H_A 是内积空间 H 的线性子空间， $L \in H$ ， $\bar{L} \in H_A$ ，如果 $\|\bar{L} - L\| = d(L, H_A)$ （其中 d 表示距离），那末 $(\bar{L} - L) \perp H_A$ ，即 $V \perp H_A$ 。

引理 3 （投影定理）设 H_A 是内积空间 H 的线性子空间，那末对任何 $L \in H$ ， L 在 H_A 的投影惟一地存在。即有 $\bar{L} \in H_A$ ， $V \perp H_A$ ，使 $\bar{L} = L + V$ ，而且这种分解是惟一的。

从上述引理可知，最小二乘平差原理 $\|V\|^2 = \min$ 等价于将观测向量空间 L 直交分解成 H_A 、 H_B ，求 L 在 H_B 中的投影 $V \in H_B$ ，使 $\bar{L} = L + V$ 。

二、核函数与方差协方差传播

1. 核函数

为了对用泛函分析推导最小二乘平差有深入的理解，需要建立具有核函数的 Hilbert 空间。

设 H 是函数 Hilbert 空间， $X \in H$ ，则 H 上的线性泛函 $f \rightarrow f(y)$ 对 X 中每一 y 是有界的，

因此，对 X 中每一 y ，存在 H 中一个元素 K_y ，使 $f(y) = (f, K_y)$ 对一切 f 成立。由

$K(x, y) = K_y(x)$ 定义的 X 上的函数 K 叫做 H 的核函数或再生核。

* 原文发表于《测绘学报》1986，15（2）：110~114

核函数 K 具有三个性质 (5) (6):

- 1° $K(x, y) \in H$, 对于 $x \in H$ 且 y 是固定的
- 2° $f(y) = (f(x), K(x, y))$, 对于所有的 $f \in H$
- 3° $K(x, y) = K(y, x)$, $\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j) \geq 0$

性质 1° 说明 $K(x, y)$ 是 X 的函数, 它属于 Hilbert 空间 H 。性质 2° 说明 f 和 K 的内积还原成 f 。

性质 3° 表明核函数的对称正定性。

2. 泛函、对偶空间、泛函的内积

再内积空间 H 上线性泛函的全体所组成的空间称为 H 的对偶空间, 记为 H' 。

为了方便, 我们将在有限内积空间讨论泛函内积。这里设 H 是一个 n 维内积空间, 选择一个基 $e_1, e_2, \dots, e_n$, 把向量 $X, Y \in H$ 表示为

$$\begin{cases} X = \sum_i \xi_i e_i \\ Y = \sum_j \eta_j e_j \end{cases} \quad (2-1)$$

其中 ξ_i, η_j 分别为 X, Y 的坐标。将内积 (X, Y) 展开, 并记 $p = (p_{ij})$, 则 X, Y 的内积为

$$(X, Y) = X^T P Y \quad (2-2)$$

可以看出, 在 H 中选择一个基后, 内积可有一个对称矩阵来表示。如果这个矩阵是正定的, 则反之也正确, 即任何一个对称正定矩阵都可以定义一个内积。这是方差传播定律的基础。

显然非等精度最小二乘平差原理 $V^T P V = \min$ 可表示成权阵 P 定义的内积, 即 $(V, V)_P = \|V\|_{P^2} = \min$ 。若有泛函

$$\begin{cases} \lambda(X) = \sum_i \lambda_i \xi_i = \lambda^T X \\ \mu(Y) = \sum_j \mu_j \eta_j = \mu^T Y \end{cases} \quad (2-3)$$

式中 $\lambda, \mu \in H'$ 。又以 l_1, l_2 分别代表泛函 λ, μ , 并取 $l_1 = P^{-1} \lambda$, $l_2 = P^{-1} \mu$, 显然有

$$(l_1, X) = (X, l_1) = X^T P l_1 = X^T P P^{-1} \lambda = X^T \lambda = \lambda^T X$$

同理 $(l_2, Y) = \mu^T Y$

这里给我们以启示, 即泛函 λ, μ 可以用相应的代表 l_1, l_2 的内积表示。如果定义泛函 λ, μ 的内积为下列形式的内积

$$(\lambda, \mu)' = (l_1, l_2) = l_1^T P l_2 = \lambda^T P^{-1} \mu \quad (2-4)$$

