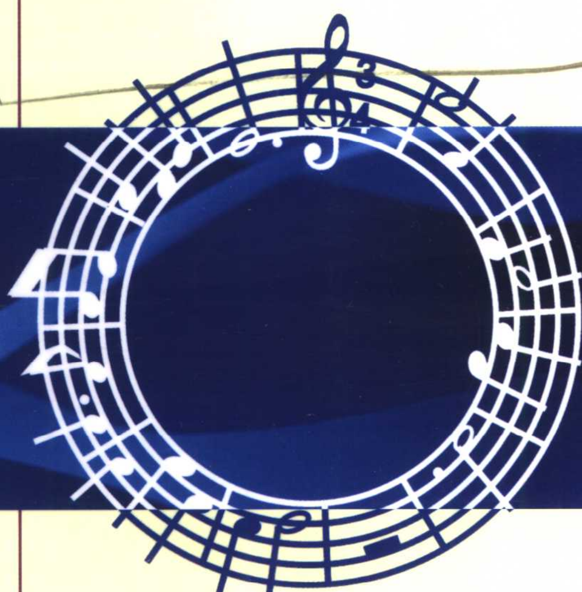
朱梧槚 著

数学与无穷观的逻辑基础

THE LOGICAL FOUNDATION OF MATHEMATICS AND INFINITY

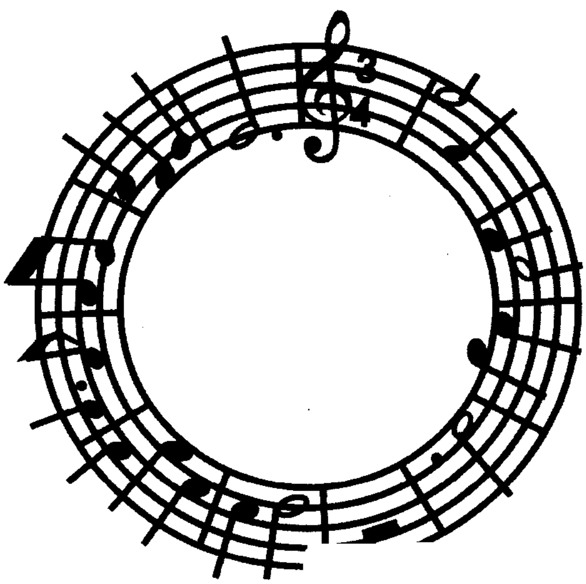


大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

朱梧槚 著

数学与无穷观的逻辑基础

THE LOGICAL FOUNDATION OF MATHEMATICS AND INFINITY



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学与无穷观的逻辑基础/朱梧槚著. —大连:大连理工大学出版社,2008.3
ISBN 978-7-5611-4031-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. 朱… Ⅲ. 数学理论 Ⅳ. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 037157 号

大连理工大学出版社出版
大连市软件园路 80 号　邮政编码 116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连金华光彩色印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm　印张:20.75　字数:318 千字　插页:3
2008 年 3 月第 1 版　2008 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦　梁　锋　责任校对:黎　玉
封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-4031-4　定价:45.00 元

序

本书内容的主题是研讨包括无穷观在内的数学基础问题."数学基础"是20世纪上半叶所诞生的一个数学分支学科,该学科专门研究如何为古今种种数学系统奠定其理论基础的问题,或者说如何为种种数学系统奠定其逻辑基础的问题.20世纪30年代以后的相当一段时期内,形成了数学基础热.随着时间的推移,数学基础热逐渐降温直至几近冰点.然而不要忘记,数学基础这一分支学科自从诞生之日起,就必定成为数学之存在和发展中的一个永恒的研究课题.

在此还应指出,本书内容的核心主题是研讨无穷观问题,而无穷观问题的研究和争论不仅由来久远,而且广泛涉及数学、计算机科学、逻辑学和哲学等众多领域,"有一种观点认为数学是关于无穷的科学,…,事实上,如果没有无穷的概念,我们很难看出数学如何存在."(Eli. Maor著,王前等译,无穷之旅——关于无穷大的文化史,上海教育出版社,2000年,3~4).本人有兴趣于思考无穷观问题已近半个世纪(详见下文),也曾计划要写一本属于数学基础领域中关于无穷观之逻辑基础的书,但该书又必须从数学历史之源头上写起,因而在忙碌不堪的境况下,迟迟不能使计划实现.后来时机终于成熟,也终于有机会(详见后记)能完成计划并出版《数学与无穷观的逻辑基础》一书了.

