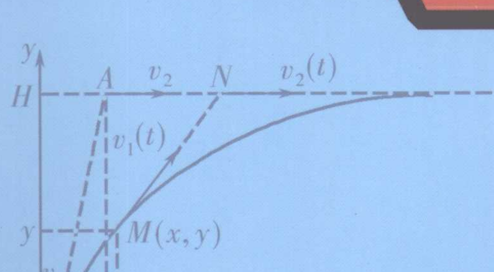
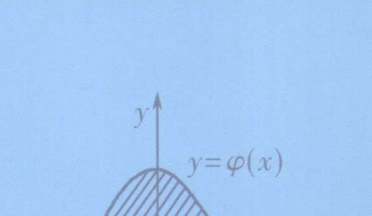
应用高等数学（下）

微分方程与工程数学

主　编　汪国强　彭如海

副主编　钟学军





广东高等教育出版社

应用高等数学（下）
——微分方程与工程数学

主　编　汪国强　彭如海

副主编　钟学军

编　委　晏金华　程忠国　陈传峰
彭　刚　刘广平　顾　洁
刘克勤

广东高等教育出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学（下）：微分方程与工程数学/汪国强，彭如海主编．—广州：广东高等教育出版社，2007.12
ISBN 978－7－5361－3578－9

Ⅰ．应…　Ⅱ．①汪…　②彭…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　②微分－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 188117 号

广东高等教育出版社出版发行
地址：广州市天河区林和西横路
邮编：510500　电话：87551597
广州市新明光印刷有限公司印刷
787 毫米×1 092 毫米　16 开本　11.25 印张　200 千字
2007 年 12 月第 1 版　2007 年 12 月第 1 次印刷
印数：0 001～3 000 册
定价：16.80 元

前　言

本书是高职高专院校理工科类与经管类专业教学用书，它是依照教育部颁发《高职高专教育基础课程教学基本要求》和教高〔2006〕16号文件关于高职高专学生具备“高素质、高技能”的目标，充分保持本书主编汪国强教授主编过的国家“十五”、“十一五”规划教材《高职高专数学教程》等的特色，并结合编者们多年从事高职高专教学的经验编写而成。

本书主要特点如下：

第一，保留了主编国家级规划教材《高职高专数学教程》的“简明、必需、够用”的特色。以培养“高素质、高技能”人才为目标，尽力使教材通俗易懂、信息量大而不繁琐。既考虑到科学性，更注重实用性。注意从实际问题出发进行数学建模与引入基本概念，又注重基本概念与基本定理的几何解释、物理背景的阐述，从而使教学内容形象、直观，便于学生理解记忆，而且有助于推动学生进行研究式、探索式地学习。

第二，本书试图集“教、学、做”于一体以及培养学生利用数学知识、计算机技术与计算机语言综合解决科学与工程实际问题的能力方面，进行有益的尝试。本书并不试图借助计算机去解决或验证用解析方法完全能胜任的数学问题，而是对于那些用解析方法无法求解的更为大量的问题（如超越方程与大型线性方程组的求解，原函数不能用初等函数表示成有限形式的定积分的计算，无法求解析解的常微、偏微分方程，大量观测数据处理用到的插值与曲线拟合技术等）利用数值方法和计算机工具求解。为此，本书以相当篇幅对科学与工程数值计算方法和易于实现其计算目标的 MATLAB 程序都作了介绍。这样才能真正发挥计算机技术在科学与工程计算中的作用。

第三，本书分上、下两册独立出版，意在更能满足不同专业、不同读者的需要。上册为第一篇，系统介绍一元函数微积分并简单介绍二元函数微积分；下册含四篇加两个附录，分别介绍微分方程、线性代数、概率统计、科学与工程数值计算、MATLAB 语言简介等内容。不同专业可以有目的地选讲

