21世纪高校管理类、经济类核心课程教学用书

管理运筹学教程

GUANLI YUNCHOUXUE JIAOCHENG

赵　鹏
张秀媛　主编
孙晚华

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

21世纪高校管理类、经济类核心课程教学用书

管理运筹学教程

赵　鹏　张秀媛　孙晚华　主　编

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书主要针对大学本科交通运输管理和经济管理专业的特点及要求，同时兼顾了管理、系统工程等专业的要求，论述了运筹学各主要分支的基本概念与理论、模型、主要算法和应用。本书主要包括线性规划、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络、网络计划、排队论、存贮论等内容。本书选材精练，对各主要分支的基本理论、基本原理和主要方法进行了系统分析、整理，结合实际问题建立模型并给出求解方法，体现了现代运筹学的特点。本书还对求解运筹学问题常用的 Excel，LINDO 等软件进行了介绍。

本书可以作为管理专业运筹学课程的教材，也可以作为相关专业的研究生教材，还可供从事运筹学、管理科学的工作者和工程技术人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

管理运筹学教程/赵鹏，张秀媛，孙晚华主编．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2008．3

（21 世纪高校管理类、经济类核心课程教学用书）

ISBN 978－7－81123－221－9

Ⅰ．管… Ⅱ．①赵… ②张… ③孙… Ⅲ．管理学：运筹学-高等学校-教材 Ⅳ．C931．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 005903 号

责任编辑：解　坤

出版发行：清 华 大 学 出 版 社　邮编：100084　电话：010－62776969

北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010－51686414

印 刷 者：北京市梦宇印务有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185×230　印张：21．25　字数：476 千字

版　　次：2008 年 3 月第 1 版　2008 年 3 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978－7－81123－221－9/C・38

印　　数：1～4 000 册　定价：29．00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。

投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu．edu．cn。

前　言

运筹学是一门应用科学，至今没有统一、确切的定义，一般可以表述为：利用计划的方法和多学科专家组成的队伍，把复杂的功能关系表示成数学模型，其目的是通过定量分析为决策和揭露新问题提供数量依据。

在我国古代就有运筹思想，史记《张良传》中就有“运筹帷幄，决胜千里”的记载和“田忌赛马”、“丁渭修宫”、“沈括运粮”等经典的运筹实例。运筹学作为科学名词出现是在20世纪30年代末，当时英、美将雷达作为防空系统的一部分来应对德国的空袭，技术上虽然可行，但实际效果并不理想。为此，一些科学家就如何合理运用雷达进行了这类新问题的研究，因为它与研究技术本身不同，就称之为“运用研究”或“操作研究”（Operational Research）。

近代运筹学理论可以追溯到20世纪初，1914年英国人兰彻斯特研究“人与火力的优势和胜利之间的关系”时发表了“兰彻斯特战斗方程”。1917年丹麦工程师爱尔朗研究电话通信系统时提出了排队论的一些著名公式。20世纪30年代，荷兰人荷雷斯·列文生分析商业广告和顾客心理时提出了“经济批量公式”。特别是，1947年美国数学家丹捷格为解决美国空军军事规划提出的问题，发表了关于线性规划的研究成果，给出了求解线性规划问题的单纯形算法。至此，现代运筹学的主要分支基本形成。

20世纪50年代中期，钱学森、许国志等科学家将运筹学引入我国，并结合我国特点推广应用。以华罗庚为首的一批数学家也加入到运筹学的研究队伍，并在优选法、统筹法、“中国邮递员问题”、运输问题等研究中做出了较大贡献，很快使我国运筹学的很多分支跟上了当时的国际水平。

运筹学起源于军事领域，后来转向民用，并广泛应用于市场销售、生产计划、库存管理、运输问题、财政和会计、人事管理、设备维修、更新和可靠性、项目选择和评价、信息系统、城市管理等生产、管理和生活的各个方面，解决实际生产、生活中的问题。计算机的快速发展为运筹学理论应用于实际提供了简单、快捷、有力的技术条件，进一步促进了运筹学的发展。在交通运输领域运筹学也有广泛的应用，甚至在国际运筹学协会中设有航空组，专门研究空运中的运筹学问题。运筹学在解决大量实际问题的过程中形成了：提出和形成问题、建立模型、求解，以及对解的检验、控制、实施等工作步骤，为运筹学的应用提供重要的参考。

