JISUANJI GAILV MONI

计算机概率模拟

云南大学旅游文化学院
《计算机概率模拟》编写组　编著

四川大学出版社

计算机概率模拟

云南大学旅游文化学院
《计算机概率模拟》编写组

四川大学出版社

责任编辑:曾　鑫
责任校对:马　娜
封面设计:罗　光
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

计算机概率模拟 / 云南大学旅游文化学院《计算机概率模拟》编写组编著. —成都：四川大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5614-3792-6

Ⅰ. 计… Ⅱ. 云… Ⅲ. 概率-计算机模拟 Ⅳ. 0211 TP302.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 122789 号

书名　**计算机概率模拟**

作　者	云南大学旅游文化学院《计算机概率模拟》编写组
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-3792-6/ TP·157
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	140 mm×202 mm
印　张	5
字　数	119 千字
版　次	2007 年 11 月第 1 版
印　次	2007 年 11 月第 1 次印刷
印　数	0 001～1 800 册
定　价	12.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023 邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

内容简介

本书由云南大学旅游文化学院《计算机概率模拟》编写组编写，重点介绍各种概率模型的计算机模拟。

全书共分六章。第一章简要地介绍了随机事件及其概率，内容通俗易懂，为全书的阅读提供基础知识，熟悉基本概率模型的读者可以跳过本章。第二章介绍古典概型的概率模拟。第三章介绍几何概率的概率模拟。第四章介绍条件概率及概率的加法与乘法定理的概率模拟。第五章介绍全概模型与贝叶斯模型的概率模拟。第六章介绍伯努利序列模型的概率模拟及综合举例。

本书以典型性的例题为线索进行讲解。内容丰富，饶有趣味，可读性强。可供大专院校师生作为《概率论与数理统计》及《高级语言程序设计》方面的教学参考书。

序 言

《概率论》的“出身”似乎并不光彩，论其起源，不能不说到“赌博”。数学史上有这样一个故事：17世纪，一个赌徒向著名的科学家帕斯卡提出了一个令他颇费思索的问题——两个赌徒 A，B 约定赌若干局，并且谁先胜 p 局谁就是赢家，今赌完 $x+y$ 局后，赌博因故中止，其中 A 胜 x 局($x<p$)，B 胜 y 局($y<p$)，问赌本应如何分配才算合理？这是1654年的事情。

此事为当时众多的数学家所关注。在3年后的1657年，在数学、物理学、天文学等诸多领域都有建树的科学家惠更斯写成了一书《论赌博中的数学》，这可能是历史上最早的概率论方面的专著。今天，我们在有关概率论的文献中仍然可以见到很多“赌博的痕迹”，例如，《蒙特卡洛法》中的“蒙特卡洛”，《博弈论》中的“博弈”，《掷骰子问题》中的“骰子”等。

时至今日，概率论已经发展成为一门理论严谨，并且在工农业生产和国民经济相关部门，在物理学、天文学、气象学、地震学以及生命科学等领域都有着重要应用和指导意义的数学分支。许多新兴学科也以其作为理论基础，诸如信息论、控制论、对策论、排队论等。

我院计算机系、经济系、旅游管理系有近10个专业开设《概率论与数理统计》这门课程。如何增进学生学习本课程的兴趣，加强理论与实际的结合，加强学生使用计算机解决实际问题的能力，提高教学质量，是教学中面临的一个问题。我院计算机系系主任汤兴华教授在长期讲授《概率论与数理统计》、《离散数学》、《高级语言程序设计》等课程的基础上，积累了丰富的教学经验和教学资料，他所开设的校级选修课《计算机概率模拟》一直深受学生欢迎。

我院计算机系2004级学生根据汤兴华教授的讲稿整理编撰

了本书，他们主要做了以下工作：

1. 整理讲稿。

2. 补充了部分习题，并进行了解答和相应的计算机编程。

3. 在计算机上调试、运行了全部程序，验证了理论解。

4. 向计算机输入了全部文稿，编辑排版、整理成册。

5. 设计了封面。

计算机概率模拟是计算机应用的一个重要方面，是计算机仿真的基础之一，这在以往的教科书中，也并不鲜见。不过，本书系统地研究概率论中各种概率模型的计算机模拟，就我们所知，在国内尚属首次，这是本书的特色和创新点。

