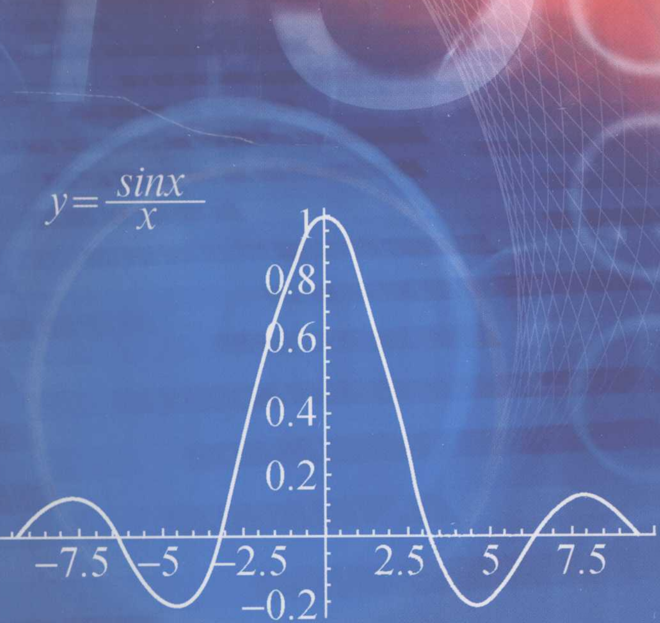
21世纪全国高职高专数学规划教材

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

于 信 徐史明 主 编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪全国高职高专数学规划教材

高等应用数学

于　信　徐史明　主　编

王春杰　王翠珍　李高波　副主编

丁　梅　主　审

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书根据教育部制订《高职高专教育高等数学课程的基本要求》，本着“以应用为目的，必需够用为度”的原则。内容包括：函数的极限与连续，微分与积分应用，空间图形与方程，常微分方程，无穷级数，线性代数，拉普拉斯变换，数理逻辑，数学模型与数学实验。内容上删去了繁琐的推理和证明，代之以形象化的几何解释，降低了抽象性；将多元函数的内容穿插到一元函数相应内容体系中，起到了分散难点的作用；把不定积分作为定积分的计算方法介绍，加强了实用性；编入了数学模型与数学实验，为应用数学埋下了伏笔；模块形式知识编排，方便不同的专业使用。

本书既可以作为高职高专院校理工类和经济类各专业的通用高等数学教材，也可以作为成人高校各专业的高等数学教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/于信，徐史明主编. —北京：北京大学出版社，2007.8
(21 世纪全国高职高专数学规划教材)
ISBN 978-7-301-12279-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①于…②徐…　Ⅲ. 应用数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. C29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 080640 号

书　　名：高等应用数学
著作责任者：于　信　徐史明　主编
责 任 编 辑：梁　勇
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-12279-2/O・0721
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http：//www.pup.cn　　电子信箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　出版部 62754962　编辑部 62765126
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
787 毫米×980 毫米　16 开本　18 印张　381 千字
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：32.00 元

前　言

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的基本要求》，本着"以应用为目的，必需够用为度"的原则，在认真总结高职高专数学教学改革的经验的基础上，由高职高专院校中长期从事数学教学的资深教师编写. 因其模块式的编写方式，本书既可以作为高职高专院校理工类和经济类各专业的通用高等数学教材，也可以作为成人高校各专业的高等数学教材使用.

本书是"21 世纪全国高职高专数学规划教材"之一，它是为了适应日益发展的高职高专教育的需要，以注重基础，降低理论，加强应用，强化能力为指导思想编写的. 在内容编排上，力求体现科学性与实用性的和谐统一，具体反映在：第一，内容上删去了繁琐的推理和证明，代之以形象化的几何解释，降低了抽象性；第二，将多元函数的内容穿插到一元函数相应内容体系中，起到了分散难点的作用；第三，把不定积分作为定积分的计算方法介绍，加强了实用性；第四，编入了数学模型与数学实验，为应用数学埋下了伏笔；第五，模块形式知识编排，方便不同的专业使用. 这也是我们多年教学经验的总结，由于篇幅所限，本书难以囊括各行各业的实际问题，留下了教师发挥的余地，教师在使用时可以根据不同专业的相关问题加以补充.