其中某些篇章，其余留给学生自学。

第四，为了帮助和指导广大高职高专数学教师进行教学，尤其是多媒体教学，以便对于重要内容可以讲得明白透彻，而对于不同专业来说属于次要的内容可以用较快的速度给予概述性的介绍，从而在有限学时内加大教学信息量，拓宽学生的知识面，本书作者计划为本套教材制作专供教师使用的配套的多媒体教学系统光盘【注：凡每订购 100 本上册或下册教材的学院，将可以索取与之对应的多媒体教学系统光盘一张】。

该多媒体教学系统光盘含以下内容：（1）本教材的电子讲稿 PPT，全面、形象、生动地展示教材的主要内容；（2）每章的教学重点、难点分析与教学设计；（3）每章应安排的 1～3 节习题讨论课的完备的参考教案；（4）每章节安排有适量的交互式练习选择题及其答案；（5）教材中的习题答案与难题的解题提示；（6）题量、难度适中的试卷库。

有了它，教师可以节省大量备课时间，可以提高课堂教学的效率与教学效果，可以更有效地组织课堂教学与讨论，更好地组织“教、学、做”一体化的实践教学工作。

本书和后续的成果将不断充实，使得本系列教材在教学资源多元化、教学方式现代化、知识结构立体化等方面具有特色，将《应用高等数学》建成为含教学内容、教学方法、多媒体教学系统光盘、课堂讨论与习题课方案设计、多媒体学习系统、考核方法与试卷库、工程数值计算方法与数学建模教学等内容的立体化教学包。有了它，再加上我们教师共同努力，就有可能将应用高等数学建设成为精品课程。

本书主编　汪国强教授

彭如海教授

2007 年 5 月

目　录

第二篇　微分方程

第三篇　线性代数

第四篇　概率统计

第五篇　科学与工程数值计算简述

通过比较等式两边同次项系数，可确定 b_0，b_1，…，b_m，并得所求特解

$$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}.$$

综上所述，我们有如下结论：如果$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$有形如

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根，是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为0、1或2.

例 7.31 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解：这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数$f(x)$ 是 $P_m(x)e^{\lambda x}$型［其中 $P_m(x)=3x+1$，$\lambda=0$］.

与所给方程对应的齐次方程为

$$y''-2y'-3y=0,$$

它的特征方程为

$$r^2-2r-3=0.$$

由于这里 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=b_0x+b_1.$$

把它代入所给方程，得

$$-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1,$$

比较两端 x 同次幂的系数，得

$$\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases},\quad -3b_0=3,\quad -2b_0-3b_1=1.$$

由此求得 $b_0=-1$，$b_1=\frac{1}{3}$. 于是求得所给方程的一个特解为

$$y^*=-x+\frac{1}{3}.$$

例 7.32 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解.

解：所给方程是二阶常系数非齐次线性微分方程，且$f(x)$ 是 $P_m(x)e^{\lambda x}$型［其中 $P_m(x)=x$，$\lambda=2$］.

与所给方程对应的齐次方程为

$$y''-5y'+6y=0,$$

它的特征方程为

$$r^2-5r+6=0.$$

特征方程有两个实根 $r_1=2$，$r_2=3$. 于是所给方程对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

由于 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，所以应设方程的特解为

$$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}.$$

把它代入所给方程，得

$$-2b_0x+2b_0-b_1=x.$$

比较两端 x 同次幂的系数，得

$$\begin{cases}-2b_0=1\\2b_0-b_1=0\end{cases},\quad -2b_0=1,\ 2b_0-b_1=0.$$

由此求得 $b_0=-\dfrac{1}{2}$，$b_1=-1$．于是求得所给方程的一个特解为

$$y^*=x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}.$$

从而所给方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}.$$

本例题主要运算过程提示：

$$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}=(b_0x^2+b_1x)e^{2x},$$

$$[(b_0x^2+b_1x)e^{2x}]'=[(2b_0x+b_1)+(b_0x^2+b_1x)\cdot 2]e^{2x},$$

$$[(b_0x^2+b_1x)e^{2x}]''=[2b_0+2(2b_0x+b_1)\cdot 2+(b_0x^2+b_1x)\cdot 2^2]e^{2x}.$$

