

The Progress of Research for Mathematics,
Mechanics, Physics and High New Technology

数学 · 力学 · 物理学 · 高新技术
研究进展
——2008(12)卷

罗绍凯 龚自正/主编



科学出版社
www.sciencep.com

N53/14
:2008(12)
2008

数学·力学·物理学·高新技术
研究进展——2008(12)卷
The Progress of Research for Mathematics, Mechanics,
Physics and High New Technology

罗绍凯 龚自正 主编



科学出版社
北京

内 容 简 介

本书收入我国学者在学科交叉研究方面的学术论文 103 篇,反映出近年来的最新研究进展。

全书分数学力学与数学物理、非线性与复杂性科学、力学与工程、物理学与高新技术、金融量化分析与计算、生命科学与基础科学、数学等七个方面,相当好地体现了大学科之间交叉研究的特色,体现了基础科学对工程科学和高新技术的支撑作用,体现了基础科学与各新兴学科之间的密切联系,顺应了国际科学发展的潮流。

本书适合于数学、力学、物理学、工程科学、生命科学、信息科学、金融科学、交叉科学各分支的研究者和教育工作者参考,也可以作为自然科学其他各分支研究者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学·力学·物理学·高新技术研究进展. 2008(12)卷/罗绍凯, 龚自正主编.

—北京: 科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-022536-8

I. 数… II. ①罗… ②龚… III. ①数学-文集②物理学-文集③力学-文集④高新技术-文集 IV. N000.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 105494 号

责任编辑: 郝德平 王飞龙 / 责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2008 年 7 月第一次印刷 印张: 38 1/4

印数: 1—600 字数: 892 000

定价: 120.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(双青))

数学·力学·物理学·高新技术 研究进展——2008(12)卷

编 委 会

顾 问：焦善庆 梅凤翔

主 编：罗绍凯 龚自正

副主编：何大韧 张庆灵 刘 欣

编 委：	唐 云	王新志	俞元洪	汪秉宏
	陈立群	郭永新	张 毅	郭军义
	魏冬青			

序

现代科学各学科之间的交叉研究，源于现代科学的发展与技术革命的需要，源于现代科学的综合思想、移植思想、整体思想、优化思想和数学化思想的形成，源于重大综合性科学问题的出现。学科交叉点往往就是科学新的生长点、新的科学前沿，这里最有可能产生重大的科学突破，使科学发生革命性的变化；同时，交叉科学是综合性、跨学科的产物，对于开拓新的科学领域、树立新的科学观念、提出新的科学方法以及解决重大科学和社会问题，具有重大现实意义和深远历史意义。

我国著名科学家钱三强在 20 世纪 80 年代曾经指出：“可以预料，在某种意义上说，本世纪末到下一世纪初将是一个交叉科学的时代。”长期以来，就我国的学术团体而言，专业性学术团体很多，主要致力于学科交叉研究的学术团体甚少；就我国每年召开的学术会议而言，单学科的专业性学术会议甚多、且专业方向越分越细，而多学科之间交叉研究为主题的学术会议甚少。中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会的创建，顺应了学科交叉发展的国际性潮流，弥补了我国科学界大学科交叉研究学会甚少的不足。学会 22 年来富有特色的学术工作，对于促进学科交叉研究的繁荣和发展、促进基础理论与工程技术之间的紧密结合、促进交叉研究人才的成长和提高、促进国际学术交流与协作，起到了积极的推动作用，得到了学术界的广泛认同和中国科协领导的充分肯定。2006 年 4 月，中国科协书记处书记、副主席冯长根教授为中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会创建 20 周年题词——“加强交叉研究，促进科学进步”。

