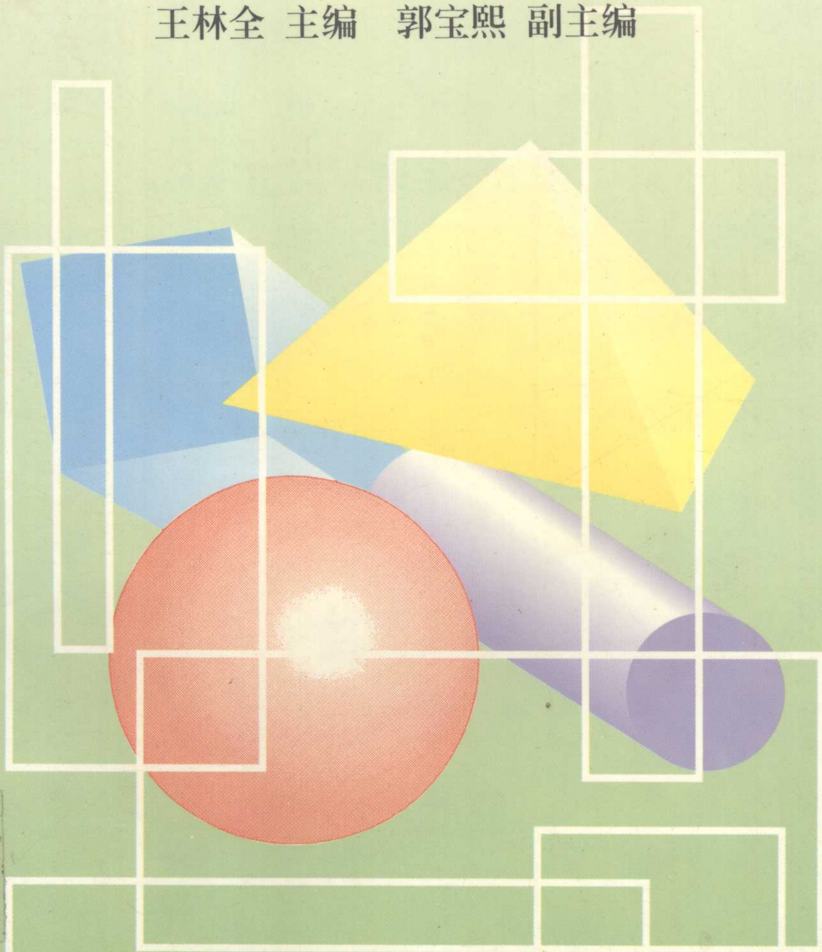
初等几何研究教程

王林全 主编　郭宝熙 副主编



暨南大学出版社

初等几何研究教程

主　编　王林全
副主编　郭宝熙

暨南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初等几何研究教程/王林全主编；郭宝熙副主编．—广州：暨南大学出版社，2001.3

ISBN 7—81029—520—9

Ⅰ．初…
Ⅱ．王…郭…
Ⅲ．初等几何
Ⅳ．O123

初等几何研究教程

主　　编◯王林全
副 主 编◯郭宝熙
责任编辑◯刘蔚绥
暨南大学出版社出版发行
地址：中国广州暨南大学　510630
电话：编辑部（8620）85225262/85220289/85225277
　　　发行部（8620）85223774
传真：（8620）85221583/85223774
湖南省地质测绘印刷厂印刷
1996年8月第1版
2001年3月第2次印刷
850×1168毫米　1/32
14.75印张
39.3万字
印数：8001—11000册
定价：16.00元

前　言

“初等几何教程”是高等师范院校数学教育专业一门重要的专业基础课。该课程的目的是培养师范生掌握初等几何的基础知识，从而形成用高等数学观点分析中学数学教材的能力。本书是参考国家教委颁布的《普通高等师范学校数学教育专业教育教学基本要求》（试行）中有关章节的要求编写的。在编写过程中，我们吸收了编者在《初等几何教程》方面多年的教学经验，吸收了近年来中学数学课程改革的新成果，以及有关的教学研究成果。