$$\begin{aligned}y^{*\prime\prime}-5y^{*\prime}+6y^*&=[(b_0x^2+b_1x)e^{2x}]''-5[(b_0x^2+b_1x)e^{2x}]'+6[(b_0x^2+\\&\quad b_1x)e^{2x}]\\&=[2b_0+2(2b_0x+b_1)\cdot 2+(b_0x^2+b_1x)\cdot 2^2]e^{2x}-\\&\quad 5[(2b_0x+b_1)+(b_0x^2+b_1x)\cdot 2]e^{2x}+6(b_0x^2+b_1x)e^{2x}\\&=[2b_0+4(2b_0x+b_1)-5(2b_0x+b_1)]e^{2x}\\&=[-2b_0x+2b_0-b_1]e^{2x}.\end{aligned}$$

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$、$R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{l,\ n\}$，而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1.

例 7.33　求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

解：所给方程是二阶常系数非齐次线性微分方程，且 $f(x)=x\cos 2x$ 属于 $e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型［其中 $\lambda=0$，$\omega=2$，$P_l(x)=x$，$P_n(x)=0$］.

与所给方程对应的齐次方程为

$$y''+y=0,$$

它的特征方程为

$$r^2+1=0.$$

由于这里 $\lambda+\mathrm{i}\omega=2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x.$$

把它代入所给方程，得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x.$$

比较两端同类项的系数，得 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=0$，$c=0$，$d=\dfrac{4}{9}$.

于是求得一个特解为 $y^*=-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x$.

提示：$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$.

$$\begin{aligned}y^{*\prime}&=a\cos 2x-2(ax+b)\sin 2x+c\sin 2x+2(cx+d)\cos 2x,\\&=(2cx+a+2d)\cos 2x+(-2ax-2b+c)\sin 2x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^{*\prime\prime}&=2c\cos 2x-2(2cx+a+2d)\sin 2x-2a\sin 2x+2(-2ax-2b+c)\cos 2x\\&=(-4ax-4b+4c)\cos 2x+(-4cx-4a-4d)\sin 2x.\end{aligned}$$

$$y^{*\prime\prime}+y^*=(-3ax-3b+4c)\cos 2x+(-3cx-4a-3d)\sin 2x.$$

由 $\begin{cases}-3a=1\\-3b+4c=0\\-3c=0\\-4a-3d=0\end{cases}$，得 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=0$，$c=0$，$d=\dfrac{4}{9}$.

习题 7－5

1. 给出以下二阶常系数线性非齐次方程的特解的一种形式：

(1) $y''-4y=2x^2-1$；

(2) $y''+8y'+16y=(x+1)\mathrm{e}^{-4x}$；

(3) $y''-3y'+2y=\sin 2x$；

(4) $y''-4y'+5y=2\mathrm{e}^{2x}\cos x$；

(5) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^{x}(4\cos 2x-\sin 2x)$.

2. 求微分方程 $y''+y'=x^2+1$ 的一个特解.

3. 求微分方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$的通解.

4. 求微分方程 $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的通解.

5. 求微分方程 $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}+\sin x$ 的通解.

7.6 微分方程应用举例

例 7.34 $R-L-C$ 串联电路图如图 7－1，已知交流电源 $E=E_0\sin wt$，求开关 K 合闸之后，电容 C 两端的电压 $U_c(t)$.