式中 $(\lambda, \mu)'$ 表示 λ, μ 在其对偶空间 H' 中的内积, 则这个内积可用矩阵 P^{-1} 表示。

3. 作为泛函内积的协方差传播

在具核内积空间 H 上, 取协方差阵 $\Sigma_{xx} = \text{cov}(X, X) = K(X, X)$ 为核函数 (或称核矩阵),

$\Sigma_{xx} = (\sigma_{x_i x_j})$ 其逆核为权矩阵 $P = \sigma_0^2 \Sigma_{xx}^{-1}$, 其中 σ_0^2 为任意的常数因子。

设有泛函

$$\lambda = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = A X \in H'$$

$$\text{由协方差传播定律知, } \Sigma_{\lambda\lambda} = \sigma_\lambda^2 = (\lambda, \lambda)' = A \Sigma_{xx} A^T \quad (2-5)$$

若

$$L = A X \quad (2-6)$$

$$\text{则} \quad \Sigma_{LL} = (L, L)' = A \Sigma_{XX} A^T \quad (2-7)$$

以 Σ_{LL} 作为核矩阵满足还原性, 对称正定性。

将核函数的定义稍加扩展, 设

$$\begin{cases} L_1 = AX \\ L_2 = BX \end{cases} \quad (2-8)$$

定义

$$(L_1, L_2)' = \text{cov}(L_1, L_2) = A(X, X)' B^T = A \Sigma_{XX} B^T \quad (2-9)$$

若

$$\begin{cases} L_1 = AX \\ L_2 = BY \end{cases} \quad (2-10)$$

则

$$(L_1, L_2)' = \text{cov}(L_1, L_2) = A(X, Y)' B^T = A \Sigma_{XY} B^T \quad (2-11)$$

式 (2-5)、(2-7)、(2-9)、(2-11) 为方差协方差传播定律。

三、最小二乘平差及其解向量

引理 4 若空间 $W_1, W_2, \dots, W_s$ 是 n 维线性空间 W 的子空间, 那末 $W = \sum_{i=1}^s W_i$ 为直接和的充要条

件是 W 的维数等于 W_i 的维数之和^[8]。

设观测向量空间 H 为 n 维有界线性空间, 考虑到间接平差和条件平差的模型方程分别为

$$\underset{n1}{L} = \underset{n1}{V} = \underset{nt}{A} \underset{r1}{X} \quad (3-1)$$

$$\underset{m}{B} \underset{n1}{V} = \underset{r1}{W} = 0 \quad (3-2)$$

式中 $L+V=\bar{L}$, $W=BL$ 。

众所周知, 就特定的平差问题而言, 独立未知参数的个数 t 和独立条件方程式的个数 r 是固定的, 且满足 $n=t+r$, 由引理 4 即得出结论: 若将观测值向量空间 H (维数为 n) 分解成两个子空间 H_A 、 H_B , 且 H_A 由 AX 组成, H_B 由 BV 组成 (其维数分别为 t 、 r), 则 H_A 、 H_B 为 H 的两个直交补子空间 ($H_A \perp H_B$)。 H_A 、 H_B 直接意味着

$$\underset{m}{B} \underset{nt}{A} = 0 \quad \text{或} \quad \underset{nt}{A}^T \underset{r1}{B}^T = 0 \quad (3-3)$$

这是因为 A 的列是 H_A 中的一个基, 而 B 的行是 H_B 的一个基。

由上述讨论可知, $H = H_A + H_B$ 是直和, 故有 $L \in H, \bar{L} \in H_A, -V \in H_B$ (这里负号是考虑到测量平差中的习惯用法), 使 $L = \bar{L} + (-V)$ 为直和。将式 (3-2) 改写成