本书内容包括：函数的极限与连续，微分与积分应用，空间图形与方程，常微分方程，无穷级数，线性代数，拉普拉斯变换，数理逻辑，数学模型与数学实验，书后配有习题参考答案.

本书配有活页习题册、电子教案各一套，便于教师进行作业批改与多媒体教学.

本书由于信，徐史明担任主编，王春杰，王翠珍，李高波任副主编，第 1 章，第 2 章，第 3 章，第 4 章，第 5 章由于信，王春杰，王翠珍，王文静，李高波编写，第 6 章，第 7 章，第 8 章，第 9 章，第 10 章，第 11 章由丁梅，于蕴，曲富丽，周杨，吴晓明，徐史明，潘瑛芳编写. 习题验证由甄海燕完成. 丁梅承担了本书的主审工作，并提出了许多宝贵的意见.

本书的编写我们尽了很大的努力，但水平所限，加之教学中的许多问题的改革尚在探索中，不当之处在所难免，恳请读者批评指正，以便进一步修改完善. 同时，向支持本书编写和出版的各界同仁表示衷心感谢.

编者
2007.5

目　录

第 1 章　函数　极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，极限方法是高等数学中研究问题的一种基本方法，连续性是很广泛的一类函数所具有的基本性质. 本章将在复习函数的基础上，着重介绍函数的极限和连续性等基本概念以及它们的一些主要性质.

1.1　函　数

1.1.1　预备知识

1. 邻域

设 δ 是一正数，称数轴上的点构成的集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的 δ **邻域**，常以开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 表示，记作 $U(x_0,\delta)$，

即
$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

其中点 x_0 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**. 如图 1-1 所示.

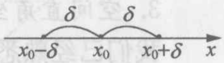


图 1-1

有时候用到的邻域需要把邻域的中心点去掉. 点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 后，称为点 x_0 **的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

2. 平面区域

平面上由一条曲线或几条曲线围成的部分称为区域. 围成区域的曲线称为区域的边界；不包括边界的区域称为**开区域**，包括边界的区域称为**闭区域**，包括部分边界的区域称为**半开半闭区域**.

如果一个区域可以被包含在以原点为圆心的某一圆内，则称这个区域为**有界区域**，否则称为**无界区域**.

例如，圆形区域：$x^2+y^2\leqslant 1$；矩形区域：$1\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant 1$，都是有界闭区域；三角形区域：$x<3, 0\leqslant y\leqslant 2x$，是有界半开半闭区域；环形区域：$1<x^2+y^2<4$，是有界开区域；半平面区域：$x+y>2$，是无界开区域. 如图 1-2.

以平面上的点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta(\delta>0)$ 为半径的圆的内部的点构成的集合称为**点 P_0 的 δ 邻域**，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)\}=\{P\mid |P_0P|<\delta\}=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

其中 P_0 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**. 如图 1-3 所示.