本书内容分三篇,共7章,外加一个附录,具体章节内容如下:第一篇共1章,讨论几何基础问题.本章首先从基础角度切入,Euclid是历史上第一个提出几何根据的学者,并由此而使得他的事业受到人们的尊敬和高度评价,而且《几何原本》是2000多年来一直被公认为用

严格的逻辑结构陈述学科的典范.其次,由无穷观的角度切入,可谓从 Euclid 的实体公理化到 Hilbert 之形式公理化(直至 Лобачевский 几何系统),无穷概念是深度扎根于欧氏几何与非欧几何系统中的,不仅系统中众多定义和公理的陈述离不开无穷,而且离开无穷连几何基本元素与基本关系都无法认知其直观.第二篇共 4 章,其中第 2、3、4 章讨论精确性经典数学奠基问题.在这里,从微积分开始,到古典集合论的建立和近代公理集合论的诞生,以及数学基础诸流派的形成,可谓无处不在讨论数学系统的逻辑基础,也无处不在涉及无穷观问题.第 5 章讨论模糊数学的奠基问题,其中包括奠基方案之一的中介逻辑演算和中介公理集合论在内,同样可谓处处都有无穷又处处涉及逻辑基础.第三篇共 2 章,其中第 6 章主要讨论各种可数无穷集合与不可数无穷集合概念的相容性问题,而第 7 章主要是讲潜无限数学系统的逻辑基础与集合论基础,同时也论及重建实无限数学系统的初步构想.全书最后还有一个附录,题目是“Hegel 论消极无限与积极无限”.[189]

在这里,请允许我用科普语言,从历史的角度向读者描绘一下本书第三篇内容的渊源和究竟做了一件什么样的事情,借以引起大家的兴趣.

大家知道,19 世纪 Cantor 创建了古典集合论,从而为整个经典数学提供了一个共同的理论基础,尤如为整个数学大厦奠定了墙基.然而,人们很快发现古典集合论中出现了各种自相矛盾的东西,人们称之曰悖论.就像在数学大厦的墙基上发现了这样那样的裂缝.后经许多数学家的共同努力,在改造古典集合论的基础上,建立了近代公理集合论,使得在古典集合论中所出之种种悖论都不在近代公理集合论中出现.这就是说,那些在数学大厦墙基上所出现的裂缝已被全部修补完整.亦即整个数学大厦有了一个无裂缝的相对牢固的墙基,但也未能从理论上证明这个当前无裂缝的墙基今后永远不会出现新的裂缝.这就是说,虽然在近代公理集合论中能避免历史上已经出现的悖论,却又无法证明今后一定不会有新的悖论在其中出现.近代公理集合论有几种版本,其中显得较为自然而被广泛使用的一种版本叫做 ZFC 系统,该系统由 Zermelo 于 1908 年首先提出,后经 Fraenkel 等加以改进而建成.本书第三篇第 6 章中对无穷观问题进行研究的结果,也没有发现数学大厦墙基上有什么新的裂缝出现,但却出乎意料地发现了墙基内部产生了隐性的裂痕.就像一个人,从外表看似乎很健康,没有任何疾病的症状,但在 CT 或核磁共振的检测下,却发现其体内某些部位发生了病变,例如有什么肿瘤之类

的病灶. 那么无穷观问题的研究又是以怎样的方法或手段发现墙基内部存在隐性裂痕的呢? 这种相当于 CT 或核磁共振的检测方法是:兼容两种无穷观的分析方法和潜无限不等于实无限的思想规定. 以上就是第 6 章内容的一个科普性的描绘.

然而数学大厦墙基内部发生了隐性裂痕一事,却迫使我们直接面对且亟待解决两个问题:其一是如何为近现代数学和计算机科学重新选择一个新的没有隐性裂痕的理论基础;其二是在什么解读方式下能全面保存近现代数学与计算机科学理论的所有研究成果. 我们为此而在本书第 7 章中建立了潜无限数学系统,借以直接面对和解决所说的两个亟待解决的问题. 最后还在第 7 章中重新审视了谓词与集合之间的关系,并对今后如何重建新的实无限数学系统提出了初步的构想.