$$BP^{-1}PV = W$$

又知 H_B 是以 B 的行即 B^T 的列为一个基, 若令

$$PV = B^T K$$

K 为 H_B 中的特定元, 则

$$V = P^{-1}B^TK \quad (3-4)$$

由式 (3-1)、(3-4) 可将 $L = \bar{L} - V$ 写成下列等价形式

$$L = AX - P^{-1}B^TK \quad (3-5)$$

式中 $AX \in H_A, -P^{-1}B^TK \in H_B$ 。用 A^TP 左乘式 (3-5)，并顾及式 (3-3) 得间接平差的方法方程为

$$A^TPL = A^TPAX \quad (3-6)$$

解得

$$X = (A^TPA)^{-1}A^TPL \quad (3-7)$$

$$\bar{L} = AX = A(A^TPA)^{-1}A^TPL = P_A L \quad (3-8)$$

再用 B 左乘式 (3-5)，并顾及式 (3-3) 得条件平差法方程

$$BL = W = -BP^{-1}B^TK \quad (3-9)$$

解得

$$K = -(BP^{-1}B^T)^{-1}W \quad (3-10)$$

$$V = -P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}BL = -P_B L \quad (3-11)$$

其中 $P_A = A(A^TPA)^{-1}A^TP$ 、 $P_B = P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}B$ 分别为 H 到 H_A 、 H_B 上的投影算子 (1)。

P_A 、 P_B 有下列性质：

- (1) P_A 、 P_B 均为有界算子
- (2) $P_A^2 = P_A$ 、 $P_B^2 = P_B$ (幂等性)
- (3) P_A 、 P_B 的范数均为 1
- (4) $P_A + P_B = I$ (单位矩阵)

四、平差后精度估计

1. 权倒数

由述讨论知， $L = AX \perp V$ ， $X \perp V$ ，故有

$$Q_{LV} = 0 \quad (4-1)$$

$$Q_{XV} = 0 \quad (4-2)$$

顾及 $L = \bar{L} - V$ 为直和，则有

$$Q_L = Q_{\bar{L}} + Q_V, Q_{\bar{L}} = Q_L - Q_V \quad (4-3)$$

由式 (4-1)、(4-2) 可见，尽管平差值 $\bar{L}$ 是 V 的函数， V 是 X 和 L 的函数，但 $\bar{L}$ 与 V ， X 与 V 却不相关。这是因为最小二乘平差的实质是将观测值分别投影到两个互补子空间 H_A 、 H_B ，而 $H_A \perp H_B$ ，故其中元必然不相关。

2. V^TPV 的计算式

由上述讨论知， $\|L\|^2 = \|AX\|^2 + \|V\|^2$ ，所以对间接平差而言有

$$V^TPV = \|V\|_P^2 = L^TPL - X^TA^TPAX \quad (4-4)$$

对条件平差，由于

$$(V, V)_P = (V, \bar{L} - L)_P = (V, -L)_P \quad (4-5)$$

$$V^TPV = -V^TPV \quad (4-6)$$

考虑到 $V = P^{-1}B^TK$, 则

$$V^TPV = -K^TW \quad (4-7)$$

式 (4-4)、(4-6) (4-7) 可作为 V^TPV 的检核式或计算式。

五、结 语

(1). 经典最小二乘平差原理, 可从几何意义表示为 Hilbert 空间的投影。这从几何上给最小二乘平差以本质的解释。而且所求 $\bar{L}$ 使 $\bar{L} - L$ 的范数最小, 即 $\bar{L}$ 到 H 的距离最短。

(2). 在具核 Hilbert 空间, 方差阵等价于核矩阵, 从而使相关最小二乘平差建立在具核内积的基础上。将核矩阵的定义稍加扩展, 可将方差协方差传播表示为 H 的对偶空间 H' 中的具核内积。

(3). 利用观测空间的直交分解, 使平差公式的推导大大简化。

(4). 应当指出, 用泛函分析的方法讨论最小二乘平差理论, 与用统计的方法讨论并无本质区别, 只是用泛函分析的方法可以帮助我们更直观、更简单、更清楚地理解最小二乘平差理论。