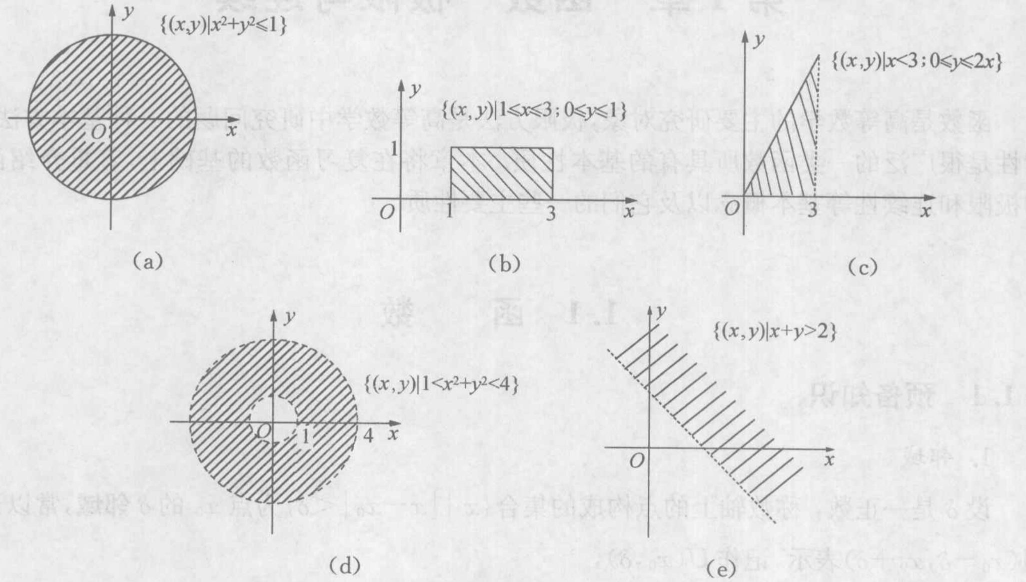


图 1-2

3. 空间直角坐标系

我们已经熟悉了平面直角坐标系以及由此构成的四个象限. 为了建立空间图形与数、方程的联系,下面我们简单介绍空间直角坐标系.

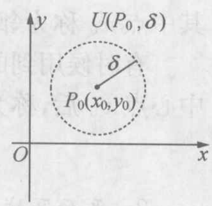


图 1-3

过空间一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位,这三条轴分别叫做 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴,它们的正方向要符合右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向(如图 1-4),这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系,点 O 叫做坐标原点(或原点).

三条坐标轴中的任意两条确定的平面 xOy、yOz 和 zOx 称为坐标面,三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限,如图 1-5 所示.

设 M 为空间一已知点,过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P、Q、R(如图 1-6). 这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴的坐标依次为 x、y 和 z,于是空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z),称 (x,y,z) 为点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$. x、y 和 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标;反过来,给定一个有序数组 (x,y,z),我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐

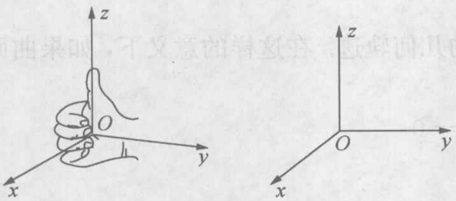


图 1-4

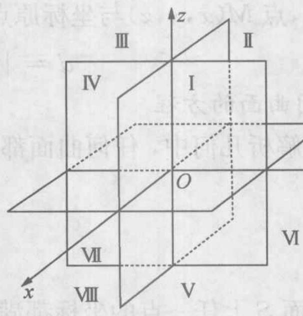


图 1-5

标为 z 的点 R，然后通过 P、Q、R 分别作与 x 轴、y 轴和 z 轴相垂直的平面，这三个相互垂直的平面的交点 M 便是由有序数组(x,y,z)所确定的唯一的点，这样就建立了空间点 M 和有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系.

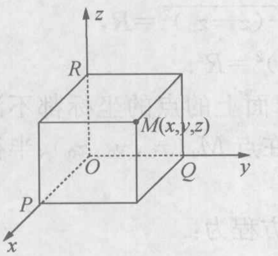


图 1-6

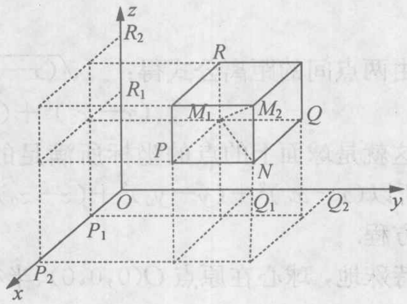


图 1-7

4. 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间的两点，为了用两点的坐标来表达它们之间的距离 d，我们过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(如图 1-7).

由于$\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形，所以 $d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$，又$\triangle M_1PN$ 也为直角三角形，且$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，所以 $d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2$. 又由于$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$、$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$、$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$，所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

5. 空间曲面的方程

在空间解析几何中，任何曲面都可以看作点的几何轨迹. 在这样的意义下，如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z)=0$$

有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z)=0$；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z)=0$，

那么，方程 $F(x, y, z)=0$ 就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫做方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形.

例 1.1 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上的任一点，那么

$$|M_0M|=R.$$

由两点间的距离公式得： $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$,

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程. 而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程. 所以 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 就是球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

特殊地，球心在原点 $O(0,0,0)$、半径为 R 的球面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 1.2 设有点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 由题意知道，所求的平面就是与点 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点，则有

$$|AM|=|BM|,$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}.$$

等式两边平方，然后化简得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程，而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程，所以这个方程就是所求平面的方程.

