现代数学译丛 6

应用偏微分方程

〔英〕John Ockendon　Sam Howison
Andrew Lacey　Alexander Movchan 著

谭永基　程　晋　蔡志杰 译

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学译丛 6

应用偏微分方程

〔英〕John Ockendon　Sam Howison　Andrew Lacey　ALexander Movchan 著
谭永基　程　晋　蔡志杰 译

科学出版社
北　京

图字: 01-2006-2626 号

内 容 简 介

本书原著作者 John Ockendon 是英国牛津大学博士, 英国皇家学会 fellow, 是国际著名的"Study Group"讨论会的创始人之一. 他是著名的偏微分方程专家, 在自由边值问题、工业问题的偏微分方程模型等方面做出过重要的贡献.

本书提供了来自工业、科技和其他现实世界中的大量偏微分方程模型, 并紧密结合这些模型系统地介绍了偏微分方程的基本理论和方法. 书中包含了偏微分方程最新的研究成果, 特别是关于自由边值问题和非线性偏微分方程等内容十分新颖. 本书主要内容包括: 一阶标量拟线性方程; 一阶拟线性方程组; 二阶标量方程简介; 双曲型方程; 椭圆型方程; 抛物型方程; 自由边值问题; 非拟线性方程和其他课题.

本书适合作为数学专业研究生教材, 也可作为数学专业高年级本科生的选修课程教材. 由于它的内容结合实际, 也可供其他相关专业的研究生和科技人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

应用偏微分方程/(英)奥克顿(Ockendon, J.)等著; 谭永基, 程晋, 蔡志杰译. —北京: 科学出版社, 2008
(现代数学译丛; 6/李大潜主编)
ISBN 978-7-03-021945-9

I. 应… II. ① 奥… ② 谭… ③ 程… ④ 蔡… III. 偏微分方程 IV. O175. 2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 068007 号

责任编辑: 王丽平 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张: 27 1/2
印数: 1—3 000 字数: 558 000

定价: 88. 00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新蕾〉)

第二版序

本书的修订曾给作者带来快乐和痛苦. 快乐来自有机会添加新的材料, 几乎所有添加的新材料都是用来使原有的内容更加统一, 结合得更紧密. 它们使读者对偏微分方程及其在现实世界中的应用间的令人惊奇的相互作用的概貌有一个很好的了解. 我们一直坚持的不能动摇的原则是: 偏微分方程式提供的信息内涵惊人地丰富, 许多偏微分方程的基本简单结构使得掌握它的人能够对他们周围的几乎任何连续过程建立定量模型.

修订的痛苦来自意识到在写第一版时由于内容的过分扩张影响了某些地方论述的准确性. 然而, 我们已经尽可能小心谨慎地作了补救. 在完成这一任务时, 我们得到了我们的同事和合作者的巨大帮助, 他们提供了有关的新材料和有益的建议. 我们也对 Alison Jones 和牛津大学出版社的同事们在本书出版的最后阶段中给予的大量帮助表示衷心感谢.

牛津: J.R.O.
S.D.H.
爱丁堡: A.A.L.
利物浦: A.B.M.
2003 年 1 月

第一版序

在 20 世纪 60 年代, Alan Tayler、Leslie Fox 和同事们在牛津大学发起了 "Study Group" 讨论会, 学术界的数学家和工业界的研究人员一起研究重要的实际问题. 不久他们就向世界表明, 数学能为许多不仅是雇用了数学家的行业研究提供无可估量的洞察力.

这一信息是 Alan 的书《应用力学中的数学方法》[43] 的主题, 书中包含许多数学建模和应用分析如何发挥作用的例子. 该书揭示了偏微分方程模型无处不在, 但是它没有从应用远景的角度对这些方程的理论作出综合的叙述. 因此, 20 世纪 80 年代, 我们策划出版一本作为补充的著作, 最初它是以非正式的讲义出现的.

此后发生了许多变化. Alan 的疾病导致作者的两次变化: 首先, Andrew Lacey 和 Sasha Movchan 参与协助, 后来在 1995 年 Alan 不幸去世之后, Sam Howison 也介入了. 此外, 在保持本书约为研究生一年级水平的同时, 本书也吸收了过去十年中许多新出现的实例和理论.

只有现在我们才能够报答 Alan Tayler 和过去十年中支持我们的人们. 尤其, 我们要感谢 June Tayler、Annabel Ralphs、Natasha Movchan 和 Hilary Ockendon, 感谢她们的宽容, 感谢 Brenda Willoughby 在关键阶段的打字帮助, 感谢牛津大学出版社的 Elizabeth Johnston 和她的同事们.