本书按师范院校数学教育专业本科教学要求编写，也照顾专科院校的教学需要，内容上有伸缩性，可供不同层次学校选择使用。

为了扩大师范生视野，提高他们的阅读能力，我们在每一章中都附有参考材料，包括有对每章知识的补充，背景材料介绍，以及对中学数学教材中相关内容的教学研究，指出中学有关几何的各章节重点、难点、以及在教学中应注意的问题，我们相信，这些材料对于师范生毕业后从事中学数学教学工作，是很有价值的。正因为本书紧密联系中学数学教学需要，因此，本书也可以作为在职教师岗位培训、业余进修使用，以及有关教学研究人员参考。

参加本书编写的有龚洵禹（第一章），郭宝熙（第二章），彭立民、魏志雄（第三章），王林全（第四章），何小亚、章冠球（第四章习题以及学习参考），岑能杞（第五章），邬振明、罗辉

(第六章)，张胜强（第七章)，张灵、郑少殷（第八章)。王林全担任主编，郭宝熙担任副主编，由主编、副主编拟定写作大纲，并负责全书统稿、审稿工作。

全书大部分插图由何小亚负责复制。

本书由广东省高师数学教育研究会组织编写，并得到广东省高等教育厅教学处的支持和资助，也得到华南师范大学数学系的大力支持，我们谨向有关领导和研究会全体同志表示衷心感谢，希望广东省高师院校教材建设取得更丰硕的成果。

1996.1

目 录

前言…………………………………………………………………… (1)

第 1 章　几何的体系结构

§1.1　几何结构的意义 ……………………………………… (2)
§1.2　欧氏《原本》的结构 ………………………………… (3)
§1.3　希尔伯特公理体系…………………………………… (10)
§1.4　中学几何逻辑结构…………………………………… (14)
§1.5　中学几何教学的基本要求…………………………… (17)
　　　习题一………………………………………………… (23)

第 1 章学习参考

§1.1′　古希腊几何 ………………………………………… (25)
§1.2′　非欧几何简介……………………………………… (35)
§1.3′　笛卡儿与解析几何 ………………………………… (38)
　　　习题一解答与提示…………………………………… (41)
第 1 章参考资料 …………………………………………… (41)

第 2 章　几何证明概述

§2.1　命题及其结构………………………………………… (43)
§2.2　证明的意义…………………………………………… (50)
§2.3　直接证法与间接证法………………………………… (52)
§2.4　综合法与分析法……………………………………… (56)

§2.5　演绎法与归纳法……………………………………………(59)
§2.6　几何入门教学……………………………………………(62)
　　　习题二……………………………………………………(71)

第 2 章学习参考

§2.1′　几何推理结构 ………………………………………(74)
§2.2′　数学中的合情推理 …………………………………(83)
§2.3′　充分条件与必要条件 ………………………………(87)
§2.4′　同一法则 ……………………………………………(90)
　　　习题二解答与提示 …………………………………(91)
第 2 章参考资料 ………………………………………………(96)

第 3 章　几何证题的一般方法

§3.1　证度量关系…………………………………………(98)
§3.2　证明位置关系 ……………………………………(116)
§3.3　几何证明的教学 …………………………………(143)
　　　习题三 ……………………………………………(147)

第 3 章学习参考

§3.1′　关于几何证题的其它证明方法……………………(154)
§3.2′　中学生在几何证题中的常见错误…………………(166)
　　　习题三解答与提示…………………………………(177)
第 3 章参考资料………………………………………………(192)

第 4 章　初等几何变换

§4.1　合同变换 …………………………………………(194)
§4.2　平移及其应用 ……………………………………(199)
§4.3　旋转及其应用 ……………………………………(205)