解：开关合闸之后，由回路电压定律知：

$$U_R+U_L+U_C=E=E_0\sin wt$$

由 $\begin{cases} U_R=R\cdot i(t) \\ U_L=L\cdot \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \\ U_C=\dfrac{Q}{C} \end{cases}$

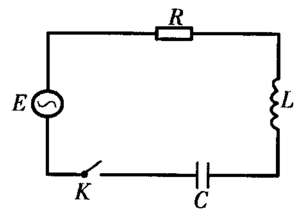


图 7－1

因电流 $i(t)$ 与 Q 之间满足 $i=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=c\cdot\dfrac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}$，于是

当用 $U_C(t)$ 作为函数时，有：

$$U_R=RC\cdot\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t},\ U_L=LC\cdot\frac{\mathrm{d}^2U_c}{\mathrm{d}t^2},\ U_c=U_c,$$

于是 $U_c(t)$ 的微分方程是：

$$RC\cdot\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}+LC\cdot\frac{\mathrm{d}^2U_c}{\mathrm{d}t^2}+U_c=E_0\sin wt,$$

或
$$\frac{\mathrm{d}^2U_c}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}U_c=\frac{E_0}{LC}\sin wt, \tag{7－26}$$

初始条件为 $U_c(0)=0$.
$$\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0, \tag{7－27}$$

对于小阻尼情况［即当 $(\frac{R}{L})^2-\frac{4}{LC}<0$时］

令
$$W_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \tag{7－28}$$

则求得（7－26）的齐次通解为

$$\overline{U}_c=\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}[C_1\cdot\cos W_0t+C_2\sin W_0t]. \tag{7－29}$$

方程（7－26）的非齐次特解可用待定系数法，令

$$U_c^*=A\cos wt+B\sin wt. \tag{7－30}$$

则
$$(U_c^*)'=w[-A\sin wt+B\cos wt],$$
$$(U_c^*)''=-w^2[A\cos wt+B\sin wt],$$

代入方程（7－26）并比较两边 $\cos wt$ 与 $\sin wt$ 的系数，可得关于 A，B 的联

立方程：

$$\begin{cases} -w^2A+\dfrac{R}{L}w\cdot B+\dfrac{1}{LC}\cdot A=0 \\ -w^2B-\dfrac{R}{L}w\cdot A+\dfrac{1}{LC}\cdot B=\dfrac{E_0}{LC} \end{cases}$$

解之可求得

$$A=-\frac{RCW}{RCW^2+(LCW^2-1)^2}E_0$$

$$B=-\frac{(LCW^2-1)}{RCW^2+(LCW^2-1)^2}E_0$$

代入（7－30）式从而 U_c^* 可得，于是

$$\begin{aligned} U_c &= \overline{U}_c+U_c^* \qquad (7-31) \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}(c_1\cos w_0t+c_2\sin w_0t)-\frac{E_0}{RCW^2+(LCW^2-1)^2}\cdot \\ &\quad [RCW\cdot\cos wt+(LCW^2-1)\cdot\sin wt] \end{aligned}$$

由初始条件（7－27）有关于任意常数 c_1，c_2 应满足的关系如下：

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{E_0RCW}{RCW^2+(LCW^2-1)^2}. \\ W_0c_2-\dfrac{R}{2L}c_1-E_0W(LCW^2-1)=0 \end{cases},$$

∴ 求得

$$c_1=\frac{E_0RCW}{RCW^2+(LCW^2-1)^2},$$

$$c_2=\frac{E(W/W_0)}{RCW^2+(LCW^2-1)^2}\left[(LCW^2-1)+\frac{R}{2L}\cdot(RC)\right].$$

于是由（7－31）式表示的 $U_c(t)$ 全部确定了.

【说明】 齐次通解部分 $\overline{U}_c$ 是衰减分量，非齐次特解部分 U_c^* 是稳态分量.

例 7.35 如图 7－2 所示，导弹自动跟踪飞行目标的轨迹问题（或制导鱼雷自动跟踪敌航）. 在 $x-y$ 平面内，设敌机在离地面高为 H 的上空，沿着与地平线 Ox 平行的正方向以速度 v_2 运动，我方制导导弹发射架位于坐标原点，导弹运动速度为 v_1 $(v_1>v_2)$，设时间 $t=0$ 时，敌机位于 $A(x_0, H)$ 点. 此时导弹发射自动跟踪（随时瞄准）敌机，求当 $x_0=0$ 时，导弹运动的轨

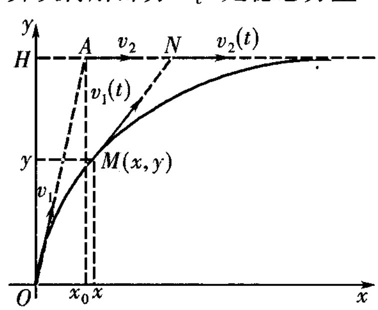


图 7－2

迹方程.