实践证明，将概率论和程序设计的基本知识紧密地结合在一起，能大大地加深学生对不同概率模型的掌握和区分，强化解题能力，同时也极大地提高了学生程序设计的能力。

本书共有包含各类概率问题的例题 50 余道，每道题均有两种解法：

1. 按不同概率模型的计算公式求其理论结果。

2. 编制程序，进行计算机模拟，给出近似解。

在本书中，有大量的历史上饶有趣味的著名例题，例如 Buffon 丢针问题、意大利赌徒问题、生日问题、抓阄问题等。我们认为本书是一本可读性强的《概率论与数理统计》和《高级语言程序设计》教学方面的参考用书。

参加本书主要编撰工作的计算机系 2004 级学生有：杨恒坚、刘 帅、边景芝、徐春宁、陈慧莹、赖俊涛、朱震、王飞。

本书编撰完成后，经过了汤兴华教授的审核和校订。

最后，我们谨向对本书出版付出大量心血的四川大学出版社编辑人员表示衷心的感谢！

云南大学旅游文化学院院长 杨家禾教授

2007 年 4 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

自然界有大量现象被称为“随机现象”，随机现象的每一次表现被称为一个“随机事件”。简单地说，在特定的条件下，可能发生但也可能不发生的事件被我们称为“随机事件”或“偶然事件”。

我们来看以下 3 个例子。

例 1—1　口袋摸球。

口袋中有手感相同的黑、白球若干，今摸出一个，

设A=“摸出的是黑球”，

B=“摸出的是白球”。

显然，事件 A，B 在一次摸球的试验中是随机事件。

例 1—2　投掷分币。

投掷两枚分币，则

设A=“两个正面朝上”，

B=“两个正面朝下”，

C=“至少有一个正面朝上”。

显然，这里的 A，B，C 也是随机事件。

例 1—3　零件取样。

从 10 个外形一样的零件(其中 8 个正品，2 个次品)中，随意地取出 4 个，则

设A=“四个都是正品”，

B=“其中有一个次品”。

A，B 是随机事件，但是设 C=“4 个都是次品”，D=“至少有

两个正品”，其中 C 是不可能发生的，而 D 则一定会发生，我们称它们为“不可能事件”及“必然事件”，分别记为 Φ 及 U 。为了讨论的方便，我们将 Φ 和 U 也可以看作随机事件，后面会看到，它们其实就是概率恒为 0 或 1 的随机事件罢了。

1.2 频率与概率

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，我们称 $W(A)=\frac{m}{n}$ 为随机事件 A 的频率，显然有

$$0\leqslant W(A)\leqslant 1$$

直觉和经验告诉我们，当试验次数很多时，随机事件的频率具有一定的稳定性。这就是说，在不同的试验序列中(试验的条件保持不变)，当试验次数足够大时，$W(A)$一定在某一个确定的常数附近摆动。例如，投掷分币时，只要分币是均匀的，投掷时分币向上抛起后自由落体，分币落在有弹性的平面上后，出现正面朝上及正面朝下这两个随机事件的可能性应当是一样的，即应当各占一半，都为$\frac{1}{2}$。事实上，人们心中的某事件发生的可能性之大小就正是这个“频率的稳定值”。

历史上，不少人做过成千上万次的抛硬币试验，表 1－1 列出了其中的一部分。

表 1－1　抛硬币试验结果

实验者	n	m	$W(A)$
DeMorgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

表中事件 A=“正面朝上”，由此，我们给出关于概率的一个

描述性的定义，即通常所说的概率的统计定义。

定义：在一定条件下，重复做试验 n 次，记 m 次是 n 次试验中事件 A 出现的次数；当 n 充分大时，频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数值 C 附近摆动，则称 C 为随机事件 A 在一定条件下的概率，记为 $P(A)=C$ 。

