普通高等教育"十一五"规划教材

数学物理方程

陈才生 主编

李 刚 周继东 王文初 编

科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

数学物理方程

陈才生 主编

李 刚 周继东 王文初 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以方法为主线，内容包括偏微分方程的基本概念、二阶线性偏微分方程的分类与标准型、二阶常系数偏微分方程定解问题的经典解法、一阶拟线性偏微分方程的基本理论和定解问题的求法、两类特殊函数及应用.本书内容丰富、系统性强、叙述详尽，具有较强的可读性.每一章配备了较多类型的例题和习题，供读者阅读和练习.书末附有大部分习题的答案与提示.

本书可作为数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生和水利、土木、环境、交通、电子信息和大气科学等工科专业本科生或研究生的教学用书，也可作为从事本门课程教学的教师和有关科研工作者的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/陈才生 主编；李刚，周继东，王文初 编.—北京：科学出版社，2008

(普通高等教育“十一五”规划教材)

ISBN 978-7-03-021512-3

Ⅰ.数… Ⅱ.①陈… ②李… ③周… ④王… Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 042040 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：陈丽珠

责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2008 年 7 月第一次印刷 印张：20

印数：1—4 500 字数：380 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前 言

"数学物理方程"是以物理、工程技术和其它科学中出现的偏微分方程为主要研究对象, 并且主要介绍求线性偏微分方程精确解方法的一门数学基础课程. 它不仅仅是数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生的一门重要的专业基础课, 而且也是水利、土木、环境、电子信息和大气科学等工科专业本科生和研究生不可缺少的专业基础课.

本书编者以多年来对本校工科研究生和数学系本科生讲授"数学物理方程"的教学实践为基础, 参阅了国内外有关教材和文献, 编写了这本更加突出实用性的教学参考书. 它可以作为工科有关专业的本科生和研究生用的"数学物理方程"课程的教材或教学参考书, 也可以作为数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生的教学用书. 对于有关科研工作者, 本书也是一本合适的参考书.

数学物理方程所涉及的范围非常广泛, 内容十分丰富. 由于它的物理背景直接来源于自然现象和工程技术中的实际问题, 所以需要解决的新模型方程和新方法会不断产生. 因此这门课程应是一门实用的课程, 学生通过学习要掌握有关偏微分方程的基本概念、基本原理以及求解偏微分方程的各种方法与技巧. 所以本书在叙述一般理论的同时, 重点是根据各类定解问题的经典解法来展开讨论. 我们对各章内容进行了合理的安排, 使读者能够有条理、正确地理解所学内容.

全书共分 11 章. 第 1 章介绍了偏微分方程的基本概念、线性叠加原理. 我们还通过具体物理问题导出了三类典型方程以及定解问题的提法. 第 2 章讨论了二阶线性偏微分方程的分类与标准型, 这其中包括了常见的两个自变量的分类与标准型, 也包括了多个自变量的分类与标准型. 第 3 章介绍了求解波动方程初值问题的特征线方法、球面平均值方法和降维法, 同时给出了一维波动方程的达朗贝尔 (d'Alembert) 解和二维及三维波动方程解的泊松 (Poisson) 公式的物理意义. 第 4 章详细叙述了分离变量法, 它是求解有界区域上数学物理方程最广泛使用的方法之一. 考虑到部分工科专业学生可能对傅里叶 (Fourier) 级数比较陌生, 我们先简要复习了正交函数系和傅里叶级数展开理论与主要结果, 然后重点叙述了分离变量法在求解初边值问题中的各种应用. 第 4 章最后介绍了施图姆–刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题. 它是分离变量法的理论基础. 第 5 章和第 6 章讨论了傅里叶变换和拉普拉斯 (Laplace) 变换, 它们是求解无界区域上偏微分方程定解问题的两种常用方法, 并用较多的实例来说明如何使用这两种方法. 在第 7 章里, 对经典的格林 (Green) 函数方法进行了介绍, 并且对一些特殊区域求出了其格林函数. 第 7 章还重点介绍了 δ