本书编写组长期从事管理运筹学的教学工作，使用过多本运筹学的教科书和参考书，但在教学过程中总有些不能满足需要的地方，多年以来一直有编写一本适合交通运输、经济管

理类的运筹学教材的想法。本书力争符合运输、经济等管理类运筹学大纲的要求，不过多地进行理论分析，而注重实际应用。本书对线性规划、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络、网络计划、排队论、存贮论等基本概念、基本原理和基本方法进行了讲述，对求解运筹学问题常用软件——Excel，LINDO 等的使用方法进行了介绍。

本书的内容、结构由教材编写组共同设计，编写分工如下：第 1 章至第 4 章及附录由张秀媛编写，第 5、第 6 章由孙晚华编写，第 7、第 8 章由胡天军编写，第 9、第 10 章由赵鹏编写。

运筹学已是比较成熟的一门学科，可供参考的资料也比较丰富，在编写中参考、采用了许多已有的文献资料，在此表示衷心的感谢！

由于水平及经验有限，书中难免有不足和错误，敬请批评指正！

编　者

2008 年于北京交通大学

目　　录

第 1 章　线性规划

1.1　线性规划问题及其数学模型

应用数学规划模型求解实际问题时，首先要将实际问题抽象成数学模型，然后再对其求解。对于一个实际问题，若要将其作为一个线性规划（Linear Programming，LP）问题来处理，必须建立与实际问题对应的线性规划数学模型。

1.1.1　线性规划问题的提出

下面用 3 个简单例子来说明如何建立数学规划问题的数学模型。

例 1－1　某家具厂生产桌子和椅子两种家具，有关资料如表 1－1 所示。

表 1－1

产　　品	工　　时		单 位 售 价
	木　　工	油　漆　工	
桌　　子	4 h/个	2 h/个	50 元/个
椅　　子	3 h/个	1 h/个	30 元/个
供 应 量	120 h/月	50 h/月	

问：企业应如何安排生产计划，使每月的销售收入最大?

解　用数学语言来描述生产计划的安排，这个过程称为建立其数学模型，简称建模。

设：

① 桌子、椅子的生产数量为决策变量，分别用 x_1，x_2 表示。因为产量一般是一个非负数，所以有 x_1，$x_2 \geqslant 0$，称为非负约束。

② 木工和油漆工的加工时间为限制条件，约束了产品的生产量 x_1，x_2。

约束如下

$$4x_1+3x_2 \leqslant 120$$
$$2x_1+x_2 \leqslant 50$$

③ 桌子、椅子的生产数量为 x_1，x_2 时所得总收入为 z，显然 $z=50x_1+30x_2$。总收入值达到最大，用公式表达为

$$\max\ z=50x_1+30x_2$$

把上述所有数学公式归纳如下

$$\max z=50x_1+30x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+3x_2\leqslant 120\\2x_1+x_2\leqslant 50\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

这就是一个最大化的线性规划模型。

例 1－2　运输工具的配载问题　有一辆卡车，容积 18 m^3，载重 2.5 t，用来装载如下的两种货物：箱装件 125 kg/个、0.4 m^3/个；包装件 20 kg/个、1.5 m^3/个。

问：如何装配，卡车所装物件的个数最多？

解　根据题意，设箱装件 x_1个，包装件 x_2个，需要满足体积、重量约束条件，即

体积约束　$0.4x_1+1.5x_2\leqslant 18$

重量约束　$125x_1+20x_2\leqslant 2\,500$

非负约束　$x_1,\ x_2\geqslant 0$

目标函数　$\max z=x_1+x_2$

整理得到下面的形式

$$\max z=x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0.4x_1+1.5x_2\leqslant 18\\125x_1+20x_2\leqslant 2\,500\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

例 1－3　运输问题　某类物资有 m 个产地，n 个销地，第 i 个产地的产量为 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$；第 j 个销地的需要量为 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$，其中 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\geqslant\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$。设由产地 i 到销地 j 的距离为 d_{ij}，试问如何分配供应，才能既满足各地的需要，又使总运力（吨公里数）最少？

解　设变量 x_{ij}表示由产地i 供给销地j 的物资数量，上述问题可以归结为如下数学问题

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\quad(j=1,2,\cdots,n)\\\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i\quad(i=1,2,\cdots,m)\\x_{ij}\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

上述三例中所提出的问题，最终都归结为一组决策变量满足线性约束条件的前提下，求使线性目标函数最大或最小的问题，这种问题称为线性规划问题。一个线性规划问题的数学模型包括三大部分：目标函数、约束条件和决策变量。