中国科学院院长路甬祥指出：“在新时期里，中国需要加速发展科学技术，其中要大力地提倡学科交叉，注重交叉学科的发展。”中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会自 1986 年以来，组织举办了大量的、卓有成效的学术活动，坚持主办了两年一次的学术大会，连续出版了《数学、力学、物理学、高新技术研究进展 (MMPH)》第 1~11 卷，相继组建了数学力学、数学物理、物理与技术、非线性科学及其工程应用、空间科学技术、金融量化分析与计算、复杂性科学、生物信息学等八个专业委员会，形成了集基础科学、应用科学和高新技术于一体，具有十分显著的交叉研究特色的大型学术活动群体。中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会第十二届学术年会将于 2008 年 8 月初在峨眉山召开，会议论文集《数学、力学、物理学、高新技术研究进展-第 12 卷》由科学出版社出版，收入学科交叉研究方面的学术论文 103 篇，反映出近年来的最新研究进展。全书分数学力学与数学物理、非线性科学与复杂性科学、力学与工程、物理学与高新技术、金融量化分析与计算、生命科学与基础科学、数学等七个方面，相当好的体现了大学科之间交叉研究的特色，体现了基础科学对工程科学和高新技术的支撑作用，体现了基础科学与各新兴学科之间的密切联系。本书适合于数学、力学、物理学、工程科学、生命科学、信息科学、金融科学、交叉科学各分支的研究者和教育工作者参考，也可以作为自然科学其它各分支研究者的参考书。

2008 年喜逢学会创始人、原理事长焦善庆先生的 80 华诞, 理事长梅凤翔先生的 70 华诞, 他们为学会的建设与发展、为推动交叉研究的学术交流做出了非常重要的贡献, 在此向他们表示最美好的祝福!

中国空间技术研究院的郑建东博士、牛锦超博士、李宇、曹燕、侯明强、代福博士在文集整理、校对中做了大量工作, 在此对他们的辛勤劳动致以衷心的感谢。

愿交叉科学伴随时代的步伐永远前进! 愿我国各学科交叉的教学与科研取得更大的进步! 愿中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会更好、更快的发展!

罗绍凯 龚自正

目 录

序

数学力学与数学物理

Conserved Quantities and One-Step Corrections Method for Holonomic System	Shang Mei, Guo Yongxin, Mei Fengxiang	3
Lagrange 系统的共形不变性与守恒量	蔡建乐 罗绍凯 梅凤翔	8
Notes on the Variation-Iteration Method	Zhang Xinhua	16
事件空间中约束 Birkhoff 系统的守恒定理	张 毅 范存新	21
Appell 体系中非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性与 Mei 守恒量	贾利群 解加芳 郑世旺 罗绍凯	26
相空间中非 Chetaev 型非完整可控力学系统的 Mei 对称性与守恒量	夏丽莉 李元成 王显军	32
完整系统 Tzénoff 方程的对称性及其直接导致的守恒量	郑世旺 解加芳 贾利群	39
力学系统的 Lagrange 对称性	解加芳 梅凤翔	45
弧形驱动扇形空腔涡旋结构的数值分析	林长圣	49
The Continuity Equation in Riemannian Space V3 Expressed with Damage Variable Defined in Euclid's Space	Wang Yun, Hao Jiping, Wang Xiaomei	54
对履带装置中的约束和力元的一种数学描述	王月梅 周义清 常列珍	60
半球圆柱体分离流拓扑	王 刚 杨丽萍 李国辉	64
核素比结合能的两个新解析计算式	于长丰 宋立勋 刘代志	70
双瓶输液的数学模型问题	张洪川 徐昌贵 张 跃	76

非线性科学与复杂性科学

轴向运动弦线和梁横向振动研究若干新进展	陈立群	83
多孔介质中流体流动的分形分析	郁伯铭 员美娟	90
相对转动非线性动力学系统的统一模型与主共振解	王 坤 周 岩	96
Stabilization of a Nonlinear Stochastic Complex Damped System using Random Force	Xu Yong, Gamal M. Mahmoud	100
圆底三向网格扁球面网壳静动态频率特性	韩明君 王 钢 邱 平 王新志	107
陈氏混沌吸引子的同步问题	郑 宁 于洪洁	111
基于 DDS 的混沌调频雷达 SAR 成像	刘诗华 王德石	116
超混沌生成研究进展	王杰智 陈增强 张 青 李 航	122
参数不确定超混沌 Lü 系统的自适应同步	栗 苹 田 钢 张若洵 杨世平	128
基于共轭 Lü 混沌系统的超混沌生成研究	张 青 王杰智 李 航 陈增强	133
分形介质中扩散的 Non-Fick 效应	张东辉 许志新	137

