高等院校教师教育数学系列教材

编委会主任 王玉文

解析几何

主　编　郑文晶
副主编　刘　萍　白　薇

编委　王　辉
鲍　曼　范　鹰　李兆兴
莫海平　堵秀凤　毕渔民

哈尔滨工业大学出版社

高等院校教师教育数学系列教材

解析几何

主　编　郑文晶
副主编　刘　萍　白　薇

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书共分六部分，主要运用向量代数来研究曲线及曲面等几何问题，并且对球面几何的内容进行了简单介绍，并配有适量类型题。

本书内容精练、重点突出，可供师范院校、教育学院、函授师范大学等选作教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/郑文晶主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.6

ISBN 978-7-5603-2679-5

Ⅰ.解…　Ⅱ.郑…　Ⅲ.解析几何-高等学校-教材　Ⅳ.0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 048534 号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　王勇钢
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东粮食印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 13.75　字数 254 千字
版　　次　2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2679-5
印　　数　1~3 000 册
定　　价　26.00 元

序

普通高中课程改革是基础教育改革的重要组成部分。随着高中数学课程改革的推进，将有越来越多的一线数学教师、数学教研员和未来的数学教师面对新的数学课程。传统的高等师范院校的数学课程通常很少顾及到高中数学的内容与方法。但是2004年启动的普通高中课程改革的实验，是在《普通高中数学课程标准(实验)》的基础上进行的。无论是高中数学必修课程还是高中数学选修课程，都有现代数学的内容、思想、方法及数学史的渗透。为了适应高中数学课程改革的需要，作为培养高中未来数学教师的高等师范院校，或综合大学的师范学院的数学与应用数学专业(师范类)，其数学课程必须适应这种改革。为此，黑龙江省高师数学会教育研究会继《高师院校数学系列教材》之后，在教学实践基础上，又组织编写了这套《高等院校教师教育数学系列教材》。

这套系列教材包括基础数学、应用数学、概率与统计、数学史、数学教育等专业的本科教材。其中有《近世代数》、《高等几何》、《数学分析选讲》、《简明数学史》、《高等代数选讲》、《解析几何》、《实变函数》、《简明数学逻辑》、《现代数学思想概论》、《简明概率与统计》、《数学建模》、《通信编码与信息安全》等。在这套系列教材中，力求将新的普通高中数学课程标准中规定的选修课中现代数学内容、方法纳入相应教材的正文或附录中。这套系列教材可以作为高等院校数学教师教育的本科数学教材，其中部分教材可供教育硕士选作教材和学科教学(数学)的参考书。

由于编著者的水平有限，加之面对高中数学新课程标准编写本科数学教材是一种新的尝试，丛书中会有不妥或疏漏之处，恳切地希望广大教师和读者提出建议和批评。让我们一起携手，为建立适应高中数学新课程标准的教师教育本科数学课程标准体系作出贡献！

王玉文

2007年6月

前　言

《普通高中数学课程标准》已于2003年正式颁布，伴随着新课程标准的出台，新课程教材已在全国大多数省市试用。与以往的历次高中数学课程改革不同，这次高中数学课程强调课程的基础性、课程的选择性、数学的应用性、让学生形成主动学习与探究学习、数学与信息技术的整合等。课程分必修和选修。必修课程由5个模块组成，选修课程有4个系列，学生根据自身兴趣、志向与条件，可以选择不同的课程组合。这次改革，广大高中数学教师对新课程存在着不少的困惑。例如，对新增加的一些内容不太熟悉；另一方面，新数学课程对学生的学习方式提出了新的要求，传统学习方式下的学生能否一下子就适应？按照国家教育部计划，高中数学课程标准将在2010年在全国实施。这标志着我国新一轮数学课程改革正在全国展开。中学数学课程改革必将影响数学教师的教育，而数学教师教育也必须适应中学数学课程改革的新形式。作为培养高中数学教师的基地，数学师范本科专业应积极地应对这次高中数学课程改革，调整课程内容。正是在这种形式下，经哈尔滨师范大学王玉文教授的积极策划，我们重新编写了《解析几何》一书。本书在原有教材的基础上，增加了《普通高中数学课程标准》选修系列中的球面几何内容。

解析几何是数学中最基本的学科之一，也是科学技术中最基本的数学工具之一。如今解析几何课已成为高等院校相关专业重要的基础课程。为了适应高中数学课程改革，本教材在内容的编写上突出以下几个特点：