1.1.2　线性规划数学模型

线性规划数学模型的共同特征为：

① 每一个问题都有一组决策变量 $x_j(j=1, 2, \cdots, n)$，取值通常为非负的；

② 存在一些约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示；

③ 都有一个要求达到的目标，他们可以用决策变量的线性函数来表示，按问题的不同，要求目标函数实现最小化或最大化。

满足上述3个条件的数学模型称为线性规划的数学模型，其数学语言描述为

$$\max(\min)z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_2 \qquad (1-2) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \qquad (1-3) \end{cases}$$

其中，公式（1-1）称为目标函数关系，公式（1-2）称为约束条件，公式（1-3）称为非负约束条件。式中，z 称为目标函数，$x_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 称为决策变量，$c_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 称为价值系数或目标函数系数，$b_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 称为资源常数或约束右端常数，$a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 称为技术系数或约束系数，c_j，b_i，a_{ij} 均为常数。

1.2　线性规划问题的基本理论

1.2.1　线性规划问题的几何意义

1. 基本概念

可行域　由式（1-2）、式（1-3）的约束条件所围成的区域称为该线性规划问题的可行域。

凸集　设 Ω 是 n 维空间的点集，若任取 $x_1, x_2\in\Omega, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$[x_1,\ x_2]=\{x\,|\,x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}\in\Omega$$

则称 Ω 为凸集。从直观上来讲，图形中连接任意两点的直线全部在图形区域内，称此图形是凸的，图1-1(a)、图1-1(c) 中图形的交集为凸集，图1-1(b) 不是凸集。

凸组合　设 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，…，$x^{(k)}$ 是 n 维空间中的点，若存在 μ_1，μ_2，…，$\mu_k(0\leqslant\mu_i\leqslant 1, i=1, 2, \cdots, k$ 且 $\sum\mu_i=1)$ 使 $x=\mu_1x^{(1)}+\mu_2x^{(2)}+\cdots+\mu_kx^{(k)}$，则称 x 为 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，…，$x^{(k)}$ 的凸组合。特别是，平面上的两点 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$ 连线上的点 x，坐标为

$$x=\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

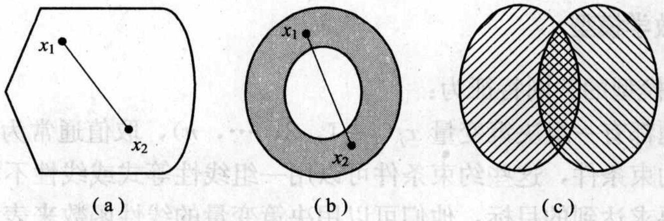

图 1－1　凸集示意图

顶点　设 K 为凸集，$x \in K$，若 x 不能用 K 内不同的两点 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$（$x \neq x^{(1)}$，$x \neq x^{(2)}$）的凸组合表示，则称 x 为顶点。

列向量　$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$ 为 m 维列向量。

线性无关　一组向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$，如果对于一切实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，只要满足：$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = 0$，就有 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$，则称 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 线性无关。

线性相关　一组向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$，如果有一组不全为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，且满足：$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = 0$，则称 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 线性相关。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩　设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times n$ 阶矩阵（$m<n$），若矩阵中线性无关列向量的最大个数为 k，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 k，记为秩 $\boldsymbol{A}=k$ 或 $r(\boldsymbol{A})=k$。

2. 线性规划问题解的概念

线性规划的求解是对线性规划问题求取一组变量 $x_j(j=1, 2, \cdots, n)$，使之既满足线性约束条件，又使线性的目标函数取得最大化或最小化的过程。

线性规划的数学模型可以用式（1－4）、式（1－5）、式（1－6）这样简洁的紧缩形式表示。

$$\max(\text{或}\ \min) z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-4}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i & (1-5)\\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n) & (1-6)\end{cases}$$

还可以应用广泛的矩阵形式来表示，如式（1－7）。

$$\max(\text{或}\ \min) z=\boldsymbol{CX} \tag{1-7}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX} \leqslant (=, \geqslant) \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X} \geqslant 0\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{C}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，$\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$称为价值系数向量或目标函数系数向量，$\boldsymbol{A}$ 称为技术系数矩阵或约束系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 称为资源常数向量或右端常数向量。

可行解 满足式（1-5）、式（1-6）条件的解 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为可行解。

基 约束条件方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，若 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中 $m\times m$ 阶非奇异子矩阵（$|\boldsymbol{B}|\neq 0$），则称 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划问题的一个基。