1.1.2　函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

当自变量 x 取遍定义域 D 中的数值时，对应的函数值 y 的全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\},$$

称为函数 $f(x)$ 的**值域**.

当函数的对应法则和定义域确定之后，函数也随之确定，因此，函数的对应法则和定义域称为确定函数的**两要素**.

例如，函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示不同的函数，因为它们的对应法则不同；$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 表示不同的函数，因为它们的定义域不同.

如果自变量在定义域中任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-r, r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数.

对于多值函数，我们可以用限制因变量取值范围的方法将其化为多个单值函数. 例如，在方程 $x^2+y^2=r^2$ 中，若 $y\geqslant 0$，则 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；若 $y\leqslant 0$，则 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

由此可以看出，对于多值函数，我们可以把它化为多个单值函数，然后进行讨论. 所以，我们约定：以后凡是没有特别说明，函数都是指单值函数.

函数以其自变量个数的多少而分为一元函数和多元函数. 只含有一个自变量的函数称为**一元函数**，含有两个及两个以上自变量的函数称为**多元函数**. 二元函数一般记为 $z=f(x,y)$，三元函数记为 $\omega=f(x,y,z)$ 等. 如矩形的面积 $s=xy$，是二元函数；长方体的体积 $V=xyz$，是三元函数等.

一元函数的图形是平面直角坐标系中的满足一定条件的点的集合，一般是平面上的一条曲线，定义域是数轴上点的集合；二元函数的图形是空间直角坐标系中点的集合，一般是空间中的一张曲面，定义域是曲面在 xOy 平面上的投影点的集合. 如图 1-8.

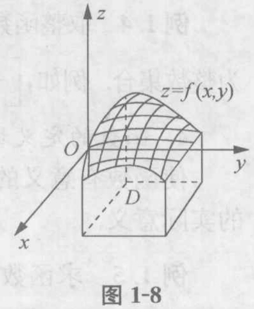


图 1-8

2. 函数的表示法

常用的函数的表示方法有三种. 用数学式子来表示自变量与因变量关系的方法称为**解析法**,其特点是便于进行理论分析和研究;把自变量所取的值和对应的函数值列成表以表示函数关系的方法称为**表格法**. 特点是简单明了,便于应用;以图像形式表达函数关系的方法,称为**图像法**,特点是直观性强.

函数的三种表示方法经常配合使用,在高等数学中讨论的函数,一般都是用解析法给出,这是由于对解析式可以进行各种运算,便于研究函数的性质. 但为了增强几何直观性,经常把函数的图像画出来帮助分析问题或说明问题.

3. 分段函数

由两个或两个以上的解析式表示的同一个函数称为**分段函数**. 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

例 1.3　绝对值函数 $y=|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内表现为分段函数.

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}.$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,图形如图 1-9 所示.

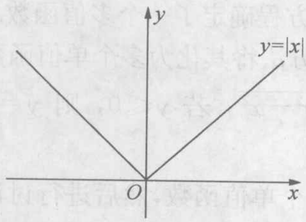


图 1-9

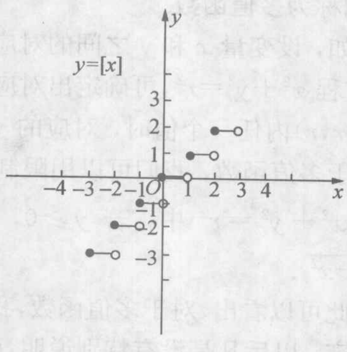


图 1-10

例 1.4　取整函数 $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=Z$ 为整数集合. 例如,$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$,$\sqrt{2}=1$,$[\pi]=3$,$[-1]=-1$,$[-3.5]=-4$. 图形如图1-10所示.

4. 函数的定义域

使函数有意义的自变量的全体称为函数的**定义域**. 但在应用中,还应考虑要解决问题的实际意义.

例 1.5　求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

解　要使函数有意义,必须 $x\neq 0$,且 $x^2-4\geqslant 0$.