本书的第一个特色：解析几何是一门重要的基础课，也是有关专业学生入学后首先开设的一门课程，必须承前启后。编写时考虑到国内外各种教材，及目前中学数学教材的内容，在教材内容的编排上作了必要的调整和删减，增加了《普通高中数学课程标准》选修系列中的球面几何内容。中学教材中重复的内容进行了简略，使本书的知识体系更加合理。

第二个特色：本书以向量代数为工具，在不用坐标系（标架）下直接讲授一些

初等几何问题,通过这门课的学习,为初等几何提供另一种研究方法。同时我们为了后继课的学习更注重二次曲面的阐述,而对二次曲线的讨论则因为思想方法相同而简略。

第三个特色:在教材的内容上改变了传统教材的叙述方式,注重展现数学知识的发生过程,及数学问题解决的思维过程。在新概念的引入时,注意背景和来源,并注意理论联系实际,发展数学应用意识和创新意识,力求对现实世界中蕴涵的一些数学模式进行思考和作出判断。

第四个特色:为了更好培养学生的分析问题、解决问题的能力,一些典型的方法给出了认真分析并举例,在每章后面配备了足够数量的习题。为了师范院校的学生更好的应对新课程改革,进行主动学习和探究式学习,引导学生发现问题和提出问题,在全书的每一章节中穿插了许多思考题,有些是容易忽略的问题,有些是开放性问题。通过问题的解决培养和提高学生提出、分析和解决问题的能力,数学表达和交流的能力,发展独立获取数学知识的能力。这对帮助在职教师和师范院校的学生尽快完善自身的知识结构,把握数学新课程标准中有关的几何内容以及对几何教学内容进行进一步改革、探索、研究,有着极其有效的作用。

作　者

2008 年 3 月

目　　录

第 1 章　向量代数

解析几何的思想是用代数的方法来研究几何，对几何问题的解决是通过建立适当的坐标系，利用坐标间的代数运算来进行研究。为了把代数运算引进到几何中来，首先在空间引进向量及其运算，利用向量可使某些几何问题更加简捷地得到解决。特别是向量和坐标可以相互转化，这为我们研究问题提供了很大的方便。

向量概念是数学和物理等学科的重要概念，而向量代数又是许多课程的重要工具。

1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量的概念

在中学阶段，我们就知道，现实世界中经常碰到两种量，一种是只有大小的量称为数量；而另一种既有大小，又有方向的量称为向量(或矢量)，向量可以用有向线段来表示，向量的方向是由有向线段的始点指向终点，向量的大小用有向线段的长度表示，称为向量的模或长度。用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 时，它的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$，或 $|\overrightarrow{AB}|$，如图 1.1 所示。

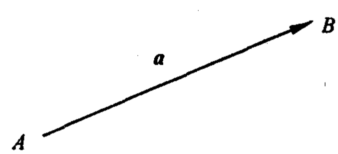

图 1.1

如果给定向量的长度和方向，并给出某种条件，就得到某种特定条件下的向量。

模是 0 的向量，也就是始点与终点重合的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$。零向量没有确定的方向，可按需要取任意方向。

模是 1 的向量叫做单位向量。与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量。

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，若它们的方向相同且模相等，则称为相等向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。另外，规定所有零向量相等，因此两个向量是否相等与它们的始点无关。由于始点可以自由选取，因此只由模和方向决定的向量叫做自由向量。也就是说，自由向量可以任意平行移动，移动后的向量仍然是原来的向量。

两个向量，若它们的模相等，但方向相反，则称为互为反向量。向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记为 $-\boldsymbol{a}$，于是我们有 $-\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a})$。

平行于同一直线（一个平面）的一组向量叫做共线（共面）向量，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量时也称为平行，记作 $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}$（图 1.2）。另外规定零向量与任何共线（共面）的向量组共线（共面）。

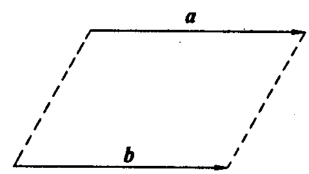

图 1.2

显然共线一定共面，而两个向量总是共面的，三个向量中有两个共线，则这三个向量共面。空间三个向量一般不是共面的。

思考题：

1. $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 有无意义？
2. 平面内具有同一始点的所有单位向量的终点的轨迹是什么图形？