一本像这样的书若无世界各地同仁的帮助是不可能完成的, 但由于人数众多, 不能一一提及, 然而, 我们要特别感谢提出有益意见的博士后们, 他们通常是数学和现实世界交流中最重要的人物.

牛津: J.R.O.
S.D.H.
爱丁堡: A.A.L.
利物浦: A.B.M.
1999 年 2 月

《现代数学译丛》已出版书目

（按出版时间排序）

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007. 12 〔德〕Andreas Enge 著
吴 铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008. 1 〔美〕Steven Roman 著
邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008. 5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008. 3 〔法〕 J. Frédéric Bonnans
〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008. 6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译
6 应用偏微分方程 2008. 7 〔英〕John Ockendon Sam Howison
Andrew Lacey Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译

目　录

引　言

偏微分方程是数学的中心, 不论是纯粹数学还是应用数学. 它们通常发生于因变量作为以空间和时间为自变量的连续变化的函数的数学模型中. 它们最引人注目的特性是其普适性, 这一特性使我们能够从流体和固体力学、电磁学、概率、金融到众多应用领域中找到本书中的每一个数学概念的来源. 而且这种可应用性随着现代软件适用于这种方程的离散逼近的灵活性和威力的增加日益增长. 同样戏剧性的是所有这些应用领域中方程的产生方式能容易地成为非常重要和深刻的基本数学问题的研究动机, 并且反过来从这些研究的成果中获益.

不管它是否作为一种物理现象的模型, 偏微分方程的分析有许多目的. 其中的一个主要目的是问题的 *适定性*. 我们将在第 2 章给出确切的定义, 但粗略地说, 一个偏微分方程是适定的, 若它有解, 解唯一, 且对输入数据的微小改变的响应也是很小的改变. 前两个准则是一个有意义的物理模型所要求的, 第三个准则是实验观察的基础. 考虑适定性时, 还应记得对有实际意义的问题通常不可能求得显式解, 从而逼近格式, 特别是数值解在应用中就具有特别的重要性. 因此, 适定性问题与偏微分方程科学计算的如下中心问题有紧密联系: 对一个问题给定一定精度的数据, 数值解计算的输出有多少精度? 正因为这个问题对现代定量科学的重要性, 适定性成为本书主要的数学内容.

虽然在实际情况中能推导出适定问题建模可靠的数学模型有很多, 但是那些看起来不可预测的或者对小扰动极端敏感的现象也随处可见. 例如对由 Navier-Stokes 方程刻画的包括湍流在内的流体流动和由固化方程刻画的晶体生长就是这种例子. 所以纯粹数学家和应用数学家必须准备同样面对适定和不适定偏微分方程模型. 对标量常微分方程, 若其阶至少为 3, 混沌就可能发生, 因此, 无限阶常微分方程会出现 “不可预测” 的解是毫不奇怪的. 我们也必须记住, 有些过程, 如 Brown 运动, 在分子尺度上是随机的, 而在长时间和大尺度的情况, 其许多性质可用适定的偏微分方程来建模. 然而, 由于没有篇幅来叙述混沌理论, 我们将无法讨论混沌与不适定性之间的非常有趣的关系, 虽然在第 7 章会涉及几个具有高度不可预测性态的实例. 不过, 我们会看到几个涉及如放热化学反应等虽然模型是适定的但解在发生奇异或 “破裂” 之前只在一个有限的区域中存在的例子.

计算机的出现不仅改变了数学界对偏微分方程的态度, 而且改变了大多数需要定量解的领域中研究人员对偏微分方程的态度. 强大的计算机鼓励人们去攻克迄今未解决的问题或所研究的微分方程的数量和种类以巨大速度增长的新问题. 这一

观察是我们撰写本书的最重要的实际理由, 即蕴含在偏微分方程模型中的"浓缩资料". 令人惊讶的事实是本书中叙述的实际问题, 从油漆流动到固化, 从期权定价到燃烧, 都可用简明符号表示的 *拟线性方程组*

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{b} \tag{0.1}$$

和适当的边界条件来描述, 其中未知量 $\boldsymbol{u}$ 是自变量 $x_i, i=1,\cdots,m$ 的向量函数, 而 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别是依赖于 $\boldsymbol{u}$ 和 x_i 的方阵和向量. $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不依赖于 $\boldsymbol{u}$ 的导数是刻画拟线性特征的关键事实. 正如以后将看到的, 我们甚至能设法使右端 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{0}$.

为了对为什么这种模式是包含一切的有一些认识, 假设我们面临一个相当一般的两个自变量 x, y 的一阶标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

令 $q = \partial u/\partial y$ 及

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix},$$

关于 y 微商后得方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\partial G/\partial q \end{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \begin{pmatrix} G \\ \partial G/\partial y + q\partial G/\partial u \end{pmatrix},$$

这就是拟线性形式[1].