解：设导弹运动轨迹是 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$. 速度为 v_1，始终指向飞行目标，当 $t=0$ 时，

$$x(0)=0,\ y=(0)=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=\frac{OH}{HA}=\frac{H}{x_0};$$

飞行目标轨迹是 $y_2=H$，速度 $v=v_2(v_2<v_1)$

当 $t=0$ 时，$x(0)=x_0$，$y_2(0)=H$，

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=0,\ 且\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=0,$$

设 t 时刻，目标飞到 N 点，导弹沿轨迹线运动到 M 点

由 $AN=(x-x_0)+\dfrac{H-y}{y'}=v_2\cdot t$，

OM 的弧长 $=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=v_1t$，

两式相除，消去 t，得 $\dfrac{1}{v_1}\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{v_2}[(x-x_0)+\dfrac{H-y}{y'}]$.

两边对 x 求导，可得二阶方程如下：

$$\sqrt{1+y'^2}=-\frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{(H-y)\cdot y''}{(y')^2}. \tag{7-32}$$

初始条件：$t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{H}{x_0}$. (7-33)

方程（7-32）是缺 x 的二阶非线性微分方程，可令 $y'(x)=p(y)$，则 $y''(x)=p\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入（7-32），并分离变量可得：$\dfrac{\mathrm{d}p}{p\cdot\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{v_2}{v_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{(y-H)}$.

积分可得

$$\frac{p}{1+\sqrt{1+p^2}}=c_1\cdot(H-y)^{\frac{v_2}{v_1}}, \tag{7-34}$$

由 $t=0$ 时，$y=0$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(0)=\dfrac{H}{x_0}$ 定得常数.

为简单起见，再令 $x_0=0$ 来求导弹运动轨迹. 当 $x_0=0$，则 $c_1=H^{-\frac{v_2}{v_1}}$，于是方程（7-34）变为

$$\frac{p}{1+\sqrt{1+p^2}}=(1-\frac{y}{H})^{\frac{v_2}{v_1}}$$

或

$$p(1-\frac{y}{H})^{-\frac{v_2}{v_1}}-1=\sqrt{1+p^2}.$$

两边平方并化简得：

$$p\left[\left(1-\frac{y}{H}\right)^{-2\frac{v_2}{v_1}}-1\right]=2\left(1-\frac{y}{H}\right)^{-\frac{v_2}{v_1}}.$$

将 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 代入上式，并分离变量可得

$$-H\left[\left(1-\frac{y}{H}\right)^{-\frac{v_2}{v_1}}-\left(1-\frac{y}{H}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\right]\mathrm{d}\left(1-\frac{y}{H}\right)=2\mathrm{d}x,$$

两边分别积分得：

$$\frac{1}{1-\frac{v_2}{v_1}}\left(1-\frac{y}{H}\right)^{1-\frac{v_2}{v_1}}-\frac{1}{1+\frac{v_2}{v_1}}\left(1-\frac{y}{H}\right)^{1+\frac{v_2}{v_1}}=-\frac{2}{H}x+c_2,$$

由初始条件：$x=0$ 时，$y=0$ 定出积分常数

$$c_2=\frac{v_1}{v_1-v_2}-\frac{v_1}{v_1+v_2},$$

于是可最终求得轨迹

$$x=\frac{H}{2}\left\{\frac{v_1}{v_1-v_2}\left[1-\left(1-\frac{y}{H}\right)^{1-\frac{v_2}{v_1}}\right]-\frac{v_1}{v_1+v_2}\left[1-\left(1-\frac{y}{H}\right)^{1+\frac{v_2}{v_1}}\right]\right\}.$$

习题 7－6

1. 一曲线过点（1，2），曲线上任一点 P 处的法线与 x 轴的交点为 Q，而且 y 轴平分线段 PQ，求该曲线方程.