1.1.2　向量的加法

在物理学中，作用于一个质点的两个不平行的力可以看做两个向量，它们的合力可以用平行四边形法则得出。如果两个力的方向相同，合力的方向和它们相同，合力的大小为两力大小之和；如果两力方向相反，则合力大小为两者之差，方向和大力的方向相同。因此在数学上我们可抽象出两个向量的加法定义如下。

【定义 1】　对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，从空间任意一点 O 引 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再从 A 引向量 $\boldsymbol{b}$，有 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 叫做两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，求它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做向量的加法。

根据定义 1，由图 1.3 我们有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

这种求两个向量和的方法叫做三角形法则。

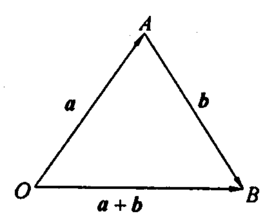

图 1.3

若两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，从空间任意一点 O 同时引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，则对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$（图 1.4），这种求两个向量和的方法叫平行四边形法则。

【定理 1】　向量的加法满足如下运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$。

其中，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量。

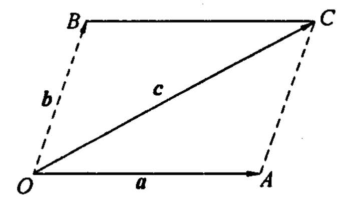

图 1.4

这些规律可由加法定义直接得出，请读者自己证明。

由于向量的加法满足交换律与结合律，三向量相加，无论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，因此可将和写成 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。推广到任意有限个情形，记向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和为 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，至于和的作图可以由三角形法则推广如下：自任意点 O 开始，依次引 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，由此得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$(图 1.5)，于是向量 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是这 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和

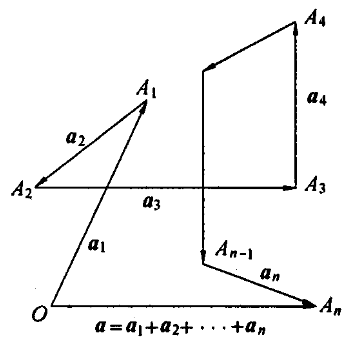

图 1.5

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

即
$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

这种求和的方法叫做多边形法则。

【定义 2】　向量的减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差。

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别用同一始点的有向线段 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示，减法的几何意义如图 1.6(a)，(b) 所示，即 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$。

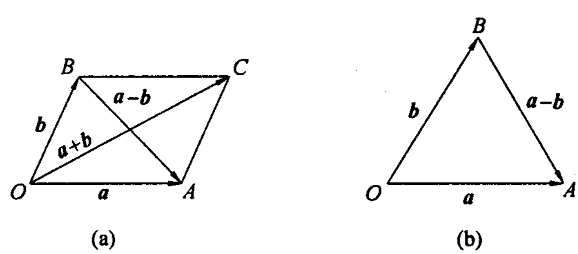

图 1.6

定义 2 表明求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差可以变为求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和，又因为 $-\boldsymbol{b}$ 的反向量是 $\boldsymbol{b}$，因此得 $\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

从减法的这个性质,可以得到向量等式的移项法则:在向量等式中,将某一向量从等式的一端移到另一端,只需改变它的符号。例如,将等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 中的 $\boldsymbol{c}$ 移到另一端,那么有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$,这是因为从等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 两边减去 $\boldsymbol{c}$,即加上 $-\boldsymbol{c}$,而 $\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 的缘故。

由向量加法的三角形法则以及三角形三边之间的关系,容易得到三角不等式,即

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为任意向量。

这个不等式可以推广到任意有限多个向量和的情形,即

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n| \leqslant |\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|$$

思考题:

1. 三角不等式中等号成立的条件是什么?
2. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ 成立的条件是什么?
3. 向量和为零,向量多边形有什么几何特征?

【例 1】 设互为不共线的三向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$,试证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和是零向量。

证明 必要性。设三向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 可以构成三角形 ABC,即有 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$(图 1.7),那么

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$$

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$。

充分性。设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,那么 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{c}$ 是 $\overrightarrow{AC}$ 的反向量,因此 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$,所以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 可构成一个三角形 ABC。

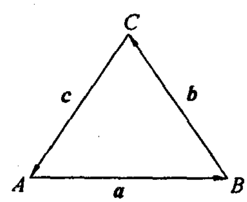

图 1.7

1.1.3 数乘向量

在物理学中,向量与数量间常常会发生某些结合的关系,如我们熟悉的牛顿第二定律

$$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$$

这里 $\boldsymbol{f}$ 表示力,$\boldsymbol{a}$ 表示加速度,m 表示质量。由此需要考虑数与向量的乘法的运算。

【定义 3】 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向,当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向,当 $\lambda=0$ 时有 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,我们把这种运算称为数乘向量。