(0.1) 与 $m=1$ 时的常微分方程, 即

$$\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{b}$$

存在戏剧性的差异. 对后者, 只要 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, 这通常是成立的, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 满足适当的 Lipschitz 条件, 就存在唯一的解, 在某点 $x = x_0$ 成立 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$. 然而, 很清楚如果 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y)$ 及

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \boldsymbol{b},$$

除非 $\boldsymbol{A}\partial \boldsymbol{u}_0/\partial x = \boldsymbol{b}$, 无论 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有多好的性态, 我们都不可能得到方程在 $y = y_0$ 处满足 $\boldsymbol{u}(x, y) = \boldsymbol{u}_0(x)$ 的解.

---

1 明眼的读者会注意到第一个矩阵是可逆的 (因为偏微分方程已经"解出了" $\partial u/\partial x$), 而第二个矩阵是不可逆的 (因为求导时信息失去了). 在 2.3 节和 8.2 节中我们会看到许多这样的简单计算. 顺便地, 为简明计, 本书有许多脚注, 别被吓住, 它们大部分包含离开主流的内容.

这一观察是第 1 章讨论的基础, 在该章中考虑 (0.1) 的标量形式, 其包含最高阶导数的项 (称为方程的 *主部*) 为

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

我们用辨识什么边界数据可指望解存在, 什么边界数据解几乎没有希望存在作为开始. 这是遍及后面分别处理如 (0.1) 的方程组或简单二阶标量方程两章的主题. 在第 2 章我们第一次为不适定性担忧, 在该章, 可以看到当 $\boldsymbol{u}$ 在某些初始曲面上给定时, 我们能很好地求得它垂直于该曲面的所有导数, 但是, 用这样的信息我们只能将 $\boldsymbol{u}$ 延拓到离开初始曲面很近的地方. 然而, 在第 3 章和第 5 章会明白, 放松在曲面上给定 $\boldsymbol{u}$ 的所有分量的要求有时可克服此困难.

在第 3 章中, 除了对简单二阶标量方程的性质好的或性质差的解进行分类外, 还为第 4~6 章, 每章都处理在物理、工程、化学、生物以及甚至社会科学和金融等领域中出现的经久不衰的一类二阶标量方程, 提供一个引子. 事实上, 从学生希望得到对归入这些类型方程的解的内在理解的实用观点上看, 这几章提供了本书的核心素材, 或多或少地可独立阅读.

第 7 章或许是本书中最不寻常的一章, 因为它致力于叙述一类除了专业文献外很少被编入教科书中的问题. 然而近来数学模型对解决实际问题, 特别是工业问题的进展已经揭示, 许多偏微分方程模型必须在区域预先并不知道的情形下求解. 这些区域必须作为解的一部分求得; 典型的例子是盒子内冰的融化或水在容器中的泼溅. 我们称这些问题为*自由边值问题*, 在第 7 章我们将努力为这一近年来迅速增长的巨大知识体系提供一个入门.

尽管 (0.1) 有普适性, 但按照完全非线性方程的原来形式来进行研究是有好处的; 在第 8 章我们回复到 $\boldsymbol{A}$ 不仅依赖于 $\boldsymbol{u}$ 而且依赖于 $\partial u_i/\partial x_j$ 的问题. 因此 (0.1) 不再是拟线性的, 这意味着当我们用 $\boldsymbol{u}$ 在某个已知曲面上的值去求其导数值时, 经常会遇到不存在或不唯一性的可能. 我们会发现这会引出许多非拟线性常微分方程理论的有意思的拓广, 如包络解和焦散, 这意味着几何解释比前几章更有价值. 第 9 章是不适合进入前几章的偏微分方程概念的一个概要, 它是可以一直继续下去的.

前 6 章出现的一个关键数学概念是 *线性偏微分* 方程, 即当 (0.1) 中的 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{u}$ 无关, $\boldsymbol{b}$ 只是线性地依赖 $\boldsymbol{u}$ 时, 其解是可以形式地写出的. 这是如下说法的推广, 为解一个线性代数方程组, 我们必须求矩阵的逆; 代替 $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 蕴含 $\boldsymbol{x} = \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, 我们说 $\mathcal{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ 蕴含 $\boldsymbol{u} = \mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{f}$. 我们将看到当 "$\mathcal{L}^{-1}$" 存在时, 可用所谓的 Green 函数或 Riemann 函数为权的加权积分表示. 然而, 求出这种函数甚至它的简单性质经常是困难的, 通常是不可能的. 所以读者不应被其表面概念的简单性所蒙蔽, 认为线性偏微分方程是既容易又乏味的.