2. 降落伞张开后下降过程中，设所受空气阻力与降落伞的下降速度成正比例，而且伞张开时（$t=0$）的速度为零．求降落伞的下降速度 v 与时间 t 的函数关系.

3. 质量为 m 的质点在力 $F(t)$ 的作用下，沿 x 轴作直线运动，$F(0)=F_0$，且随着时间 t 的增加，力 $F(t)$ 均匀减小．当 $t=T$ 时，$F(T)=0$；起始时质点位于坐标原点，初速度为零，求质点的运动方程.

4. 没有前进速度的潜水艇，在下沉力的作用下向水底下沉，设水的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 K，下沉力包括重力，开始时下沉速度为 0，求速度与时间的函数关系.

5. 在电阻 R、电感 L 与电容 C 串联的电路中，电源电压 $E=5\sin 10t$ 伏，$R=6$ 欧，$L=1$ 亨，$C=0.2$ 法，电容的初始电压为 0，开关闭合时 $t=0$，求开关闭合后回路中的电流.

6. 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是二阶线性非齐次方程的三个解，求此微分方程.

7. 某厂的纯利润 L 对广告费 x 的变化率与常数 A 和 L 之差成正比．$x=0$ 时，$L=L_0$．求纯利润 L 与广告费 x 之间的函数关系.

第三篇　线性代数

摘要：线性代数是高等职业技术学院经济类、管理类、信息类等专业必修的重要的基础课，学好这一门课程不仅对学习后续课程是必不可少的，而且对于掌握现代经济理论，管理科学及计算机技术并应用于实际也是很有必要的．它的任务是通过本课程的学习，使学生获得线性代数最基础的知识以及基本的运算技能．

第八章　行　列　式

8.1　n 阶行列式

n 阶行列式是由 n^2 个元素参加的一种运算结果，一般说来它是一个数或一个函数．其形状是将 n^2 个元素排成 n 行 n 列的方块后，再用两条平行竖线夹住，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记}} D_n$$

当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$（规定）；

当 $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$（规定）；

当 $n=3$ 时，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

注：上式右边再按二阶行列式的算法可算得最后结果．这样下去，n 阶行列式可转化为 $n-1$ 阶行列式来计算，这只是众多算法中的一种．

8.2 几个名词

（1）主对角线：从行列式的左上角到右下角画出一条直线称为主对角线，其上的元素为 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}.

（2）转置行列式：将 n 阶行列式 D_n 的第 i 行换成另一个行列式的第 i 列（$i=1$，2，…，n）后，所得到的行列式叫 D_n 的转置行列式，记为 D_n^T.

如：$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 则 $D^T=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$.

（3）三角行列式：以主对角线为界，左下方元素全部为零的行列式称为上三角行列式，其结果等于主对角线元素的乘积.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注：①上三角行列式的转置行列式称为下三角行列式.

② $\begin{vmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，而 $\begin{vmatrix}0&&&\lambda_1\\&&\begin{matrix}&\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix}&\\&\lambda_{n-1}&&\\\lambda_n&&&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

其中一个大零表示半边全部为0.

（4）行（列）运算的描述法.

r 表示行，c 表示列.

$r_i\leftrightarrow r_j$：表示第 i 行与第 j 行对调，$i=1$，2，…，n.

（k）r_i：表示第 i 行的元素乘以数 k（$k\neq0$），$i=1$，2，…，n.

（k）r_i+r_j：表示第 i 行的 k 倍加到第 j 行，$i=1$，2，…，n.

注：以上 r 改为 c 后表示列的相应运算.

8.3 行列式的八条性质

（1）行列转置，其值不变. 如：$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$.