显然，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，$P(\Phi)=0$，$P(U)=1$。

1.3 古典概型

需要指出的是，关于概率的统计定义是在一种特殊的假定下给出的，这就是假定了试验中的可能事件（我们称之为基本事件）只有有限个的情况；这个定义本身也提供了一种求概率的近似方法。那么，是不是求概率都只有做大量的试验这一种方法呢？此外，当试验中基本事件有无穷多种情况时又该怎么处理？这就是本章后面要讨论的两个问题。

1.3.1 几个概念和术语

在试验中，如果由于问题的“对称性”，使得若干个随机事件中的每一事件发生的可能性相等（例如，口袋中的手感相同的黑白二球，随意摸一个得到黑球或者白球；投掷一枚硬币出现正面朝上或者正面朝下等），则称它们是“等可能”的。

在试验中，若干随机事件决不可能是两件或两件以上同时发生，则称它们是“互不相容”或“互斥”的。

在试验中，若干随机事件中至少有一件要发生，则称它们具有“完全性”或称它们构成了一个“完全事件组”。

经常会遇到上述三个条件都满足的事件群，我们称它们为“基本等概事件组”或者“等可能互斥完备群”，其中的每一个事件称为一个基本事件。又若在试验中，某一基本事件发生，意味着随机事件 A 发生，则称这一基本事件是有利于 A 的，例如，投掷两枚

硬币：

设 $A1=$“$++$”，$A2=$“$--$”，

$A3=$“$+-$”，$A4=$“$-+$”，

$A=$“至少有一个正面朝上”，

$B=$“两个面都相同”(式中“+”表示正面朝上，“-”表示正面朝下)。

显然，$A1,A2,A3,A4$ 是基本事件，其中 $A1,A3,A4$ 是有利于 A 的，而 $A1,A2$ 则是有利于 B 的。不难理解，前面所说的 $W(A)=\frac{m}{n}$ 中的 n 是基本事件的个数，而 m 则是有利于 A 的事件个数。

符合上述性质的概率模型称为一个“古典概型”，其中随机事件的概率是可以直接加以计算的。

1.3.2 举例

例 1-4 口袋内有 5 个白球，3 个黑球，从中任意取出两个，求取出的两个球都是白球的概率。

解：基本事件总数 $n=C_8^2=28$，而有利的事件个数为 $C_5^2=10$，故有

$$P=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$$

例 1-5 N 件产品中有 M 件次品，从中任取 X 件产品，求其中恰好有 Y 件次品的概率。

解：基本事件总数为 C_N^X，而有利事件则为 $C_M^Y C_{N-M}^{X-Y}$，故有

$$P=\frac{C_M^Y C_{N-M}^{X-Y}}{C_N^Y}$$

1.4 几何概率

1.4.1 定义

前文所述，古典概型的定义对于试验的基本事件个数为无穷的情形，原则上并不适用。于是，这里进一步引进“几何概率”模

型，作为对古典概型的一个补充。

设平面上有一封闭有限区域 ω，其面积为 G，Ω 则是 ω 中的一个封闭子区域，其面积为 g。今任意向 ω 内射入一点，求此点射入 Ω 内的概率。

需要说明的是，这里的“今任意向 ω 内射入一点”的意思是指，点射入 ω 内的任意位置的可能性都是一样的。点射入 Ω 中的可能性只与这部分的面积成正比，而与其位置和形状无关，其概率为

$$P=\frac{\Omega\text{ 的面积}}{\omega\text{ 的面积}}=\frac{g}{G}$$

不难理解，根据实际问题的背景，这里的 G 与 g 可分别为线段及其子线段的长度，也可分别为空间一封闭区域及其子区域的体积等，这便属于几何概率的范畴了。于是，我们有以下定义：

定义：设试验的基本事件有无穷多个，但是可用某种表示数量的几何度量值表示其总和 M，并且其中有利于事件 A 的有利事件总和也可用同一种几何度量值表示，记为 m，则

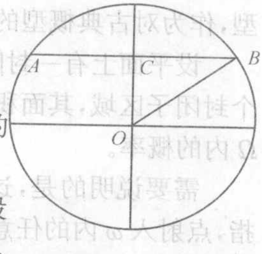
$$P(A)=\frac{m}{M}$$

1.4.2 举例

例 1－6 在半径为 R 的圆内画平行弦，如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的，即交点在这直径上一个区间内的可能性与此区间的长度成比例，求任意画的弦的长度大于 R 的概率。