函数方法. 这种方法又称基本解方法. 它通过引进 δ 函数 (广义函数) 建立了三种典型方程的基本解, 从而求出定解问题解的积分表达式. δ 函数方法是近代偏微分方程研究的常用方法之一. δ 函数本身在物理、力学和工程技术等学科中也有广泛的应用. 第 8 章介绍的极值原理是热传导方程和拉普拉斯方程所特有的, 它们可用来研究这两类方程的第一初边值问题解的唯一性、稳定性和解的渐近性态. 第 9 章介绍能量积分方法. 这种方法是偏微分方程定性理论研究中的一种基本方法. 它的应用远比极值原理来得广泛. 它可以用来研究定解问题解的唯一性、稳定性、解的能量估计和渐近性态. 第 10 章讨论数学物理和工程技术中经常出现的两类特殊函数 —— 贝塞尔 (Bessel) 函数和勒让德 (Legendre) 函数, 以及在求解薄圆盘型、圆柱型和球 (面) 型等区域中定解问题中的应用. 第 11 章介绍了一阶拟线性偏微分方程初值问题的求解方法.

本书各章都配有精心挑选的习题, 以供读者选择. 为了进一步理解和掌握各章的主要内容, 建议读者完成一定数量的习题. 书末附有大部分计算题的参考答案.

由于本书各章之间基本上是独立的, 因此教师可以根据教学要求适当选取.

全书编写大纲由河海大学陈才生提出, 经编者反复讨论后确定. 第 1、2 章由河海大学周继东执笔, 第 4 章由江苏大学王文初执笔, 第 7 章由南京信息工程大学李刚执笔, 其余章节的编写、全书习题和答案以及全书的修改、编排和校对均由陈才生完成.

陈才生等编写的同名教材 (2002 年东南大学出版社出版) 是本书的重要参考. 本书的编写得到了科学出版社的大力支持和帮助, 各位编者所在学校也给予了全力支持, 江苏凤凰出版集团的宋增民教授也给予了关心. 在此, 编者们一并深情致谢!

由于编者学识有限, 书中难免出现疏漏, 恳请各位读者批评指正, 以期改进.

编 者

2008 年 4 月

目录

第1章 绪 论

1.1 基本概念

在物理学、力学、工程技术和其它学科中, 经常会提出大量的偏微分方程. 它们反映了未知函数关于时间的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系, 同时刻画了物理现象和过程的基本规律. 这些来自物理等学科的偏微分方程, 我们常把它们叫做**数学物理方程**. 它的重要性, 早在 18 世纪初就被人们认识. 例如, 在 1715 年, 泰勒 (Taylor) 将弦线的横向振动问题归结为著名的弦振动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. 以后, 伯努利 (Bernoulli) 从弦发出声音的事实, 得出该方程的三角级数解. 在此基础上, 傅里叶 (Fourier) 在理论上完成了解此方程的方法. 同时, 欧拉 (Euler) 和拉格朗日 (Lagrange) 在研究流体力学、拉普拉斯 (Laplace) 在研究势函数、傅里叶在研究热传导等物理问题中, 都导出了一系列重要的偏微分方程及其求解方法, 取得了重要的成就. 到了 19 世纪, 随着科学技术的发展及对方程的深入研究, 形成了数学中的一门重要分支 —— 偏微分方程理论, 这样又促使了自然科学和工程技术的发展.

本章首先介绍了偏微分方程中的一些基本概念以及从几个物理模型出发, 建立数学物理方程中的三个典型方程 —— 弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯方程. 这不仅仅是因为它们是最简单的偏微分方程, 更是因为它们代表了三种不同类型的方程. 掌握了它们的性质和求解方法, 对学习和研究一般的偏微分方程具有普遍意义和指导意义. 因为对于其它经典的线性方程的主要研究方法, 本质上与这三类方程的研究方法相仿.

本章还对偏微分方程的定解条件、定解问题的提法、叠加原理等内容给予了较详细的叙述, 以便将来使用上的方便.