我国高技术网络的若干研究进展	方锦清	李 永	孙伟刚	刘 强	148
合作-竞争网络的二分图描述建议	付春花	刘爱芬	陈卓辉	何大韧	158
河流网泥沙输移及其冲淤的标度规律	王旭明	张金锋	郝 睿	霍 杰	164
凤眼莲生态型河道的水流特性研究	朱红钧	赵振兴	劳 伟	陈小榆	170
一种代数免疫函数的构造方法	段 明	吴茜琼			179

力学与工程

凯尔特的动力学问题	刘延柱	185
碳纳米管填充和润湿的密度泛函研究	崔树稳 朱如曾 闫 红	190
轴向拉伸下螺栓非啮合螺纹段变形的实验测试和三维有限元计算	尹益辉 符春渝 黄 鹏 魏晓贞	194
基于非傅里叶热传导的层状复合陶瓷结构有限元分析	王小贞 张士元 郑百林 贺鹏飞	199
基于熵产最小的微槽冷却热沉优化设计	魏 琪	206
F^2 色噪声两相流 PDF 模型理论	徐江荣	211
爆炸载荷下固支矩形蜂窝铝夹芯板的动力响应	赵隆茂 王志华 卢国兴 朱 峰	219
广布疲劳损伤对加筋板剩余强度的影响	葛 森 李 仲 张积广 陈 莉 白生宝	224
频率对铝合金腐蚀疲劳裂纹扩展的影响	葛 森 李 仲 肖迎春 刘国强	231
多处损伤铝合金加筋板的疲劳裂纹扩展研究	李 仲 葛 森 张积广 肖迎春 吕国志	237
钛合金的原始疲劳质量研究	李 仲 葛 森 陈 莉 白生宝 刘国强	242
寿命计算的几何场力学理论公式	肖建华	248
用一般形式的 KFVS 方法计算溃坝波问题	陈秀荣 于加举 程 冰 袁冬梅 姜德民	256
爆炸冲击波对建筑物毁伤机理与毁伤效应数值模拟分析	傅常海 黄柯棣 赵玉立 张凤林	260
微纳米尺度流体的跨尺度研究方法	张 萍 李 强	267
利用重叠非结构网格法模拟具有运动边界的流动问题	倪赛珍 张 星 何国威	273
粘性流体与刚性多联体结构相互作用的数值模拟	白 洁 张 星	280

物理学与高新技术

空间环境及其对航天器的影响与防护技术	龚自正 曹 燕 侯明强 李 宇 郑建东 牛锦超	287
另一种双光子量光学模型的混沌行为	张纪岳 李春芳	299
非简并双光子激光的双稳态特性	张培琨	305
超越基本粒子标准模型(SM)的某些问题	焦善庆 许弟余 龚自正	310

第一性原理方法在插层化合物 Li_xTiS_2 结构与性能研究中的应用	宋庆功 王延峰 康建海 严慧羽	318
一种改进的压阻法	余金虎 汤文辉	323
两嵌段共聚物在受限状态下的介观模拟	宋庆功 王子玉 谭红革	329
移动机器人变焦双目测距系统设计及应用	李照杰 霍 伟	333
高次正幂与逆幂势函数的叠加的径向薛定谔方程的解析解研究	胡先权 罗 光 马 燕 崔立鹏	342
固体颗粒悬浮液有效黏性特征研究	顾国庆 魏恩泊	347
超高速碰撞碎片云特征分析	徐金中 汤文辉 徐志宏	351
二维非线性对流扩散方程的特征有限元分析	陆 瑶	357
核磁共振弛豫特性的非医学应用	刘 聪 任朝辉 汪红志 张学龙	366
Cu 互连工艺中 Ta 扩散阻挡层的研究	王晓冬 吉 元 李志国 夏 洋 刘丹敏 肖卫强	374
单元串联中压变频器控制方案研究	王续宇 赵万明 孙福玖	377
过渡金属钨团簇及其簇合物的研究进展及应用	张秀荣 张 伟	382
阶梯算符方法在稀薄费米气体热力学性质研究中的应用	龙姝明 孙彦清 徐 晖 傅晓玲	388