本文曾得到党诵诗教授的指导和帮助, 在此谨表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- (1) 夏道行等:《实变函数与泛函分析》下册, 人民教育出版社, 1979 年
- (2) 党诵诗: 关于测量平差中的几个问题,《测绘学报》, 第 12 卷第 3 期, 1983 年 8 月
- (3) 党诵诗:《矩阵论及其在测绘中的应用》, 测绘出版社, 1980 年 6 月
- (4) 于宗侑等:《测量平差基础》, 测绘出版社, 1978 年 6 月
- (5) Moritz,H.:《高等物理大地测量学》, 宁津生等译, 测绘出版社, 1934 年
- (6) P. R. 哈尔莫斯: 希尔伯特空间问题集, 林辰译, 上海科学技术出版社, 1984 年
- (7) 蒋尔雄等:《线性代数》, 人民教育出版社, 1978 年
- (8) Mikhail,E. M.: Observations and Least Squares, New York, 1976 年
- (9) Meissil,P.: The Algebraic and Geometric Approach Toward Least Squares Adjustment, 第一机械工业部第三勘测分公司复制, 1982 年 2 月

FUNCTIONAL ANALYSIS AND ITS APPLICATION TO LEAST-SQUARES ADJUSTMENT

Yang Yuanxi

(Zhengzhou Institute of Surveying and Mapping)

Abstract

Some authors have discussed systematically the treatment of least squares adjustment problems by using functional analysis (9) and (5). In this paper, emphasis is placed on the use of orthogonal resolution of observations in vector space and functional projection method, formulas of parameter and condition adjustments in Hilbert space with kernel function are derived in a straight forward way, revealing geometrically the essence of least squares adjustment. As such, the problem of inner product with weight is naturally introduced according to the properties of kernel function. The representation of covariance propagation as inner products is obtained by expanding slightly the definition of kernel function. The facts that $Q_{\bar{L}} = 0$, $Q_{XV} = 0$ and $BA = 0$ (where A and B are design matrices of parameter and condition adjustments respectively) are explicated essentially. By using these relations and the properties of projection operator, Procedures in deriving the expressions for solution vector of adjustment, weight reciprocal and V^TPV are greatly simplified.

整体大地测量中各类观测值的分工与贡献*

杨元喜

【提要】整体大地测量以严格的观念将各类大地测量观测值统一于同一模型。然而，观测值的分工以及观测值对点位几何参数和重力场参数的贡献却是截然不同的。本文先从模型方程出发，分析了各类观测值的分工与贡献。为使结论明细，我们将重力向量观测值、重力位差观测值分成与大地点重合和不重合两种情况讨论；把它们对几何参数的贡献分成直接贡献（直接对几何参数的系数产生影响）和间接贡献（通过重力参数而对几何参数产生影响）进行讨论；各类观测值对重力场参数的贡献分解成为扰动位的子午分量、卯酉分量和垂直分量的贡献。通过对模型的定量分析与实际计算，提出了一些具有实际意义的观点。

一、引言

整体大地测量是经典大地测量的一次质的飞跃。它以其整体性、严格性、精确性、简捷性的显著特点对大地测量各分支产生了深远的影响，它以其整体性打破了大地测量各分支的界限，以其严格性冲击着经典大地测量的归算理论，以其简捷性动摇了经典重力场计算的积分概念。

我们知道一切大地测量都是在地球重力场中进行的。一般观测都受扰动重力场影响。所以任何大地测量观测值 L_i 均可表示成如下形式^[4]

$$L_i = F(X, W) \quad (1)$$

式中 X 为点位几何参数， W 为地球重力位。由于观测方程是非线性的，必须将其线性化。取 X 和 W 的近似值 X^0 和 U ，即

$$X = X^0 + \delta X \quad (2)$$

$$W = U + T \quad (3)$$

U 一般取其正常位，或由卫星测量获得的低阶调和展开式， T 为扰动位。并假定 δX 和 T 很小，则可利用级数展开取至一次项得

$$V = A\delta X + L(T) + l \quad (4)$$

其中 V 为观测值改正数， $A = \frac{\partial F}{\partial X}(X^0, U)$ ， $l = F(X^0, U) - L$ ， $L(T)$ 为扰动位泛函。