1.1.1 基本概念和定义

所谓**偏微分方程**, 是指含有未知函数以及未知函数的某些偏导数的等式. 比如, 设 u 是自变量 $x, y, \cdots$ 的未知函数, 那么关于 u 的偏微分方程的一般形式是

$$F(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots) = 0, \tag{1.1.1}$$

其中 F 是关于变量 $x, y, \cdots, u, \cdots$ 的已知函数. 注意 F 可以不显含自变量 $x, y, \cdots$ 和未知函数 u, 但必须含有未知函数 u 的某个偏导数. 涉及几个未知函数及其偏导

数的多个偏微分方程构成一个偏微分方程组. 除非特别说明, 设函数 u 及其出现在方程 (1.1.1) 中的各阶偏导数连续.

出现在偏微分方程中的最高阶偏导数的阶数称为**偏微分方程的阶**. 如果一个偏微分方程对未知函数及它的所有偏导数都是线性的, 且它们的系数都仅依赖于自变量的已知函数, 则这样的偏微分方程称为**线性偏微分方程**. 不是线性的偏微分方程, 则称为**非线性偏微分方程**.

例如, 方程

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ (波动方程)}, \\ &u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ (热传导方程)}, \\ &u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{(拉普拉斯方程)} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

等都是二阶线性偏微分方程, 而方程

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0 \text{ (冲击波方程)}, \\ &u_t + \sigma uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{(KdV 方程)} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

是非线性方程.

对于一个非线性偏微分方程, 如果它关于未知函数的最高阶偏导数是线性的, 则称它是**拟线性偏微分方程**. 例如,Burgers 方程 $u_t + uu_x - \alpha u_{xx} = 0$, 渗流方程 $u_t = \Delta u^m, m > 1$ 等都是二阶拟线性偏微分方程.

对线性偏微分方程而言, 将方程中不含未知函数及其偏导数的项称为**自由项**. 当自由项为零时, 该方程称为**齐次方程**, 否则称为**非齐次方程**. 特别指出, 齐次、非齐次是对线性偏微分方程而言的.

关于方程 (1.1.1) 的解和通解, 我们有如下定义.

设方程 (1.1.1) 的阶数为 m. 函数 $u = u(x, y, \cdots)$ 在区域 Ω 中具有 m 阶的连续偏导数, 且在 Ω 中满足方程 (1.1.1) (即代入到方程 (1.1.1) 得恒等式), 则称 u 为区域 Ω 内方程 (1.1.1) 的**解**, 这个解又称为**古典解**. 进一步地, 如果方程 (1.1.1) 解 u 的表达式中含有 m 个任意函数, 则称 u 是 (1.1.1) 的**通解或者一般解**.

例 1.1.1 设 $u = u(x, y)$, 求二阶线性偏微分方程

$$u_{xy} = xy$$

的通解.

解 原方程可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = xy,$$

两边对 x 积分, 得

$$u_y = \phi(y) + \frac{1}{2}x^2 y,$$

其中 $\phi(y)$ 是任意一阶可微函数. 进一步地, 两边对 y 积分, 得方程的通解为

$$u(x,y) = \int u_y \mathrm{d}y + f(x) = \int \phi(y)\mathrm{d}y + f(x) + \frac{1}{4}x^2y^2 = f(x) + g(y) + \frac{1}{4}x^2y^2,$$

其中 $f(x), g(y)$ 是任意两个二阶可微函数.

例 1.1.2 设 $u = u(\xi,\eta)$, 求下列偏微分方程的通解:

$$u_{\xi\eta} = \lambda u_\xi,$$

其中 λ 是常数.

解 原方程可以改写成

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \lambda u\right) = 0,$$

两边对 ξ 积分, 得

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - \lambda u = \psi(\eta),$$

它可以写成

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\eta}u\right) = \mathrm{e}^{-\lambda\eta}\psi(\eta),$$

两边对 η 积分, 得方程的通解为

$$\mathrm{e}^{-\lambda\eta}u(\xi,\eta) = \int \mathrm{e}^{-\lambda\eta}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta + F(\xi) = F(\xi) + G_1(\eta),$$

即

$$u(\xi,\eta) = \mathrm{e}^{\lambda\eta}F(\xi) + G(\eta),$$

其中 $F(\xi), G(\eta)$ 是任意两个二阶可微函数.