特别地,当 $\lambda = -1$ 时,记 $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$。

由定义知 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量,任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 都可写作 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$,或 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。这说明非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以它的模的倒数,便可得到与它同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$,简称为把 $\boldsymbol{a}$ 单位化。

【定理 2】 数量与向量的乘法满足如下的运算规律:

(1) $1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(3) 第一分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;

(4) 第二分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$。

其中,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量,λ,μ 为任意实数。

证明　(1),(2) 根据定义 3 直接验证。

(3) 如果 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或 $\lambda,\mu,\lambda+\mu$ 中至少有一个为零,那么等式显然成立,因此只需证明当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \lambda\mu \neq 0, \lambda+\mu \neq 0$ 的情形。

① 如果 $\lambda\mu > 0$,则 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{a}$ 同向,因此有

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}| = |\lambda+\mu||\boldsymbol{a}| = (|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}| = |\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$$

所以有 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$。

② 如果 $\lambda\mu < 0$,不失一般性,不妨设 $\lambda > 0, \mu < 0$,再讨论 $\lambda+\mu > 0$ 和 $\lambda+\mu < 0$ 两种情形。下面只证明前一种情形。

设 $\lambda > 0, \mu < 0, \lambda+\mu > 0$,这时 $-\mu > 0$,因 $\lambda+\mu > 0$,由 ① 有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} + (-\mu)\boldsymbol{a} = [(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$$

所以 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} - (-\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$。

(4) 如果 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\boldsymbol{0}$,等式显然成立。下面证明 $\lambda \neq 0$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$。

①若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时,取 $m = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时,$m = -\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$,显然有 $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{b}$。于是有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}) = \lambda[(m+1)\boldsymbol{b}] = [\lambda(m+1)]\boldsymbol{b} = (\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b} = (\lambda m)\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{b} = \lambda(m\boldsymbol{b}) + \lambda\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$$

②若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,如图 1.8 所示,显然由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两边构成的 $\triangle OAB$ 与由 $\lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda\boldsymbol{b}$ 为两边构成的 $\triangle OA_1B_1$ 相似,因此对应的第三边所成向量满足 $\lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1}$,因 $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OB_1} = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,所以 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$。

从向量加法与数乘向量的运算规律知,对于向量也可以像实数与多项式那

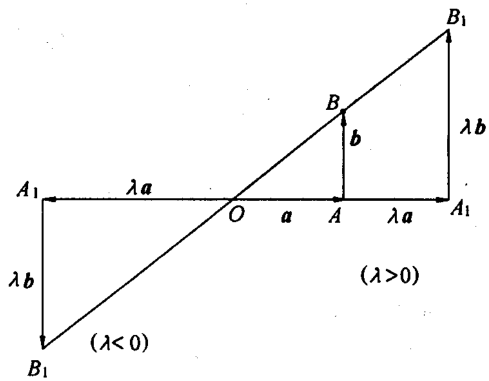

图 1.8

样去运算。

思考题：

设 $a = \lambda b$，则 $\lambda = \frac{a}{b}$ 是否有意义？

【例 2】 设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，求证

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

证明 如图 1.9 所示，有

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$$

所以 $2\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})$

但 $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MB} = \mathbf{0}$，因而 $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$。

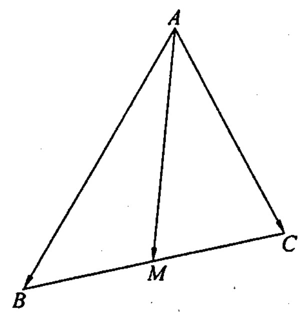

图 1.9

【例 3】 证明平行四边形对角线互相平分。

证明 设平行四边形 $OABC$ 的对角线 OB 的中点为 D，AC 的中点为 D'，需要证明 D 与 D' 重合（图 1.10）。因 D 是 OB 的中点，所以有 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$。

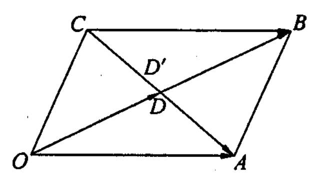

图 1.10

又因 D' 为 AC 的中点，所以有