在下文中,将言及本人思考无穷观问题的起因与过程. 1959～1961 年间,我在阅读和学习恩格斯的《反杜林论》,其中有恩格斯语(后知该语已被誉为恩格斯名言):"无限纯粹是由有限组成的,这本身就已经是矛盾,可是事情就是这样."(恩格斯著,中共中央马恩列斯著作编译局译. 反杜林论. 人民出版社,1970 年,第 48 页)①. 本人是为研究数学而学习哲学的,在此学习背景下,我很快就想出了恩格斯名言的一个数学模型,[155]这就是恰由全体自然数构成的集合:

$$\begin{aligned} N &= \{x \mid n(x)\}\,(n(x) =_{\mathrm{df}} \text{“}x\text{ 为自然数”}) \\ &= \lambda : \{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}. \end{aligned}$$

N(或 λ)是一个无穷集合,因而是一个无限性对象,然而这个无限性对象却纯粹是由有限序数(即 $\forall n(n\in N\rightarrow n<\omega)$ 组成的. 从而由恩格斯名言可直接断言 N(或 λ)是一个自相矛盾的错误概念. 然而必须拿出一个严格的逻辑数学证明来,否则将是无稽之谈. 直觉地感到,就 λ 序列而言,着眼于序数,它永远是现在进行式,因而是潜无限;又着眼于基数,它是完成式,必须是实无限. 为之,必须彻底弄明白两种无穷观的区别和联系,并由此而陷入无穷观问题的思考. 将近半个世纪以来,一直断断续续地思考这个问题,一直没有放弃过这类问题的学习和思考,但由于种种历史的和现实的原因,直到 2000 年才下决心专注研究它,并组织"数学系统中的无穷观问题"的研讨班. 先后也有不少同行学者介入到讨论班中来,然而一些探索研究的结果,总是与现代主流思想或经典观念相冲突,再加上各种其他原因,讨论班成员先后自动退出并放弃此项研究,最

① 当年所读版本与笔记均于文革中散失,恩格斯语再从 1970 年新版中找到录下.

后只剩下我的两个博士生坚持与我切磋推敲一些细节，并承担了全部后勤工作.这两个学生是南京大学现代逻辑与逻辑应用研究所的杜国平教授和南京工业大学信息科学与工程学院的宫宁生教授.

其实历史地说，我们也可在先师们的直觉判断中受到启发和教诲.

例如，莱布尼兹(Leibniz)指出过："所有整数的个数这一提法自相矛盾，应该抛弃."[156]396

又例如，自从古典集合论出现悖论以后，豪斯道夫(Hausdorff)就曾不胜感慨和直截了当地提醒大家说："这一悖理的使人不安，倒不在于产生了矛盾，而是我们没有预料到会有矛盾：一切基数所组成的集，显得是如此先验地无可置疑.正如一切自然数所组成的集一样地自然可信，由此就产生了如下的不确定性，即会不会连别的无限集，亦即一切无限集，都是这种带有矛盾的似是而非的非集."[10][157]27

再例如鲁宾逊(Robinson)于1964年在"逻辑学、方法论和科学哲学"国际会议上所作大会报告时所发表的见解："关于数学基础，我的立场(见解)是基于如下的两个主要原则(或观点)：(1)无穷集合按任何词义来说都不存在(无论在实际上或理论上都不存在)，更精确地说，关于无穷集合的任何陈述或大意陈述都在字面上简直是无意义的.(2)但是我们还是应该如通常那样去从事数学活动，就是说当我们做起来的时候，还是应该把无穷集合当作似乎是真实存在的那样."[70]

Mores · Kline说："有一句古老的忠告说：当心您的朋友，您的敌人自会留意.在科学活动中，这句话的意思就是：怀疑明显的东西，这样您将能清除科学真理中那些含混不清的内容.任何能对明显的东西进行挑战的人，必定是十分勇敢的英雄，因为人们会认为这种挑战是疯狂的行为."[156]432

由于自然数集合和无穷集合不仅是十分明显的东西，甚至可以说是众所周知的常识性的东西.但在这里，我们应该坚信莱布尼兹、豪斯道夫和鲁宾逊都是十分勇敢的英雄，而绝不是什么疯子.他们都有很高的数学修养，又都是历史上作出过重大贡献的大师级的数学家和逻辑学家.因此，我们有理由相信他们如上的断言决不是什么不负责任的胡言乱语，而是一种直接领悟事物本质的直觉判断.至于上述鲁宾逊之(2)，可能是暂时性的一种权宜之计.