然而，模型的统一掩盖不了各类观测值的分工。已有不少学者在这方面作过理论研究^{〔1〕、〔2〕、〔3〕、〔6〕}。Ashkenazi 等人曾经指出^{〔2〕}，纯几何平差（不考虑扰动重力场的影响）与整体大地测量平差的几何参数一致。他们的结论来自两个试验网的计算，并未得到理论上的证明。Kelm 讨论过水平网、高程网和重力网观测对点位水平参数、垂直参数、重力场参数以及基准参数的敏感度问题^{〔6〕}，但结论较粗略，同时还缺少理论证明与数值验证。本文在已有研究成果的基础上，侧重于整体大地测量中各类观测值的详细分工与贡献，尤其将观测值对重力场参数的贡献，分解成对扰动位的子午分量 T_ϕ 、卯酉分量 T_λ 和垂直分量 T_r 的贡献，并以定量分析和实例计算为依据，使结论更加清晰。

* 原文发表于《测绘学报》1989，18（3）：232~238

计算中为避免协方差函数的确定,将扰动位展开成多项式,从理论上讲,如果拟合推估中协方差函数足够的话,则用拟合推估与用本文的多项拟合将得到相同的结果。

二、观测方程及观测值的分工与贡献的简析

估值精度与观测方程有关。观测方程的系数直接决定未知量估值的精度^[7],一般而言,观测方程的系数绝对值越大,其观测值对未知量的贡献也大。令一点未知参数向量为 $X = [\delta X_1 \ \delta X_2 \ \delta X_3 \ T_\varphi \ T_\lambda \ T_r]^T$, 现以第十六届 IUGG 大会推荐的正常椭球参数进行估算,在我国中纬度地区 ($\varphi = 37^\circ$), 可算出各观测方程的系数量级。

1. 重力向量观测值

重力向量观测值均为一点泛函。在椭球级近似下,观测方程为

$$\begin{bmatrix} V_\varphi \\ V_\lambda \\ V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{M} & 0 & -k_1 \\ 0 & -\frac{1}{N \cos \varphi} & 0 \\ -k_1 & 0 & -\delta\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & -\sin \varphi \cdot \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \delta X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_\varphi(T) \\ L_\lambda(T) \\ L_g(T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_\varphi \\ l_\lambda \\ l_g \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 λ 、 φ 为天文经纬度; γ 为测站点之正常重力; M 为子午圈曲率半径, N 为卯首圈曲率半径; k_1 为垂直在子午方向的曲率; $\delta\gamma$ 为正常重力垂直梯度; $L_\varphi(T)$ 、 $L_\lambda(T)$ 、 $L_g(T)$ 分别为 φ 、 λ 、 g 之扰动位泛函, l_φ 、 l_λ 、 l_g 为自由项。

Hein 给出了各扰动位泛函表达式 (4)。在椭球级近似下 $L_\varphi(T)$ 、 $L_\lambda(T)$ 、 $L_g(T)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} L_\varphi(T) &= -\frac{\rho''}{\gamma M} T_\varphi \\ L_\lambda(T) &= -\frac{\rho''}{\gamma N \cos^2 \varphi} T_\lambda \\ L_g(T) &= -T_r \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由式 (5)、(6) 算得 φ 、 λ 、 g 之观测方程系数见表 1。

暂不顾及权, 只由表 1 中的系数分析, 可以看出:

(1) 若 φ 、 λ 、 g 为大地点上的观测值, 则它们对点位几何参数和局部重力场参数都有贡献。但由于重力向量观测值的几何参数系数与方向和天顶距观测方程相应系数比, 一般小近 10^3 倍, 组成法方程后小近 10^6 倍, 故这部分贡献一般受到抑制。

(2) 若 φ 、 λ 、 g 与大地点不重合 (暂称孤点), 则由于缺少必要的几何位置信息, 观测方程列秩亏。必须令几何参数的系数为零, 即平差后这些点的几何参数不得改正数。所以这类天文、重力观测值对几何参数没有直接贡献。

φ 、 λ 、 g 观测方程系数表 表 1

参数 测值	δX_1	δX_2	δX_3	T_φ	T_λ	T_r
φ	$-0.0195'' \cdot \cos L$	$-0.0195'' \cdot \sin L$	$0.0259''$	$-3.3'' \times 10^{-8}$	0	0
λ	$-0.0404'' \cdot \sin L$	$-0.0404'' \cdot \cos L$	0	0	$-5.17'' \times 10^{-8}$	0
g	$0.2457 \cdot \cos L$	$0.2457 \cdot \sin L$	0.1863	0	0	-1