解：如例 1－6 图所示，设 AB 为所作的弦，C 为垂直于 AB 的直径与它的交点。由三角形 OCB 可知，当 $OC^2\leqslant OB^2-(\frac{1}{2}OB)^2$ 时，弦 AB 的长度 $\geqslant R$，由此得 $OC\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}R$，由对称性易知：

$$P=\frac{有利区间长度}{直径长度}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}R}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



例 1－6 图

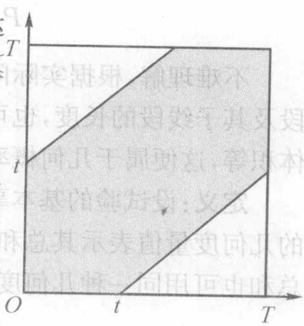
在本例中，事件个数的度量值是线段的长度。

例 1－7 甲乙两人约定在 0 到 T 这段时间内到指定地点约会，先到者等候另一人，经过时间 $t(t<T)$ 后离去，求甲乙两人会面的概率。

解: 以 x,y 分别表示甲、乙 2 人到达约会地点的时刻，则有 $0\leqslant x\leqslant T, 0\leqslant y\leqslant T$，于是 2 人会面的充分必要条件是

$$|x-y|\leqslant t$$

于是，以 (x,y) 表示直角坐标系内的点，则所有基本事件可以边长为 T 的正方形内的点表示，而有利事件可用其中介于两直线 $x-y=\pm t$ 间的区域内的点表示(如例 1－7 图所示)，推论得知:



例 1－7 图

$$P=\frac{阴影面积}{正方形面积}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-(1-\frac{t}{T})^2$$

本例中事件个数的度量值是图形的面积。

例 1－8 卫生部门规定，在 1000ml 自来水中只能有一个大肠杆菌，为了检验水质，今从中随意地取出 10ml 的水样在显微镜下观察，求发现大肠杆菌的概率。

解: 由直觉可知，水样中发现大肠杆菌的可能性显然很小，其概率为

$$P=\frac{水样的体积}{母体的体积}=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$$

本例中事件个数的度量值是立体的体积。

几何概率的问题是很有趣的。以下 3 种情况和上面的 3 个例子的计算方法几乎完全一样,读者不妨一试。

(1)张某午睡醒来,发现手表停了。他打开收音机,试图听到电台报时,设电台每半小时报时一次,求张某等待时间少于 5 分钟的概率。

(2)公共汽车每隔 5 分钟到站一次,某人随机地来到车站,求此人等车时间不超过 1 分钟的概率。

(3)按国际标准,某金属纯度应在 0.999 以上方为精品,今有一批产品,经抽样检验,一公斤中含有杂质 1.92 克,问其是否达到精品的要求?

1.5　条件概率与独立性

1.5.1　条件概率

很多时候,我们需要考虑这样的概率问题,即在"事件 A 发生"的前提下,"事件 B 发生"的概率,这一类问题被称为条件概率,记为 $P(B|A)$。我们先看下面一个例子。

例 1－9　网络 1 班有 60 名学生,男 40 名,女 20 名;身高在 1.70 米以上者有 30 名,其中男 24 名,女 6 名,今问:

(1)任选 1 名学生,问该生身高在 1.70 米以上的概率?

(2)任选 1 名学生,选出后知其为男生,其身高在 1.70 米以上的概率为多少?