在开始之前还有一点需要说明. 为保持本书像现在这样较短的篇幅, 我们排除了几乎所有泛函分析、数值方法的讨论, 特别排除了众多结果都能由其得到的 “摄动理论”, 这是一个遗憾的事实. 事实上, 我们将自己的注意力限于那些可以完全解析证明或获得几何解释的结果. 原则上, 只要将大部分章的篇幅增加一倍, 不难添加由相关摄动理论得到的重要结果; 包括数值方法又会将篇幅增加一倍; 叙述偏微分方程的现代泛函分析理论的主要结果也是如此. 然而, 我们要强调, 许多我们得到的或在本书中引用的结果, 若没有开始时原始的数值方法的实验是不可能得到的.

我们自己强加的限制的另一好处是: 我们只要求读者具有的预备知识为对常微分方程、单复变函数和多元实变量函数微积分的一些了解. 当然我们希望他们知道 Fredholm 二择性定理, 对不熟悉者, 2.2 节给出介绍. 虽然不是作为预备知识要求, 但若读者对本书抱一种宽容的数学态度和从一种更宽广的图景来看本书将是有帮助的: 它既非一本 “定义 – 定理 – 证明” 的书, 也非方法和技巧的大全. 作者的背景是基于物理的应用数学, 出发的例子和理论的解释不可避免地有所倾斜, 但适定性的基本信息对数值分析或概率工作者是一样的. 我们避开某些严格的计算, 将其移入习题意味着我们未在对应用性作妥协的情况下, 使本书保持相对小的篇幅.

为使初次阅读比较容易, 我们对较困难的节和习题用 $*$ 号标记, 时间紧的读者可以自由地略去.

第 9 章后面提供了由几乎完整的有关教科书组成的参考文献.

第 1 章　一阶标量拟线性方程

1.1　引　　言

虽然本章只讨论一类最简单的偏微分方程, 但出现的理论却与很多重要而奇妙的应用情形有关系. 例如, 如图 1.1(a) 所示, 考察沿墙壁流下的油漆薄层. 由于油漆层很薄, 因此速度 $u(x,y,t)$ 近似地只沿墙壁向下一个方向. 油漆的黏性抵抗重力, 从而产生剪应力. 假设剪应力与速度的梯度 $\partial u/\partial y$ 成正比. 由流体微元的力平衡可以得到 $\partial^2 u/\partial y^2$ 是一个与重力成正比的常数 $-c$ (见图 1.1(b)). 假设油漆粘在墙上, 因此在 $y=0$ 上, $u=0$. 又由于在油漆表面 $y=h(x,t)$, 剪应力为 0, 故 $\partial u/\partial y=0$, 于是

$$u=\frac{1}{2}cy(2h-y).$$

最后, 由薄层的质量守恒定律, 油漆厚度的变化速度与沿墙壁向下的油漆流的 x 变化是平衡的. 记流量为 $q(x,t)=\int_0^h u\mathrm{d}y$, 经过一小段时间 δt, 长度为 δx 的小单元

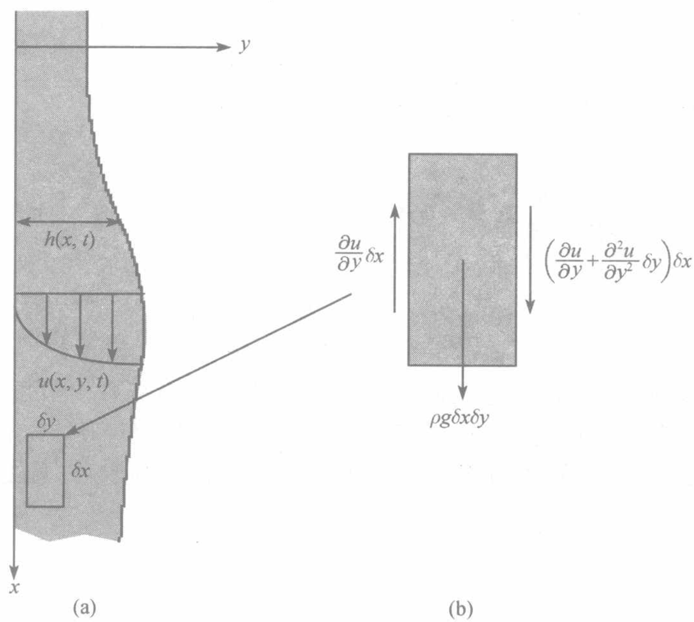

图 1.1　(a) 墙上油漆; (b) 流体微元上的应力