实际上，徐利治老师是一个无穷迷.早在1948年，他在英国剑桥大学留学期间就开始思考无穷观问题，并由此而促使他去研究连续统假设的不可确定性.所以他思考无穷观问题足有半个多世纪.20世纪50年

代中期，他率先提出不断延伸原理（潜无限）和相对穷竭原理（实无限）[13]；20 世纪 80 年代，他又率先建立双相无限（一种兼容且统一两种无穷）的概念，并用于分析众多常用的数学概念.[158]后来他在无穷观的思考中专注于 Poincaré 注记和连续统结构的研究，所以他在连续统结构方面有其独创和独到的见解.[159]而我在无穷观问题的思考中却自始至终专注于相容性问题的探索.最近 8 年来，我也曾利用一些学术会议或者专程前往某些高校作无穷观问题的研究报告，其间坚信这是不可能事件者有之，不予认同和理解的专家学者亦有之.我为之深受鼓舞.因为这正是一股促使我更为坚定并无所畏惧地继续前进的力量，何况这种情况既属正常，同时也可以理解，甚至这也是一种历史性的规律.然而值得庆幸的是，在无穷观问题的研究进程中，所出现之每一个进展和每一项结果，总是先专程赶赴北京徐利治老师家中讲给徐利治老师听（均有录音与录像的记录）.经他仔细审视后，均能予以理解、认同、支持和鼓励，在此谨向徐利治老师致以衷心感谢.

在这里，我还要向大连理工大学出版社的刘新彦和梁锋表示衷心感谢，他们不仅为了《数学与无穷观的逻辑基础》一书的出版付出了辛勤的劳动和给予了诚挚的帮助，特别是在出版的时间上给我提供了一个非常好的机会，那就是使我有机会以《数学与无穷观的逻辑基础》一书的出版来纪念 Zermelo 所创建之 ZFC 系统诞生 100 周年.当然，我还要感谢我的妻子胡月琴对我事业上的支持和鼓励，婚后 28 年来，她为了家庭一直很辛苦.

最后应指出，由于时间匆促和个人水平有限，疏漏不妥之处在所难免，敬请读者和同行专家批评赐教，不胜感谢，余不一一.

朱梧槚

2008 年 2 月 8 日

于江苏宜兴蓝天小区寓所

目 录

第一篇 几何基础

第二篇 经典与非经典数学奠基问题

第三篇 无穷观问题探索

第一篇

几何基础

第 1 章 几何基础历史概要与公理化方法

1.1 Euclid《几何原本》与第五公设问题

在公元前 7 世纪以前的所谓几何学，只限于一些具体问题的解答，并且是十分粗糙和单凭经验的，直到公元前 7 世纪，才进入希腊几何学家致力于几何的高峰时期. Euclid（约公元前 330～275）是古代最大的几何学家之一. 由于他所编著的《几何原本》不仅集前人之大成，而且用严格的逻辑演绎来系统地陈述这一学科的内容，从而在 Euclid《几何原本》问世以后，就几乎湮没了在此以前任何其他有关几何学的著作.

Euclid 的《几何原本》，原说有 15 卷，后传说最后两卷是公元 2 世纪 Hypsisles 所著，直到近代才有人正式考证出来，第 14 卷是 Hypsisles 所续，第 15 卷又在公元 3 世纪时为其他几何学家所续. 因而今已公认 Euclid《几何原本》只有 13 卷.

15 世纪以后，印刷《几何原本》的版本甚多，现在一般公认 Heiberg 与 Menge 于 1883～1889 年的版本是经过科学的整理而翻印的，认为是标准版本，据此版本，第 1 卷开头是 23 个定义：诸如“点没有部分”、“线有长度没有宽度”、“线的界限是点”…. 在这些定义后是引进公设和公理①，例如，其中第五公设被陈述为：“若两直线与第三条直线相交，其一侧的两个内角之和小于两直角时，则把这两条直线向着该侧充分延长后一定相交”. ②如

① 历史上，人们曾提出区分公设与公理的原则，有一种原则认为：公理是算术与几何学所公用的，公设则仅为几何学所用. 又一种原则认为：公理本身十分自明，公设则不如公理那样自明，但也是不加证明就承认的. 现代公理论者则已概用公理一词来取代公设、公理而不加区分了.

② 在《几何原本》中对于公设或公理的基本地位的区分并没有说明，而且有些公理的归属问题的处理也不明确. 例如，有些版本也把第五公设列为第十一公理，又 Clavins 版本中列为十三公理等等.

此，所列出的一系列定义、公设和公理，都成为往后严格地陈述和论证每一条定理，直至形成一个演绎系统中所必不可少的根据. Euclid算是第一个提出几何根据问题的人，并由此而使得他的事业受到人们的崇高评价. 虽然，用现代数学的严谨观点来看《几何原本》的叙述，其中显然还有许多不严格的地方. 但却不能忘记，《几何原本》曾经是两千多年间一直被公认为用严格的逻辑结构来叙述学科的典范.

对于《几何原本》中的不足之处，大致上可以概括为如下几点：(1)有些定义的写法运用了一些它本身就应该定义的概念.(2)有些定义是多余的.(3)在有些定理的证明过程中，依靠了图形的直观，而这种直观自明性并未列入公理或公设中.