注 1.1.1 从以上定义可以看出, 偏微分方程中有许多概念和定义是常微分方程对应的概念与定义的延伸. 但有些在常微分方程中的概念, 在偏微分方程中就不适宜提出. 比如, n 阶常系数的常微分方程通常有基础解系的概念, 但偏微分方程一

般没有这个概念. 例如, 记 $\phi_m(x,t)=\mathrm{e}^{-(m\pi)^2t}\sin m\pi x$, $\psi_m(x,t)=\mathrm{e}^{-(m\pi)^2t}\cos m\pi x$ $(m=1,2,\cdots)$ 是热传导方程 $u_t=u_{xx}$ 的解, 而函数

$$h(x,t)=C_1\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{4}}\,\mathrm{d}\tau+C_2$$

也是热传导方程的解, 其中 C_1,C_2 是任意常数. 显然, 热传导方程 $u_t=u_{xx}$ 不适宜提基础解系的概念.

1.1.2 一些典型偏微分方程

以下如无特别说明, 自变量 t 表示时间, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 维空间变量. 称微分算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1.1.4}$$

为 n 维拉普拉斯算子. 它是偏微分方程中最主要的算子之一, 它在刚性运动下保持不变, 即在平移和旋转变换下保持不变. 而一阶微分算子

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{1.1.5}$$

称为哈密顿 (Hamilton) 算子, 通常记

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \tag{1.1.6}$$

例 1.1.3 关于函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 的 **n 维波动方程**是

$$u_{tt}=a^2\Delta u, \tag{1.1.7}$$

其中 $a>0$ 为常数. 这是一个二阶常系数线性偏微分方程, 当 $n=1$ 时, 它描述弦的振动或声波在管中的传播. 当 $n=2$ 时, 它描述浅水面上的水波或薄膜的振动. 而 $n=3$ 时, 它描述声波或光波在空间中的传播.

例 1.1.4 当空间中一个导热体的密度和比热容都是常数时, 其温度分布 $u(x,y,z,t)$ 满足**三维热传导方程**

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \tag{1.1.8}$$

其中 $a>0$ 为常数.

在研究粒子的扩散过程时, 例如, 气体的扩散、液体的渗透以及半导体材料中杂质的扩散等, 也会遇到类似的方程.

例 1.1.5 关于函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 $\boldsymbol{n}$ **维拉普拉斯方程**(又称 $\boldsymbol{n}$ **维调和方程**) 是

$$\Delta u=u_{x_1x_1}+u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n}=0. \tag{1.1.9}$$

它的解称为 $\boldsymbol{n}$ **维调和函数**. 拉普拉斯方程在理论上十分重要, 在应用中也非常广泛. 该方程可以用来描述无源静电场的电势、引力场、弹性薄膜的平衡位移、不可压缩流体的速度场、稳态热传导问题的温度分布和其它物理现象.

例 1.1.6 **三维泊松 (Poisson) 方程**

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(x,y,z), \tag{1.1.10}$$

其中 f 是一个描述场源或汇的已知函数. 这是非齐次拉普拉斯方程. 泊松方程表示有源或汇的情况下拉普拉斯方程所描述的物理现象.

以上方程都是二阶线性常系数方程, 它们是本课程的核心内容 (尤其是 $n=1,2,3$ 时). 它们常称为数学物理方程中的三类典型方程.

下面考虑其它几个重要方程.

例 1.1.7 **重调和波**(biharmonic wave)**方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\nabla^4 u=0, \tag{1.1.11}$$

其中 c 为常数, u 表示位移. 在弹性力学中, 一个薄弹性盘受到了轻微振动时满足该方程. 当 u 与 t 无关时, 上述方程化为**重调和** (biharmonic) **方程**

$$\nabla^4 u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0. \tag{1.1.12}$$

它描述了满足 Airy 应力函数 $u(x,y,z)$ 在弹性介质中的应力分布的平衡问题. 在流体力学中, 黏性液体中的流函数 $\psi(x,y,z)$ 也满足该方程. 它是一个 4 阶的线性偏微分方程.