金融量化分析与计算

一类保险风险模型的分红问题	郭军义	399
不完全市场中的定价、风险度量与套期保值	毛二万	403
基于次序逻辑斯蒂模型的企业贷款信用风险评级研究	王一鸣 印 为 石 勇	409
中国证券市场的多重分形特征	蒋志强 周炜星	415
基于 Delta-Gamma 的高阶在险价值(value-at-risk)模型计算	刘 欣 陈 晨	421
中国股市中限价指令簿的统计性质研究	顾高峰 周炜星	427
人民币升值条件下的纺织品贸易中存在 J 曲线效应吗	秦迎霞 边 策 吴润衡	432
基于修正的 R/S 方法对上证指数长期记忆效应的研究	薛凤英 谷艳华 刘喜波	437
存款保险定价模型的比较研究	谷艳华 薛凤英 刘喜波	443
经济系统的 Vakonomic 模型	周石鹏 肖柳青	449
沪市电力上市公司经营业绩的聚类分析	路爱峰 崔玉杰	455
两种离散型随机变量线性投资组合的 CVaR	王秀英 陈 爽	462
风险投资决策中概率的模糊化	李宏伟 李晓奇	468

生命科学与基础科学

药物代谢酶 P450 的计算生物学研究	王靖方 魏冬青	475
大脑皮层微柱的同步发放现象	姚 荃 刘深泉 马在光	480
神经放电节律的非线性动力学	古华光 杨明浩 李 莉 刘志强 刘红菊 许玉林 任 维	486

心肌细胞团兴奋节律的非线性动力学	刘志强 古华光 杨明浩 刘红菊 李 莉 任 维	491
一类食饵种群具有常数收获率系统的极限环	黄东卫 宋 涛	496
改进的人口阻滞增长模型	毛 坤 张建波	501
一类具非线性边值条件的退化抛物方程	陈明玉 何剑峰	505

数 学

Sturm-Liouville Operators with Interface Conditions	Sun Jiong, Wang Aiping	513
Overview of Differential Operator with Nonstandard Exponent Growth	Yushan Jiang, Xiaomin Wang, Xiaoqi Li	517
一类不确定广义时滞系统的鲁棒无源控制	杨 丽 张庆灵 邱占芝	523
一类时滞非线性微分方程解的振动性定理	任崇勋	529
微分差分方程的周期解	赵杰民	534
关于 Ω 稳定性的一点注记	何昀昶 金渝光 晏炳刚	536
逆极限空间的逐点伪轨跟踪性	晏炳刚 金渝光 何昀昶	541
一类非线性演化方程的新孤波解	张 翼	547
估算孪生素数的一个新公式	许作铭 罗贵文	553
一致光滑 Banach 空间中非线性方程的有偏差修正 Noor 迭代法	刘 丽 王晓敏	558
投影不变数据深度	李 强 吴 翊	563
行 NA 组列加权求和的完全收敛速度	张 静	568
一类非光滑规划的最优性条件	祝连芳 王晓敏 蒋金广	572
二阶变系数线性微分方程解法的研究综述	赵临龙	575
模糊线性回归分析	连华娟 李晓奇	579
多媒体语音室的综合评价	史红梅 王 帅	584
牛顿内点优化算法解凸二次规划	王建芳 杨晓光	589
内点法在解线性矩阵不等式问题中的应用	杨晓光 张庆灵 靖 新	594
模糊聚类分析方法及其应用	王 帅 惠兴杰 李晓奇	599

数学力学与数学物理

Conserved Quantities and One-Step Corrections Method for Holonomic System*

Shang Mei¹, Guo Yongxin², Mei Fengxiang¹

¹ Faculty of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing, 100081

² Department of Physics, Liaoning University, Shenyang, 110036

Abstract In this paper, a one-step method for conservative quantities is introduced. The computational method is taking conservative quantities of dynamical systems as checks on accuracy at end of each time step. The method generalizes the previous work and one example is analysed to illustrate the method.

Keywords conserved quantities, one-step method, holonomic system

1. Introduction

It is known that not all integrations can be carried out analytically, and numerical methods become the only way to solve the problem. Dynamical systems are usually represented as a set of first-order equations. Various computational methods, such as Euler's method, Runge-Kutta method and many other integration algorithms^[1], can be used to accomplish the numerical integration of ordinary differential equations. In this paper, we shall present a method of taking conservative quantities of dynamical systems as checks on accuracy. The method generalizes the work of reference [2] and one example is analysed to illustrate the method.