(3) 无论天文点、重力点与大地点重合与否, φ 、 λ 、 g 对局部重力场参数都有贡献。

(4) 天文纬度只对 T_φ 有贡献, 天文经度只对 T_λ 有贡献, 重力对 T_r 有贡献。故单纯增加重力观测值无法代替天文观测, 它们各有分工。但重力观测与其他和垂线有关的观测值(如方位角、天顶距离)相结合, 有可能代替天文观测。

(5) 天文经纬度对几何参数的间接贡献比直接贡献大得多。 φ 、 λ 通过 T_φ 、 T_λ 影响观测值的方向, 从而影响几何参数。这种贡献大于 φ 、 λ 观测方程系数对几何参数的影响。但重力观测值对几何参数几乎无间接贡献。

2. 空间距离、方位角、天顶距对扰动位的贡献

空间距离 S 、方位角 A (或水平方向) 以及天顶距 Z 对点位几何参数的贡献不言而喻。这里仅讨论它们对局部重力场参数的贡献。 S 、 A 、 Z 观测方程中的扰动位泛函 $L_s(T)$ 、 $L_A(T)$ 、 $L_Z(T)$ 分别为 (5)

$$\left. \begin{aligned} L_s(T) &= 0 \\ L_A(T) &= -\rho''(\sin A \operatorname{ctg} Z / \gamma M) T_\varphi - \rho''[(\sin B + \operatorname{ctg} Z \cos B \cos A) / \gamma N \cos^2 B] T_\lambda \\ L_Z(T) &= \rho''(\cos A / \gamma M) T_\varphi + \rho''(\sin A / \gamma N \cos B) T_\lambda \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其系数见表 2。

 S 、 A 、 Z 观测方程中的扰动位分量系数表 表 2

参数 测值	T_φ	T_λ	T_r
S	0	0	0
A	$-3.31 \times 10^{-8} \sin A \cdot \operatorname{ctg} Z$	$(-3.31 + 4.13 \times 10^{-8} \cos A \operatorname{ctg} Z) \times 10^{-8}$	0
Z	$3.31 \times 10^{-8} \cos A$	$4.13 \times 10^{-8} \sin A$	0

考虑到 Z 一般近于 90° , $|\operatorname{ctg} Z| < 1$, 则可看出:

- (1) 空间距离对扰动位无任何贡献。
- (2) 方位角、天顶距对扰动位水平分量有贡献, 对垂直分量无贡献。
- (3) Z 对 T_φ 的贡献一般大于 A 对 T_φ 的贡献, A 对 T_λ 的贡献一般大于 Z 对 T_λ 的贡献。
- (4) A 对 T_λ 的贡献一般大于对 T_φ 的贡献; Z 对 T_λ 、 T_φ 的贡献相当。
- (5) A 、 Z 对 T_φ 、 T_λ 的贡献远小于 φ 对 T_φ 及 λ 对 T_λ 的贡献。

显然, 从理论上讲, 整体大地测量中可由方位角、天顶距和重力观测值确定重力向量, 但是由于 T_φ 、 T_λ 的系数太小, 加之 A 和 Z 的观测精度一般远低于 φ 、 λ 的精度, 所以由此组成的法方程近于秩亏, 很难求得 φ 和 λ 的精确解。

3. 重力位差的贡献

重力位差为两点泛函, 其 k 、 i 两点间的观测方程为 (5)

$$V_{\Delta w} = [w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6][\delta X_{k1} \delta X_{k2} \delta X_{k3} \delta XX_{i1} \delta XX_{i2} \delta XX_{i3}] + L_{\Delta w}(T) + l_{\Delta w} \quad (8)$$

$$\begin{cases} w_1 = -\gamma_k \cos B_k \cos L_k \\ w_2 = -\gamma_k \cos B_k \sin L_k \\ w_3 = -\gamma_k \sin B_k \\ w_4 = -\gamma_i \cos B_i \cos L_i \\ w_5 = -\gamma_i \cos B_i \sin L_i \\ w_6 = -\gamma_i \sin B_i \end{cases} \quad (9)$$

$$L_{\Delta w}(T) = T_i - T_k$$

无需计算即看出:

(1) 位差对点位几何参数和局部重力场参数都有贡献。

(2) 在各类参数等精度情况下, 位差对几何参数和重力场参数的贡献位于其他各类观测值之首。这是因为重力位差一般由水准和重力测量算得, 它含有重要的几何信息和重力场信息。

(3) 重力位差的理论表达式为积分式, 实践中一般以有限求和代替积分。又由于水准点以及重力点相距较远, 这种有限求和带来的误差较大。而且重力一毫伽的误差对点位垂直位移的影响约为 3.2 米。所以综合处理时重力位差的权一般较小。

(4) 重力位差观测方程中扰动位泛函直接以两个点的扰动位出现, 所以位差观测值对扰动位的三个分量贡献都大。如果有足够的位差观测值可以适当减少天文观测。

(5) 位差对点位几何参数除有明显的直接贡献外, 还有间接贡献。间接贡献是通过扰动位的水平分量传递的。

(6) 位差观测值之端点与大地点不重合时, 由于只靠 ΔW 的信息不能求得该点坐标改正数, 故此类位差观测值对点位几何参数的贡献无法利用, 除非几何参数具有先验统计性质。

三、实际计算与分析

1. 网的构成

该网由 13 个角点、134 个重力孤点组成如图 1。1~3 点作为固定点。网的重心点参考扰动位为 $T_0 = 0$ 。网中观测情况如下:

(1) 点 1 和点 12 为三等天文点, 中误差为 $m_\phi = \pm 0.41''$, $m_\lambda = \pm 0.32''$ 。

(2) 点 1 到点 11、点 1 到点 13 有重力位差观测值 ΔW_{1-11} 、 ΔW_{1-13} , 中误差为 $m_{\Delta W} = \pm 2.767$ (伽米)。

(3) 方向观测值 51 个, $m_a = \pm 1''$ 。

(4) 正常高高差观测值 37 个, $m_h = \pm 0.2$ 米。

(5) 重力观测值 143 个, 其中 9 个重力点与三角点重合。点密度: 点距 1~3 公里, 线路 4 公里左右。重力值均已改化为波茨坦系统。观测值中误差为 $m_g = \pm 0.83 \text{ mgl}$ 。

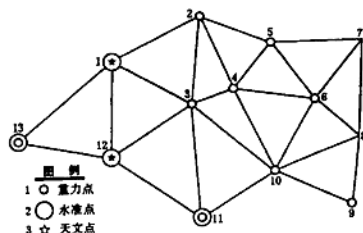


图1 图中省去了134个重力孤点

2. 计算方案

方案I 除两个重力位差观测值外, 其余观测值均参加平差。严格按中误差定权 ($P_i = \frac{1}{m_i^2}$)。

方案II (考察重力 g 的贡献): 去掉134个重力观测值, 保留9个重力观测值以保证有足够的精度计算扰动位的垂直分量 (扰动位表达式取为网之重心点的垂线直角坐标表示的多项式):

$$T = t_0 + t_1x + t_2y + t_3xy + t_4x^2 + t_5y^2 + t_6z + t_7z^2 + t_8z^3 \text{ 其余同方案 I。}$$

方案III (考察天文经纬度的贡献): 在方案I的基础上强行改变天文经纬度的权, 令 $P_\phi = P_\gamma = 1$

方案IV (考察重力位差的贡献): 在方案I的基础上加入点1~11、点1~13的重力位差观测值。

方案V (考察方位角对扰动位一阶梯度的贡献): 在方案I的基础上, 令式(7) $L_A(T)$ 表达式中之 T_ϕ 和 T_λ 的系数为零。

3. 计算结果分析

我们将上述五种方案的计算结果进行了比较分析, 得出如下试算结论 (因篇幅限制略去计算结果):

(1) 重力观测值对几何参数的贡献甚微。方案I与方案II的几何参数基本一致。除上述分析的原因外, 还由于试验网中点与点之间的高差一般在3米以内, 最大高差也不超过90米。