例 1.1.8 **梁的横振动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \tag{1.1.13}$$

其中常数 $b^2=EI/\rho$; 这里 E 为弹性模量, I 为转动惯量, ρ 为密度. 如果梁受到横向外力 $F(x,t)$ 作用, 则梁的横振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{F(x,t)}{\rho}. \tag{1.1.14}$$

例 1.1.9　在浅水波的研究中常常会碰到 Korteweg-de-Vries 方程 (简称 KdV 方程), 它是一个三阶拟线性方程

$$u_t + \sigma u u_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{1.1.15}$$

其中 $\beta, \sigma \neq 0$ 为常数. KdV 方程最初出现在浅水波的研究中, 现在许多物理问题中都引出 KdV 方程, 如等离子体中的磁流体波、离子声波、弹性棒中的纵色散波都会引出 KdV 方程, 还有一大类近双曲型方程都可以化为 KdV 方程.

例 1.1.10　一阶非线性波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.1.16}$$

其中 $c(u)$ 为 u 的已知函数. 该方程可用来描述高速公路的车流量、空气动力学中的激波、水力学中的潮涌波等物理现象与规律.

1.1.3　偏微分方程与常微分方程一些比较

对于一个 n 阶常微分方程, 它的解的全体 (除去可能的一些奇异解外) 依赖于 n 个任意常数. 然而对偏微分方程而言, 其可求解的情形很多, 与常微分方程的解依赖于若干个任意常数相比, 它的自由度往往会更大. 例如, 方程 $u_{xy} = f(x, y)$ 的通解可表示为

$$u(x, y) = \int_a^x \int_b^y f(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \phi(x) + \psi(y),$$

其中 $\phi(x), \psi(y)$ 为两个任意二阶可微函数.

在对偏微分方程的研究中, 人们感兴趣的是解. 比如讨论其解的性质和结构以及求解的方法等. 但求解偏微分方程往往是复杂的. 与常微分方程相比, 它的解一般来说很难用通解形式给出来, 即使对于线性方程也是如此. 所以对偏微分方程的求解往往更多的是研究其在一些特定条件下的解, 并称这些用来帮助决定特解的条件为**定解条件**.

常微分方程同偏微分方程在解的存在性方面也有相当大的差别. 对常微分方程有解的存在性定理, 即在相当一般 (通常是连续和局部李普希茨条件) 的条件下可以证明其解是局部存在的. 而对偏微分方程来说, 虽然对许多常见的偏微分方程在不考虑定解条件时, 解有很大的自由度. 但也有条件非常好的偏微分方程, 即使是在非常小的局部范围内, 解也是不存在的. 这方面第一个无解方程的例子是 Hans Levy 在 1957 年给出的. 这个例子曾被认为是 20 世纪 60 年代偏微分方程的一大里程碑, 它的产生使人们认识到偏微分方程的研究同常微分方程相比有本质的不同. Hans Levy 所构造的方程是一个具有多项式系数的一阶线性偏微分方程, 即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, t), \tag{1.1.17}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$, f 为某个在 $\mathbb{R}^3$ 原点附近无穷次可微的光滑函数. Hans Levy 证明了方程 (1.1.17) 在原点的某个邻域内不存在解 u.

因此, 由于偏微分方程的研究方法与常微分方程相比有很大的不同, 从而形成了两个独立的数学分支. 然而尽管有这些差别, 常微分方程中的理论和方法对于偏微分方程的研究而言仍是相当重要的.

1.1.4 学习偏微分方程的典型困难

在学习偏微分方程时, 下面几点可能过于一般化和笼统, 但是记住它们是有用的:

(1) 大多数偏微分方程是不可能求出显示解的;

(2) 偏微分方程的变量越多, 研究起来就越困难;

(3) 高阶方程要比低阶方程困难;

(4) 方程组要比单个方程困难.

1.2 三类典型方程的导出

下面将通过几个不同的物理模型来导出数学物理方程中的三类典型方程, 这三类方程也是我们以后主要的研究对象. 事实上, 本课程中所涉及的偏微分方程绝大多数都具有物理背景, 它们是物理现象的数学描述, 从而实现用数学的方法来研究物理问题. 我们首先导出一维波动方程.