2. Equation of motion of holonomic system

The standard form of Lagrange's equation for a holonomic system is

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s=1, \dots, n) \quad (1)$$

Suppose the system is not singular, it means that

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0$$

Therefore, it is always possible to solve for the $\ddot{q}$'s in terms of q 's, $\dot{q}$'s and t . If this is done, the resulting equations of motion are of the form

* 国家自然科学基金(10572021, 10472040), 辽宁省优秀青年科研人才培养基金(3040005), 教育部回国人员科研启动基金(2004527), 教育部春晖计划(z2005-1-21006), 辽宁省教育厅基础研究计划(05L155)和北京理工大学基础研究(BIT-UBF-200507A4206)资助项目.

† 尚玫(1964-), 女, 副教授, Email: Shangmei505@sina.com

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (s=1, \dots, n) \quad (2)$$

At this point there are n dynamical equations, which are linear in the n $\ddot{q}$ s. These n second-order equations are integrated numerically, usually by converting them into $2n$ first-order equations.

3. Conserved quantities of mechanical systems

The theory of symmetries and conserved quantities is an important research field in mathematics and physics, especially in analytical mechanics. After Noether's work, many researchers have done lots of works and much important results have been obtained [3]. One can obtain Hojman conserved quantities and Lutzky conserved quantities directly by Lie symmetries. Noether conserved quantities can be obtained directly by Noether symmetries, and also it can be deduced indirectly by Lie symmetries. In order to make sense of the paper, here we just simply present the Noether symmetry and Lie symmetry. More detailed works can be referred to reference [3].

Define an infinitesimal transformation of time and generalized coordinates

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \xi_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (3)$$

where ε is an infinitesimal real parameter and ξ_0, ξ_s are infinitesimal generator.

Noether's symmetry means that the action of Hamilton's variational principle is invariant under an infinitesimal transformation. Noether's theorem says that if we can find r functions $G^\alpha = G^\alpha(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ such that

$$\frac{\partial L}{\partial t} \xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_s} \xi_s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \dot{\xi}_s^\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s \right) \dot{\xi}_0^\alpha = -\dot{G}^\alpha \quad (\alpha=1, \dots, r) \quad (4)$$

then it will yield r conserved quantities or constants of the motion

$$I_\alpha = L \xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha) + G^\alpha = \text{const.} \quad (\alpha=1, \dots, r) \quad (5)$$

Take an infinitesimal transformation of generalized coordinates and time invariant

$$\begin{aligned} t^* &= t \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (6)$$

Lie symmetry means that the differential equations are invariant under an infinitesimal transformation. The determining equations of (2) under infinitesimal transformation(6) are

$$\frac{\bar{d}}{dt} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} \xi_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_k \quad (7)$$

where

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}$$

The generalized Hojman theorem says that if generators ξ_s satisfy (7) and if we can find a function $\mu = \mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ such that

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{d}}{dt} \ln \mu = 0 \quad (8)$$

then it will yield Hojman conserved quantities

$$I_H = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial q_s} (\mu \xi_s) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \left(\mu \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s \right) = \text{const} \quad (9)$$

Conserved quantities or integrals of the motion can be used to check the accuracy of numerically computed solutions. Integrals of the motion are also particularly effective in detecting programming errors.

4. One-step method for mechanical system

The goal of the one-step method is to improve the accuracy of numerical results at end of each time step. Suppose the conserved quantities of the dynamical system have the form of $I_j(q, t) = C_j = \text{const}$. ($j = 1, \dots, m$). Let $\varphi_j(q, t) = I_j(q, t) - C_j = 0$, then we have

$$\varphi_j(q, t) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (10)$$

These equations can be represented as surfaces in configuration space (q -space). The configuration point P , whose position is given by the n -vector $\mathbf{q}$, must move on the intersections of these surfaces if the equations (10) are satisfied exactly. In general, the values of the function φ_j will not be exactly zero at end of each step. It needs to be corrected to zero. The gradient vectors of these functions are

$$\nabla \varphi_j = \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_n} \right]^T \quad (11)$$

The correction vector $\Delta \mathbf{q}$ is written as a linear combination of the gradient vectors. It has the form

$$\Delta \mathbf{q} = \sum_{k=1}^m C_k \nabla \varphi_k \quad (12)$$

In terms of scalar components, we have

$$\Delta q_i = \sum_{k=1}^m C_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

where C_s are constants whose values are found from the condition that the correction should

exactly cancel the function ϕ 's errors. Thus we require that

$$\nabla \phi_j \cdot \Delta \mathbf{q} = -\phi_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (14)$$

or, in detail,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m C_k \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} = -\phi_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (15)$$

These m equations are solved for the m C s that are then substituted into (13) to obtain the individual Δq_i corrections that are added to the corresponding q s.