基解 对于基 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$，设 $\boldsymbol{X}_B$ 是对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的决策变量，称为基变量，记为 $\boldsymbol{X}_B=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中其他列向量为非基底子矩阵，其对应的决策变量称为非基变量，并令 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，称$\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为基解。

基可行解 满足式（1-6）非负条件的基解称为基可行解。

最优解 满足式（1-5）和式（1-6），且使目标式（1-4）达到最优的决策变量取值称为最优解。所以最优解一定在基可行解中，也称为基最优解。

退化解 若基解（基可行解）$\boldsymbol{X}_B=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 中基变量的个数为 l，$l<m$，则称该解为退化解。

以上介绍了几种解的概念，它们之间的关系如图 1-2 所示。

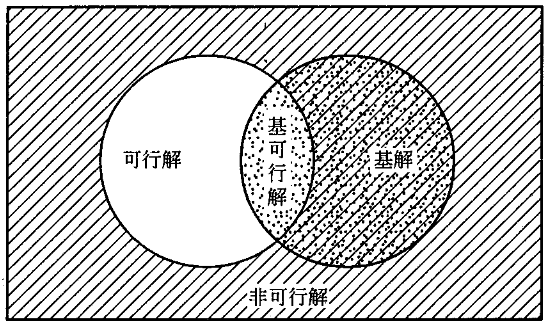

图 1-2 解集示意图

3. 基本定理

定理 1.1 线性规划问题若存在可行域，则其必是凸集，即

$$D=\{\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\}=\left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ x_j\geqslant 0,\ i=1, \cdots, m\right\}$$

是凸集。

证明 线性规划的矩阵形式为

$$\max z=\boldsymbol{CX}$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{x}^{(1)}\neq\boldsymbol{x}^{(2)}$ 为 D 内任意两点，则 $\boldsymbol{Ax}^{(1)}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Ax}^{(2)}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}^{(1)}\geqslant 0$，$\boldsymbol{x}^{(2)}\geqslant 0$，令 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 的任一凸组合，即

$$\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\mu)\boldsymbol{x}^{(2)}\quad(0\leqslant\mu\leqslant 1)$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Ax}&=\boldsymbol{A}[\mu\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\mu)\boldsymbol{x}^{(2)}]\quad(0\leqslant\mu\leqslant 1)\\&=\mu\boldsymbol{Ax}^{(1)}+\boldsymbol{Ax}^{(2)}-\mu\boldsymbol{Ax}^{(2)}\end{aligned}$$

$$=\mu \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-\mu \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

又 $\boldsymbol{x}^{(1)}\geqslant 0$，$\boldsymbol{x}^{(2)}\geqslant 0$，$0\leqslant\mu\leqslant 1$，则 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$。

可见 $\boldsymbol{x}\in D$，即 D 是凸集。

引理 1　线性规划问题的可行解 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充分必要条件为 $\boldsymbol{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

证明　(1) 必要性　由基可行解定义可知。

(2) 充分性　若向量 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_k$ 线性独立，则必有 $k\leqslant m$；当 $k=m$ 时，它们恰构成一个基，从而 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为相应的基可行解。$k<m$ 时，则一定可以从其余的列向量中取出 $m-k$ 个与 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_k$ 构成最大的线性独立向量组，其对应的解恰为 $\boldsymbol{X}$，所以根据定义它是基可行解。

定理 1.2　线性规划问题的基可行解 $\boldsymbol{X}$ 对应于可行域 D 的顶点。

证明　不失一般性，假设基可行解 $\boldsymbol{X}$ 的前 m 个分量为正。故

$$\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b} \tag{1-8}$$

分两步反证。

(1) 若 $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解，则它一定不是可行域 D 的顶点。

由引理 1，若 $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 使得

$$\alpha_1\boldsymbol{P}_1+\alpha_2\boldsymbol{P}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{P}_m=0 \tag{1-9}$$

用一个 $\mu>0$ 的数乘 (1-9) 式再分别与 (1-8) 式相加和相减，这样得到

$$(x_1-\mu\alpha_1)\boldsymbol{P}_1+(x_2-\mu\alpha_2)\boldsymbol{P}_2+\cdots+(x_m-\mu\alpha_m)\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{b}$$

$$(x_1+\mu\alpha_1)\boldsymbol{P}_1+(x_2+\mu\alpha_2)\boldsymbol{P}_2+\cdots+(x_m+\mu\alpha_m)\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{b}$$