例 1.2.1 弦的微小横振动问题

设有一根长为 L 均匀柔软富有弹性的细弦, 平衡时沿直线拉紧. 在受到初始小扰动下, 作微小横振动. 试确定该弦的运动方程.

先对几个物理术语给出解释. 所谓细弦, 就是与张力相比, 弦的重量可以忽略不计. 有弹性表示张力的大小可按胡克 (Hooke) 定律来计算. 柔软是指弦可以弯曲, 同时发生于弦中张力的方向总是沿着弦所在曲线的切线方向. 横振动是指弦的运动只发生在一个平面内, 且弦上各点的位移与弦的平衡位置垂直. 微小横振动是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小.

取定弦的运动平面坐标系是 Oxu, 弦的平衡位置为 x 轴, 弦的长度为 L, 两端固定在 O, L 两点. 用 $u(x,t)$ 表示弦上横坐标为 x 点在时刻 t 的位移 (图 1.1). 由于做微小横振动, 故 $u_x \approx 0$. 因此 $\alpha \approx 0, \cos\alpha \approx 1, \sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x \approx 0$, 其中 α 表示在 x 处切线方向同 x 轴的夹角, 见图 1.1. 下面用微元方法建立 u 所满足的偏微分方程.

在弦上任取一段弧 $\overline{MM'}$, 考虑作用在这段弧上的力. 作用在这段弧上的力有张力和外力. 可以证明, 张力 T 是一个常数, 即 T 与位置 x 和时间 t 的变化无关.

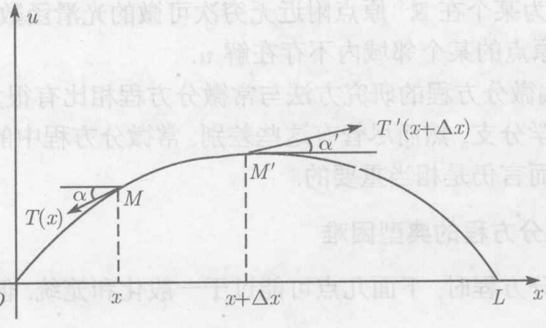

图 1.1

事实上, 因为弦振动微小, 则弧段 $\overline{MM'}$ 的弧长

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x\approx\Delta x.$$

这说明该段弧在整个振动过程中始终未发生伸长变化. 于是由 Hooke 定律, 张力 T 与时间 t 无关. 下面还将看到, T 与 x 也无关.

因为弦只作横振动, 在 x 轴方向没有位移, 故合力在 x 方向上的分量为零, 即

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha'-T(x)\cos\alpha=0.$$

由于 $\cos\alpha'\approx 1,\cos\alpha\approx 1$, 所以 $T(x+\Delta x)=T(x)$, 即张力 T 与 x 无关. 于是, 张力是一个与位置 x 和时间 t 无关的常数, 仍记为 T.

作用于小弧段 $\overline{MM'}$ 的张力沿 u 轴方向的分量为

$$T\sin\alpha'-T\sin\alpha\approx T(u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)).$$

设作用在该段弧上的外力密度函数为 $F(x,t)$(不妨设为连续函数), 那么弧段 $\overline{MM'}$ 在时刻 t 所受沿 u 轴方向的外力近似地等于 $F(x,t)\Delta x$. 由牛顿 (Newton) 第二运动定律得

$$T(u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t))+F(x,t)\Delta x=\rho\overline{u}_{tt}\Delta x,$$

其中 ρ 是线密度. 由于弦是均匀的, 故 ρ 为常数. 这里 $\overline{u}_{tt}$ 是加速度 u_{tt} 在弧段 $\overline{MM'}$ 上的平均值. 设 $u=u(x,t)$ 二次连续可微. 由微分中值定理得

$$Tu_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\Delta x+F(x,t)\Delta x=\rho\overline{u}_{tt}\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

消去 Δx, 并取极限 $\Delta x\to 0$ 得

$$Tu_{xx}(x,t)+F(x,t)=\rho u_{tt},$$