解:第一问答案是显然的,即 $P(B)=\dfrac{30}{60}=0.5$。

第二问则不然,今设

A＝"任选一名学生,选出后知其为男生",

B＝"身高在 1.70 米以上"。

这里,"A 是 B 的条件",我们要求的是 $P(B|A)$,于是就只能在 40 名男生中考察一名身高在 1.70 米以上的可能性,故有

$P(B|A)=\frac{24}{40}=0.6$。

若注意到 $P(A)=\frac{40}{60}, P(AB)=\frac{24}{60}$,

于是 $P(B|A)=\frac{24}{40}=\frac{\frac{24}{60}}{\frac{40}{60}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$。

这里,$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$是具有普遍意义的。在本例中,$P(B|A)$有两层意思,一是说任选一名学生,后发现是男生;二是说在此前提下求其身高在1.70米以上的概率。显然,第一层意思表达的结果就是 $P(A)=\frac{40}{60}$,而第二层意思则是在此前提下再加上"身高在 1.70 米以上"的限制,这便是 $P(AB)$的意思,于是 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$便不难理解了。

一般情况下,设 N 为基本事件的总数,n_A 为有利于事件A 的基本事件数,n_{AB}是有利于事件AB(即 A,B 同时发生)的基本事件数,则应有

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{\frac{n_{AB}}{N}}{\frac{n_A}{N}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

我们再看以下两个例子。

例 1-10 A,B 两台机器生产同一种产品 100 件,已知 A 生产了 40 件,其中有 5 件次品;B 生产了 60 件,其中有 10 件次品。今从中任取一件检验,求取出者是 A 生产的概率;若取出的是正品,求是 A 生产的概率。

解:设A="取出一件是 A 生产的",

B="取出者是正品",

则$P(A)=\dfrac{40}{100}$，$P(B)=\dfrac{85}{100}$，$P(AB)=\dfrac{35}{100}$，

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\dfrac{35}{100}}{\dfrac{85}{100}}=\frac{35}{85}$$

例 1－11　某动物活 20 年以上的概率是 80%，活 25 年以上的概率为 40%，现有一只已活了 20 年的此种动物，其能活到 25 年以上的概率为多少？

解：设A=“能活 20 年以上”，

B=“能活 25 年以上”，

则 $P(A)=0.8$，注意到 B 是 A 的真子集这一事实，可知

$$P(AB)=P(B)=0.4,$$

于是

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$

仔细体味一下本例中的三个概率值，即

$$P(A)=0.8,P(AB)=0.4,P(B|A)=0.5$$

再深入一步地想一想，就能悟出题外的一点道理。例如，若本例中若有 $P(A)=0.2$，$P(AB)=0.1$，则概率有 $P(B|A)=0.5$，这即是说此种动物中只有 2 成概率能活到 20 岁以上（这是很不容易的），而其中只有 1 成能活到 25 岁以上（这就更不容易了），但是某动物如果活到了 20 岁，那么它就有 50%的可能活到 25 岁以上。

1.5.2　独立性

由前述可见，一般情况下，$P(B|A)\neq P(B)$，这即是说事件 A 的发生对事件 B 的发生有影响（注意，这里要求 $P(A)\neq 0$，原因请读者思考），若 $P(B|A)=P(B)$，则此时 A 的发生对 B 的发生没有影响。

对于上述情况，我们有下面的说法：

设两事件 A 与 B 且 $P(A)\neq 0$，若有 $P(B|A)=P(B)$，则称事件 A 与 B 是相对独立的，或简单地说成 A,B 独立。

"独立性"很重要，这在后面的"概率模拟"时，要特别加以注意。

1.6 加法公式与乘法公式

由集合的运算性质，易知有以下的概率计算公式成立，即

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A+B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

以上称为概率计算中的加法公式。

同样理由，我们又有以下公式，即

当 $P(A)\neq 0$ 时，$P(AB)=P(A)P(B|A)$。

当 $P(B)\neq 0$ 时，$P(AB)=P(B)P(A|B)$。

上面两式称为概率计算中的乘法公式。

加法公式与乘法公式在后面的"概率模拟"中也是要注意到的。

看以下两个例子。

例 1－12　有一张听学术讲座的票，5 人以抓阄的办法决定谁能取得，试证明每人能得到票的机会都是$\frac{1}{5}$。

证：设 $A_i=$"第 i 个人抓到'有'票"，$i=1,\cdots,5$，

易知 $P(A_i)=\frac{1}{5}$，$P(A_1)=\frac{1}{5}$，

今若第二个人抓到"有"，则必然第一个人抓到"无"，故应有 $A_2=\overline{A}_1A_2$，于是

$$P(A_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

类似地，有