Similarly, we can use one-step procedure to correct the velocities in a manner such that all the $\dot{\phi}$'s goes to zero. The gradient in velocity space of $\dot{\phi}$ is

$$\nabla \dot{\phi}_j = \left[\frac{\partial \dot{\phi}_j}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial \dot{\phi}_j}{\partial \dot{q}_n} \right]^T \quad (16)$$

Choose the velocity vector correction $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ of the form

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^m K_k \nabla \dot{\phi}_k \quad (17)$$

where the values of K 's are such that

$$\nabla \dot{\phi}_j \cdot \Delta \dot{\mathbf{q}} = -\dot{\phi}_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (18)$$

We can write (17) and (18) more explicitly as

$$\Delta \dot{q}_i = \sum_{k=1}^m K_k \frac{\partial \dot{\phi}_k}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (19)$$

where the K 's are obtained by solving

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m K_k \frac{\partial \dot{\phi}_j}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{\phi}_k}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{\phi}_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (20)$$

Knowing the values of the K 's, one can obtain the velocity corrections from (19).

5. Example

Example 1^[4] Differential equations of rotation of rigid body about a fixed point are

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + M_1 \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + M_2 \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + M_3 \end{aligned} \quad (21)$$

where A_1, A_2, A_3 are principal moments of inertia, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ are projections of angular velocity on its principal body axis, and M_1, M_2, M_3 are external moments of force.

Furthermore, we suppose

$$M_1 = k A_2 \omega_2, \quad M_2 = -k A_1 \omega_1, \quad M_3 = 0 \quad (22)$$

where k is a constant. Find integrals of the system by Poisson method.

Let

$$x_1 = A_1 \omega_1, \quad x_2 = A_2 \omega_2, \quad x_3 = A_3 \omega_3 \quad (23)$$

then equations (21) can be expressed in following form

$$\dot{x}_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_2 A_3} x_2 x_3 + k x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_3 A_1} x_3 x_1 - k x_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_1 A_2} x_1 x_2 \quad (24)$$

We have $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C = \text{const.}$, so

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - C = 0 \quad (25)$$

It is the integral of energy.

Let $x_i = q_i$ ($i = 1, \dots, 3$), the one-step corrections are found using

$$\sum_{i=1}^n C \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_i} = -\varphi \quad (26)$$

Then the C is substituted into (13), we have

$$\Delta q_i = \frac{-(\partial \varphi / \partial q_i) \varphi}{\sum_{i=1}^3 (\partial \varphi / \partial q_i)^2} = \frac{-2q_i \varphi}{\sum_{i=1}^3 (2q_i)^2} = -\frac{1}{2} q_i \quad (27)$$

The velocity corrections are obtained by solving first for the K s, using equations

$$\sum_{i=1}^3 K \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{\varphi} \quad \dot{\varphi} = \sum_{i=1}^3 2q_i \dot{q}_i, \quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{q}_i} = 2q_i \quad K = \frac{-(q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3)}{2\varphi}$$

The results are

$$\Delta \dot{q}_i = K \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{-(q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3)}{\varphi} \cdot q_i \quad (28)$$

Equations (27) and (28) can be used to improve the accuracy of the numerical results by adding $\Delta q, \Delta \dot{q}$ to q and $\dot{q}$ respectively.

References

- [1] Samuel S M. Wong Computational methods in physics and engineering. Beijing: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.
- [2] Donald T. Greenwood Advanced Dynamics. Edinburgh: Cambridge University Press, 2003.
- [3] Mei F X. Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press (in Chinese), 2004.
- [4] Shang M, Mei F X. Integrals of generalized Hamilton systems with additional terms. Chin Phys, 2005, 14 (9): 1707-1709.