令

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=((x_1-\mu\alpha_1), (x_2-\mu\alpha_2), \cdots, (x_m-\mu\alpha_m), 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}^{(2)}=((x_1+\mu\alpha_1), (x_2+\mu\alpha_2), \cdots, (x_m+\mu\alpha_m), 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

由 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 可以得到 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{(1)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{(2)}$，即 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 连线的中心。

另一方面，当 μ 充分小时，可保证

$$x_i\pm\mu\alpha_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, m$$

即 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 是可行解，所以 $\boldsymbol{X}$ 不是可行域 D 的顶点。

(2) 若 $\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点，则它一定不是基可行解。

$\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点，若是基可行解，对应的向量组 $\boldsymbol{P}_1$，…，$\boldsymbol{P}_m$ 线性独立。当 $j>m$ 时，有 $x_j=x_j^{(1)}=x_j^{(2)}=0$，由于 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 是可行域的两点。应满足

$$\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{P}_j x_j^{(1)}=\boldsymbol{b}\quad 与\quad \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{P}_j x_j^{(2)}=\boldsymbol{b}$$

将这两式相减，即得

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}_j (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) = 0$$

因 $\boldsymbol{X}^{(1)} \neq \boldsymbol{X}^{(2)}$，所以上式系数（$x_j^{(1)} - x_j^{(2)}$）不全为零，故向量组 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_m$ 线性相关，与假设矛盾，即 $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解。

引理 2 若 K 是有界凸集，则任何一点 $X \in K$ 可表示为 K 的顶点的凸组合。

证明略，如图 1-3 所示。

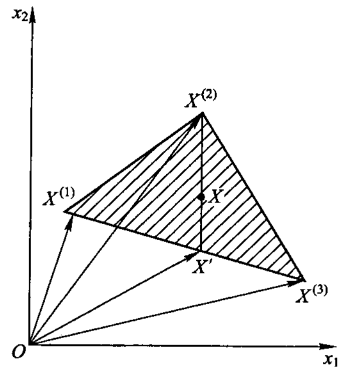

图 1-3 有界凸集顶点的凸组合

定理 1.3 若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。

证明 设 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$，…，$\boldsymbol{X}^{(k)}$ 是可行域的顶点，若 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点且目标函数在 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 处达到最优 $z^* = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)}$（不妨设标准型是 $z^* = \max z$），$\boldsymbol{X}^{(0)}$ 可以用顶点表示为

$\boldsymbol{X}^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{X}^{(i)}$ （$\alpha_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$），将 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$，…，$\boldsymbol{X}^{(k)}$ 中使 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(i)}$ 最大的顶点记为 $\boldsymbol{X}^{(m)}$。于是

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} = \boldsymbol{C} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{X}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{C}\, \alpha_i \boldsymbol{X}^{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{C}\, \alpha_i \boldsymbol{X}^{(m)} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(m)}$$

由假设 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为最优解，所以 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(m)}$，即目标函数可在顶点 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 处达到最优。

进一步推广有如下定理。

定理 1.4 若目标函数在 k 个顶点处达到最优值（$k \geqslant 2$），则在这些顶点的凸组合上也达到最优值。

例 1-4 下列线性规划问题，当基 $\boldsymbol{B}$ 分别取（$\boldsymbol{P}_3$，$\boldsymbol{P}_4$），（$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$），（$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_3$）时，求对应的基解。

$$\min z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

解 如果取基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_3,\ \boldsymbol{P}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$，则有基解 $\boldsymbol{X}_B = (x_3,\ x_4)^{\mathrm{T}} = (4/5,\ 16/5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_N = (x_1,\ x_2)^{\mathrm{T}} = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}$，是非退化的基可行解。

如果取基 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则有基解 $\boldsymbol{X}_B=(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}=(0, 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_N=(x_3, x_4)^{\mathrm{T}}=(0, 0)^{\mathrm{T}}$，是退化的基可行解。

如果取基 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，则有基解 $\boldsymbol{X}_B=(x_1, x_3)^{\mathrm{T}}=(8, -4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_N=(x_2, x_4)^{\mathrm{T}}=(0, 0)^{\mathrm{T}}$，不是可行解。

1.2.2 线性规划的图解法

对于仅含两个（至多三个）决策变量的线性规划问题，由于其约束条件是在平面（或三维）空间里围成的区域，因此可以用作图的方法来分析，求得问题的最优解。具体方法及步骤如下。