实际上，《几何原本》的某些不足之处，也早为古代学者所觉察. 例如，Archimedes 为了严格陈述关于长度、面积和体积的测量理论，就曾对 Euclid 的公设表作过必要的扩充. 人所共知的 Archimedes 公设(任给 $a>0$ 和 $b>0$，并且 $a<b$，则总有正整数 n，使有 $na>b$) 便是其中一例，这也是测量几何的不可缺少的几何根据. 从某种意义上也可以说，自从 Archimedes 以后，人们一直在努力完善《几何原本》的陈述. 然而一直到 19 世纪末期，人们才第一次给出完备的公理系统，在这个系统中，可以不依靠任何其他空间直观的习惯性而推出所有的 Euclid 几何定理. 这是德国大数学家 Hilbert 的贡献，他的著作《几何基础》一书把公理化方法推向了完善化阶段，因而该书被誉为划时代的巨著.

古代学者对《几何原本》中所列之诸定义、公设、公理的内容与文字表述略加比较以后，就觉察到其中(如上文所陈述之)第五公设的文字与内容显得最为复杂和累赘，远不如其他公设、公理那样自明. 因而古代学者们就怀疑地指出，第五公设是不是多余的?它能不能从其他公设、公理中逻辑地推导出来?这就是所谓的 Euclid 第五公设问题. 不仅如此，古代学者们还进一步认为，Euclid 之所以把它当作公设，只是因为他没有能给出这一命题的证明，以致大家认为把第五公设所述的这一命题当作不证自明之公设列出，乃是《几何原本》中的那些逻辑缺点中的一个主要缺点. 致使多代学者们付出了巨大的精力去证明第五公设. 几乎可以说在 Euclid 以后的两千多年时间里，难以发现一个没有试证过第五公设的大数学家，连 Euclid 本人在《几何原本》中也是直到第 29 个命题才开始应用第五公设，因而可怀疑他也曾试证过它，至少他是尽可能地延迟，直到推车上壁时才应用第五公设. 历史上，所有试证第五公设的努力都失败了，在所有这些失败的“证明”中，或是最终发现证明有误，或是发

现在证明过程中暗自使用了与第五公设相等价的命题.在这些失败的"证明"中,唯一引出的正面结果便是一批等价命题的发现.两千多年来,在试证第五公设过程中被发现的与之等价的命题甚多,我们不能也不必一一列出,只能举其一、二,陈述如下:

(1)三角形内角和为二直角.即$\sum(\Delta)=2d$.此处用$\sum(\Delta)$表示任意三角形之三个内角之和,又$d=\frac{\pi}{2}$.

(2)普雷菲尔公理.过平面上已知直线外的一点,至多只能引一条直线平行于该已知直线.

"普雷菲尔(John Playfair,1748 ~ 1819,苏格兰人)在他校订的《几何原本》(1795年在爱丁堡出版)中采用了一条很好的公理:'过线外一点,只能作一直线与已知直线平行.'(或'相交二直线不能同时平行于第三条直线.')这一公理,比第五公设简单明了,所以受到普遍欢迎,被采用在现今的教科书中,称为普雷菲尔公理."[1]

(3)锐角命题.存在一锐角,在其某一边上任一点引它的垂线,必与该锐角的另一边有交点.

在这里,我们要提到Saccheri和Lambert的工作.因为"萨凯里(Girolamo Saccheri,1667 ~ 1733,米兰的神父)对平行公理作了有价值的贡献,可说是非欧几何的先驱".[1]"兰伯特(Johann Heinrich Lambert,1728 ~ 1777)在1766年发表的《平行线论》也有和萨凯里类似的研究"[1].

如图1.1所示,Saccheri从讨论四角形$A'ABB'$出发,在这个四角形中,假定$AA'=BB'$,又夹着AB边的两个内角都是直角,即$\angle A=\angle B=\frac{\pi}{2}$,人们称该四角形$A'ABB'$为Saccheri四角形,记为$S_a^{\square}$,易证$S_a^{\square}$中的另外两个内角是相等的,即$\angle A'=\angle B'$,并称之谓Saccheri角,记为$S_a^{\angle}$.可以证明下述结论:

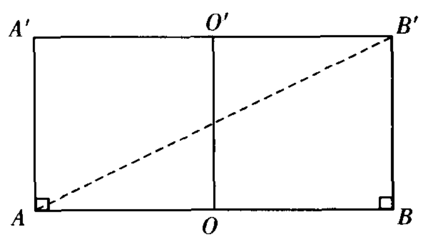


图1.1

(4)$S_a^{\angle}=d$,当且仅当第五公设成立.