(2) 当减少重力观测值时 (方案II), 扰动位垂直分量的精度明显降低, 而扰动位水平分量不变。

(3) 由分析知天文经纬度对几何参数的直接贡献微弱, 但它们的间接影响较大。方案III与方案I比较, 其几何参数最大差8厘米, 差值较大者全部在天文点和与天文点直接相联系的三角点上。

(4) 天文经纬度对扰动位系数的水平分量反映非常敏感。方案III与方案I比较, 扰动位的水平分量之系数分别差8毫伽和2.5毫伽, 相应的权倒数明显增大, 但扰动位的垂直分量无任何变化。

(5) 计算中发现若再度减小天文经纬度的权或网中无天文经纬度, 则法方程中扰动位表达式中 t_1 、 t_2 的系数几乎为零, 导致法方程严重病态, 很难求得精确解。

(6) 当不顾及方位角中扰动位泛函时 (方案V), 扰动位的水平分量与方案I相差甚大。说明方位角对扰动位水平分量的贡献也很显著。

(7) 重力位差对点位几何参数不仅有直接影响而且有间接影响。对扰动位所有系数都有影响。方案IV与方案I比较, 几何参数和重力场参数都有改变, 所有参数的精度都有明显提高。尤其是11点和13点的几何参数。即位差对相应观测点的几何参数贡献最大。

(8) 当重力位差的权有较大改变时, 其结果面目全非。说明重力位差观测值在整体大地测量中

起着重要作用。

四、结 语

- (1). 整体大地测量中各类观测值对几何参数和重力场参数的贡献不同, 它们各有分工。
- (2). 由于各类观测方程中扰动位泛函具有不同的形式, 有的只与扰动位水平分量有关, 有的只与垂直分量有关。只讨论它们是否对重力场参数敏感与否是不够的。
- (3). 讨论各类观测值的贡献时, 不仅要考虑到其直接贡献, 还要顾其间接贡献 (如天文经纬度和重力位差观测值)。
- (4). 讨论重力向量观测值和重力位差观测值对几何参数的贡献时, 要分观测点与非观测点。它们对观测点几何参数有直接贡献, 对非观测点几何参数无直接贡献。
- (5). 天文经纬度和重力观测值分别对扰动位一阶梯度的三个分量有贡献, 且它们线性无关。故重力观测值一般无法代替天文观测值。
- (6). 重力位差观测值在整体大地测量中起着重要作用。增加位差观测值可以适当减少天文观测。
- (7). 整体大地测量能充分利用重力位差、方位角和天顶距对扰动位水平梯度的明显贡献。这与经典大地测量相比有着明显的优点。

本文是在熊介教授指导下所做硕士论文的一部分。其中某些内容曾请教于周江文教授, 这里一并致谢。

参 考 文 献

- (1) Ashkenazi, V. and Grist, S. N: Inter-comparison of 3-D geodetic network adjustment models, Iag Symp., Geodetic Networks and Computations of the International Association of Geodesy, Munich, 1981
- (2) Ashkenazi, V. and Grist, S. n., 3-D Geodetic Network Adjustment Models: Significance of different approaches, Proceedings of the International Association of Geodesy (IAG) Symposia, Vol. 2, 1983
- (3) Grafarend, E. W. : Estimability of astronomical longitude and latitude only from theodolite observations within three-dimensional networks of terrestrial type, Bull., Geod., V01. 59, pp. 124-138, 1985
- (4) Hein, G. w. : A Contribution to 3D-operational geodesy, Part I: Principle and observational equations of terrestrial type, DGK Reihe, B: Heft Nr. 258/VII, Munchen, 1982
- (5) Hein, G. w.: The local gravity field in the concept of integrated geodesy, International Summer School on Local Gravity Field Approximation, Beijing, China, 1984
- (6) Kelm, R.: Combination of Horizontal, Vertical and Gravity Networks-A Review, IAG Symposium, On geodetic networks and Computations, Munich, 1981
- (7) 周江文: 观测方程与估值精度, 《拟稳平差论文集》, 测绘出版社, 1987年。

THE RESPECTIVE ROLES AND CONTRIBUTIONS