§4.4　轴反射（轴对称）及其应用 …………………… (212)
§4.5　位似变换 …………………………………………… (221)
§4.6　几何变换的教学 ………………………………… (228)
习题四 ……………………………………………… (233)

第4章学习参考

§4.1′　变换群 ……………………………………………… (237)
§4.2′　相似变换及其应用 …………………………… (241)
§4.3′　反演变换简介 …………………………………… (245)
习题四解答与提示 ……………………………… (249)
第4章参考资料 ……………………………………………… (256)

第5章　几何计算

§5.1　线段的度量 …………………………………… (258)
§5.2　角与弧的度量 ………………………………… (263)
§5.3　斯特瓦尔特定理及其应用 ………………… (265)
§5.4　几何计算的教学 ……………………………… (268)
习题五 ……………………………………………… (275)

第5章学习参考

§5.1′　面积计算 ………………………………………… (278)
§5.2′　解三角形 ………………………………………… (280)
习题五解答与提示 ……………………………… (282)
第5章参考资料 ……………………………………………… (288)

第6章　几何轨迹

§6.1　轨迹的意义和性质 …………………………… (290)
§6.2　轨迹的探求 …………………………………… (296)

§6.3　轨迹的基本类型 …………………………………………… (307)
§6.4　轨迹的教学 ………………………………………………… (308)
　　习题六 ……………………………………………………… (310)

第 6 章学习参考

§6.1′　解析法在求轨迹中的应用 …………………………………… (314)
§6.2′　参数法及其应用 ……………………………………………… (317)
§6.3′　用综合法求轨迹 ……………………………………………… (319)
　　习题六解答与提示 ………………………………………………… (326)

第 7 章　几何作图

§7.1　尺规作图基础 ………………………………………………… (335)
§7.2　常用作图方法 ………………………………………………… (340)
§7.3　几何作图的教学 ……………………………………………… (355)
　　习题七 ……………………………………………………… (357)

第 7 章学习参考

§7.1′　尺规作图不能问题 ………………………………………… (360)
§7.2′　等分圆周问题 ……………………………………………… (368)
　　习题七解答与提示 ………………………………………………… (370)
第 7 章参考资料 …………………………………………………… (371)

第 8 章　立体几何

§8.1　直线与平面的位置关系 ……………………………………… (373)
§8.2　多面体 ………………………………………………………… (388)
§8.3　旋转体 ………………………………………………………… (399)
§8.4　立体几何教学的几个关键问题 ……………………………… (405)
　　习题八 ……………………………………………………… (411)

第 8 章学习参考

§8.1′ 三面角与多面角 …………………………………… (417)
§8.2′ 凸多面体的欧拉定理 ……………………………… (422)
§8.3′ 正多面体 ………………………………………………… (424)
§8.4′ 立体图形画法 ………………………………………… (428)
§8.5′ 截面与表面展开图 ………………………………… (432)
习题八解答与提示 ………………………………… (440)
第 8 章参考资料 ……………………………………………… (461)

第1章 几何的体系结构

§1.1 几何结构的意义
§1.2 欧氏《原本》的结构
§1.3 希尔伯特公理体系
§1.4 中学几何逻辑结构
§1.5 中学几何教学的基本要求

几何学是一门非常古老的数学学科，它以现实世界的空间形式作为主要研究的对象.在历史上，几何学最早成为科学数学的典范，对其他数学学科的建立和发展有着极为深刻的影响，起了良好的推动作用.

本章简要论述几何结构的意义，介绍欧几里得《几何原本》的体系结构和希尔伯特的公理体系，并简述目前中学几何的逻辑结构及其教学的基本要求.

§1.1 几何结构的意义

几何结构，或称几何的体系结构，是指构成几何学的基本理论体系及其逻辑结构.