① 用决策变量建立平面（或三维）坐标系。

② 每个约束条件都代表一个半平面，所有约束条件为各个半平面交成的区域。具体做法为对每个约束条件先取等式约束形式得到一条直线，并在坐标图中画出该直线，然后取一已知点来判断该点的坐标是否满足此约束条件。若满足，则找到该约束条件的半平面在已知点的同侧，否则在所画直线的另一侧。若所有的约束条件半平面均已画出，则可在坐标系中得到一个区域，如图 1－4 中的阴影部分。

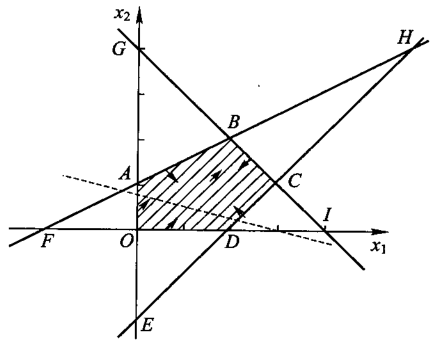

图 1－4　可行域

③ 给目标函数任取一个常数值 z_0，得到一个直线（或平面），称为目标函数等值线。在该等值线上，目标函数的值均为 z_0。画两条平等的目标函数等值线，则可确定目标函数增加（或下降）的方向并用箭头标出。沿着使目标函数更优的方向，在约束条件围成的阴影区域平移目标函数等值线，直至使目标函数获得最优的交点，该交点就是最优解点。

④ 对上面找出的图上的最优解点，写出其所在的约束直线方程，一般有两条直线，联立求解即可得最优解的坐标。

例 1－5　用图解法求解下面的线性规划问题。

$$\max z=2x_1+5x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 4\\ -x_1+2x_2\leqslant 2\\ x_1-x_2\leqslant 2\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 建立坐标系，由 $x_1 \geqslant 0$ 和 $x_2 \geqslant 0$ 知可行域在坐标系的第Ⅰ象限中。

画出直线 $x_1+x_2=4$，$-x_1+2x_2=2$，$x_1-x_2=2$，$x_1=0$ 和 $x_2=0$。

可行域就是这 5 条直线围成的多边形 $OABCD$（图 1-4 中的阴影部分）。多边形的顶点 O，A，B，C，D 称为可行域的顶点。

给定目标函数两个值 0 和 10，则可得两条目标等值线 $2x_1+5x_2=0$ 和 $2x_1+5x_2=10$，向目标增大的方向平移目标等值线。由此得到与可行域的最后一个交点 B。

B 是直线 $x_1+x_2=4$ 与直线 $-x_1+2x_2=2$ 的交点，联立求解可得 B 点的坐标为(2，2)，即 $x_1=2$，$x_2=2$ 是最优解，最优值为 $\max z=2\times 2+2\times 5=14$。

此例中可行域是有界区域，而且最优解是唯一的。

例 1-6 用图解法求解下面的线性规划问题。

把例 1-5 中的目标函数改为 $z=x_1+x_2$，可行域不变，而目标等值线经过平移后，与可行域最后的交点是线段 BC，而不是一个点，称这个线性规划问题有无穷多解，即该问题的最优解不是唯一的，线段 BC 上任一点的目标函数值都是最大值，因而这些点均为最优解，如图 1-5 所示。

这个例子说明，最优解可能是唯一的，也可能有无穷多个。用图解法也可以求线性规划问题的其他类型解。

例 1-7 用图解法求解下面的线性规划问题

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 2\\3x_1+4x_2\geqslant 12\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

如图 1-6 所示，由于约束条件围不成区域（又称矛盾方程），则该线性规划问题无可行解。

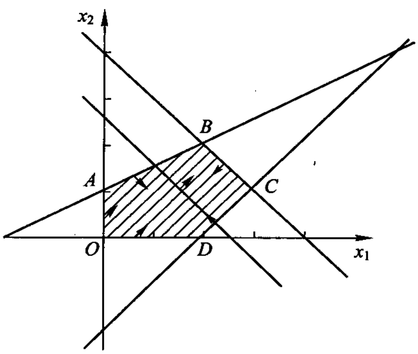

图 1-5 可行域与目标函数

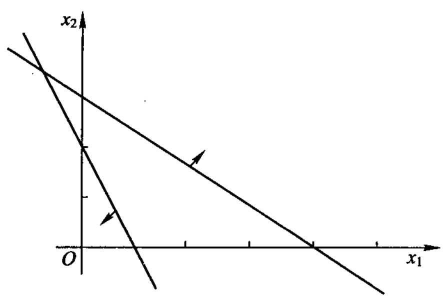

图 1-6 矛盾方程示意图