众所周知，确立定义、推证定理是几何学中经常要做的工作.对新的概念确立定义，就是要明确规定新概念的属性，准确地揭示其内涵或外延，使人明白新概念所指的是什么.而要明确规定新概念的含义，就必须要用到已经明确的旧概念，一切新概念都必须要沿用旧概念才能引导出来.这样一来，就势必有一些概念不可能用已经定义过的概念来给它下定义.因此，任何一个几何体系都必须有若干个无需定义的基本概念作为解释其余概念的本源.

同样的道理，推证每一定理时都必须要有所依据，即要根据已经证明为真的命题来推导出新的命题成立，而已证命题的推导又需要比它更早成立的命题作为根据.如此追溯，总有一些命题不可能被证明.因此，任何一个几何体系都必须要有一些称为公理的基本命题，不加证明地作为推导其他命题的原始依据.

概括起来说，若干基本概念加上若干条公理，称为一个公理体系，构成一种几何的基础理论和基本结构.在这个基础上，其余概念都必须严格定义，其余的命题都必须给出证明.这便是几何结构

的基本含义.现代完整的几何学正是立足在公理体系这一基础结构上逐步发展起来的.

§1.2 欧氏《原本》的结构

1 古代几何学概况

自古以来,数学就是人类认识自然,改造自然的重要工具之一.它在实践中产生和发展又反过来应用于实践.历史还告诉我们,一个数学学科的发展是由汇集不同方面的成果,逐步积累而成的,常常需要几十年、几百年甚至上千年的努力才能迈出有决定意义的步伐;即使花费漫长的时间,众多学者为之奋斗,也不易把一个学科建设得完美无缺,已经取得的成绩仅能作一个新的开始,还有许多工作有待完成.几何学的产生和发展正是如此.

古代埃及是最有代表性的几何发源地.据史料记载,早在公元前3000年左右埃及人就会使用几何知识.在齐阿普斯王朝(公元前2900年左右)时代建筑起来的金字塔,塔基非常接近于一个正方形,每边长755.79英尺,任何一边与此值相差不超过$4\frac{1}{2}$英寸,其正方程度和水平程度的平均误差还不到万分之一.

埃及人研究几何的主要起因据说是土地面积的测量.相传古代埃及的尼罗河每年泛滥,致使河边陆地流失,河床变更,两岸田土被淹,地界消失.每当洪水泛滥一次,地界便要重划一次,正是由于这种实际的需要,古代埃及人才对几何学发生浓厚的兴趣并去研究它,而"几何学"这一名称原本就是"土地测量"的意思.

能够证明埃及人的确在几何学方面有着非凡创造的实物,是

一本世界上最古老的数学书，即纸草书"阿默斯手册".这本书是从埃及古都底比斯(Thebes)的废墟中发现的，1858 年为英国人莱因特(A.H.Rhind)购得，后被收藏于伦敦博物馆.该书是埃及人阿默斯(Ahmes)大约在公元前 1700 年所著的一本专门记载数学问题的书籍，书中共记载了算术、几何问题、杂题 85 个，当中有不少关于面积计算方法以及关于金字塔的几何问题.

根据纸草书的记载和其他的考古发现，古代埃及人已经掌握了三角形、四边形、梯形、圆形面积和立方箱体、柱体及一些其他图形体积的计算方法.比如，埃及人计算四边形田地面积的近似方法是$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$(其中 a、b、c、d 表示四边)；当有些田地是三角形时，他们便认为 d 没有了，面积算法变成$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}$，古埃及人计算圆面积的方法准确得惊人：圆面积等于直径减去它的$\frac{1}{9}$，然后再平方，即$\frac{64}{81}d^2$(其中 d 表示直径)，这与今天的圆面积公式$\frac{\pi d^2}{4}$相比较，相当于取 π 的近似值等于 3.16049.

埃及几何中了不起的成就还在于他们已经知道了圆柱体和直棱柱的体积计算公式——底面积乘以高，并以此来计算这些形状的仓库的容积.但是，他们最光辉的成果要数四棱锥台体积公式的发现，若用现在的记号，当底面是正方形时，他们的计算公式是 $V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$，其中 h 是高，a 和 b 分别是上下底的边.这公式之所以最为了不起，不仅因为它完全正确，而且表达形式是对称的.

相传埃及人曾在绳上打结，把全长分为长各为 3:4:5 的三段，然后用来形成直角三角形.可见他们知道边长比为 3:4:5 的三角形是直角三角形.

关于几何面积、体积的计算，古代巴比伦人也曾取得与埃及人

类似的成就.以巴比伦(Babylon)为首都的巴比伦王国大约建立于公元前2000年,位于现今的伊拉克境内.巴比伦人使用楔形文字在泥板上记载他们的文明.从公元前15世纪的泥板上,可以知道那时的巴比伦人已会计算矩形、直角三角形、梯形等图形的面积,以及平行六面体、柱体的体积,并掌握了$(a+b)^2$的展开式和勾股定理.古巴比伦最先使用以下度量制:一个星期为7天,圆周分为360度,每度60分,每分60秒;一小时等于60分,一分钟等于60秒,等等.

我国是世界上四大文明古国之一.考古学发现:在距今六七千年前新石器时代晚期制造的陶器上,我国已有了各种精美的几何图案.约公元前2000年以前,我国古代的劳动人民就已经懂得了"规"和"矩"的使用."规"即为圆规;"矩"由相交成直角的长短两尺合成,短的叫勾,长的叫股,尺上有刻度,可用于画直线,作直角,进行测量,有时还可以代替圆规,可说是一种万能几何工具.我国古代的数学著作《九章算术》、《周髀算经》等所载几何问题甚多,源流极古.据记载,最迟在公元前1100年左右,我国已发现了勾股定量,有"勾广三、股修四、径隅五"之说,最值得引以为荣的是我国古代数学家对圆周率的研究,其精确程度一直领先于世.南北朝时代的伟大数学家祖冲之是世界上将π值精确到七位小数的第一人.

战国时代的墨子(约公元前480—390)堪称我国古代几何学的大家,所著《墨经》15卷,其中的几何学部分定义确切,立论精辟.如《墨经》中对平行线(面)、中心、正方形、圆(球)的定义分别是:

"平,同高也",

"中,同长也",

"圜,一中,同长也",

"方,柱隅四讙也".

意思是说:

平行线(面)是两条(个)在每一处距离都相同的直线(或平面).

中心是这样一个点,它和图形边缘上每一点等距.

圜(即圆或球)有且只有一个中心,它和圆周(球面)上每一点的距离相同.

正方形是四条边相等四角相等的图形.

由此可见我国古代几何学的发达程度.

古代埃及的几何学,自阿默斯以后几乎没有什么进步,埃及(也包括其他文明古国)虽然积累了许多几何知识和一些经验公式,但这些知识只是零星的,没有成套的记号,缺乏意识的抽象思维,没有一般的方法论,几乎没有证明和推理.几何学还没有成为一门独立的、系统的科学.

2 欧几里得的《几何原本》及其结构

根据历史记载,大约从公元前七世纪左右开始,古代希腊逐步挤身于文明古国之列.随着社会分工的进步和生产力的提高,希腊经济出现了空前繁荣的景象.与此同时,希腊人创造了光辉灿烂的文化,哲学、艺术、文学、数学、天文、物理学等各方面百花齐放,异彩纷呈.借助于通商和访问,希腊人吸收了古代埃及、巴比伦等国的文明成果,并把哲学中的形式逻辑应用于数学命题的证明,使几何学从零散的状态变为一门理性的独立的学科,成为最早成熟的科学典范.

在古代希腊,有许许多多的数学家为几何学的发展作出过卓越的贡献.塔利斯(Thales,约公元前640—546)最先开始了几何的证明;毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前580—500)发现并最早证明了“勾股定理”,还把算术与几何紧密联系起来加以研究;柏拉图(Plato,约公元前430—349)及其学派把几何奠基在逻辑的基础