线性偏微分方程的理论与应用

XIANXING PIANWEIFEN FANGCHENG DE LILUN YU YINGYONG

曹春娟　张翠英　赵连生◎编著

兵器工业出版社

0175.2
C102.1

8

175.2

C1021

线性偏微分方程的理论与应用

曹春娟 张翠英 赵连生 编著

兵器工业出版社

内容简介

线性偏微分方程的理论与应用是研究自然科学和各类技术科学的重要工具之一。本书是在作者多年的研究和教学的基础上整理而成的。本书共分五章。第一章是基本概念部分；第二、三、四是基础部分；第五章是为读者学完本书后自我检查学习效果而专设的一章。本书可作为高等院校数学与应用数学专业本科生选修课的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性偏微分方程的理论与应用/曹春娟，张翠英，赵连生编著. —北京：兵器工业出版社，2007.11

ISBN 978-7-80172-913-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①曹…②张…③赵… Ⅲ.线性方程：偏微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第123404号

出版发行：兵器工业出版社
发行电话：010-68962596，68962591
邮　　编：100089
社　　址：北京市海淀区车道沟10号
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京业和印务有限公司
版　　次：2008年1月第1版第1次印刷

责任编辑：周宜今
封面设计：揽胜视觉
责任校对：郭　芳
责任印制：赵春云
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：16.25
字　　数：270千字
定　　价：48.00元

（版权所有　翻印必究　印装有误　负责调换）

给授课教师的一些建议

“线性偏微分方程理论与应用”即人们常说的“偏微分方程”或“数学物理方程”是为理工科大学数学系数学与应用数学专业学生开设的一门选修课，而与之相关的课程还有为理工科大学物理、力学等非数学专业开设的“数学物理方法”、“数学物理方程”。课程的教学目的是通过讲授弦振动方程，热传导方程及位势方程这三类典型方程的导出，研究偏微分方程定解问题的正确提法及有关求解方法，分析各类偏微分方程定解问题的解的性态，使学生掌握最基本的偏微分方程理论、方法和技巧，认识运用数学方法解决实际问题的一般过程，形成一定的理性思维素养和较高的分析问题、解决问题的能力，为进一步深入学习或者从事实际工作打好基础。近年来，为适应教学改革的发展，本门课程的教学时数有所减少，怎样在很少的时间内完成既定的教学任务成为亟待解决的问题。

一、突出阐述基本的教学思想

“数学物理方程”研究二阶线性偏微分方程的原型（即弦振动方程、热传导方程及位势方程）和经典问题（即 Cauchy 问题和 Dirichlet 问题），课程通常安排在大学三年级时，在学习本课程前，学生已经学习完“数学分析”、“代数与几何”、“复变函数”、“常微分方程”等数学课程，具有了一定的数学基础。“数学物理方程”所研究的问题大多是由物理、力学中的实际问题所导出，与自然科学各领域有广泛的联系。而处理这些实际问题所使用的数学方法又与学生们已学习过的各门数学课程有着密切的联系。因此，“数学物理方程”课程是沟通数学与自然科学和工程技术实际问题的重要桥梁。学生在学习这门课程时，一方面可以融汇贯通所学过的各门数学基础课程，另一方面又可以认识和学习如何运用数学理论解决有关实际问题。当然，作为一门数学理论与实际问题相结合的课程，本课程涉及内容繁杂，许多学生在学习这门课程时也感到有一定难度。教师在讲

授本课程时除了介绍其基本内容外，更应突出阐述其基本的数学思想，努力使学生在学习知识的同时，着重理解其中的数学思想，而数学思想对学生的熏陶以及对学生数学素养的形成和提高尤其重要。

反应在“数学物理方程”中最基本的数学思想是数学中“转化”的思想，即在研究和解决数学问题时，将各种复杂的或者新的问题通过适当的变换转化为较简单的或者已经研究过的问题，从而最终解决问题。我们在课堂讲授中十分注重突出这一思想，并常常用这一思想启迪学生思维。本课程前期讲授偏微分方程定解问题的建立，就是运用物理规律，分清主要因素，忽略次要因素，将实际问题“转化”为数学模型。本课程中期讲授各类偏微分方程基本定解问题的求解，更是处处体现出数学中“转化”的思想。特征线解法是运用偏微分方程沿其特征线可化为常微分方程的原理，将偏微分方程的求解转化为常微分方程求解。分离变数解法是充分利用线性微分方程的迭加原理，将偏微分方程的边值问题转化为常微分方程的本征值问题，从而达至求解。而积分变换解法则是通过积分变换减少自变数个数，同样是转化为常微分方程求解。“数学物理方程”中各种求解方法都是数学中“转化”思想的具体体现。不仅偏微分方程基本定解问题的求解是利用转化的方法，许多复杂的定解问题的求解也是利用转化的方法化为基本的定解问题。如当边界条件非齐次时，我们可以用适当的未知函数变换，将其转化为齐次边界条件情形。当偏微分方程方程是非齐次方程时，我们则可以用 Duhamel 原理，将其转化为齐次方程处理。

“数学物理方程”中“转化”的思想，反映了在进行数学研究时，人们不断化简为繁、化难为易、化未知为已知的认识过程，它实际上也反映了科学研究的一般规律和基本方法。在课堂讲授中十分注意突出这一数学思想，不仅可使学生掌握必要的数学知识，而且能使学生学会科学的思维方法。在传授知识的同时，不断强化科学的方法论，有助于学生发展能力、提高素质，加深对于科学研究一般规律和基本方法的认识，培养学生的创新意识。

二、突出讲授有关的物理背景

与物理、力学等自然科学有十分紧密的联系是“数学物理方程”的基本特点之一。不仅三个典型方程及有关定解问题的建立需要一

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

定的物理知识，一些重要的基本概念，如偏微分方程定解问题的适定性概念、能量积分概念、格林函数概念、极值原理等等，也各有其相应的物理解释。一门数学课程，从问题的提出和基本概念的建立，到提供解决问题的方法，一直到最后结束的阐述和分析都离不开物理，这正是“数学物理方程”有别于其它数学课程的一个非常鲜明的特点。

根据多年教学经验，三个典型方程的导出是大多数学生学习本课程所遇到的第一个教学难点，而其困难就在于不熟悉问题的物理背景。由于三个典型方程的导出对于后面课程的学习十分重要，因此必须克服这个教学难点。在讲授三个典型方程的导出时，我们首先详述所讨论的物理现象，然后写出制约该现象的有关物理规律，再分析这个物理规律中主要物理量及有关物理量的数学表述和相互关系，最后进行适当的数学处理导出相应的方向。通过这几个环节，使学生清楚了解以实际问题为背景建立数学模型的基本方法和具体步骤，明白所谓数学物理方程就是用数学语言来描述和表达有关物理现象和实际问题。三个典型方程分别对应三种不同的物理现象，三个典型方程中系数和非齐次项所包含的物理含义也清楚了。讲概念注重讲清实际背景，突出讲授有关的物理背景，要从建立数学模型开始，也要贯穿于基本概念的建立和主要结果的阐述。其好处在于使数学概念和结果有了直观性，既易于理解又便于记忆，也有助于培养学生具有某种数学上的直觉和想象力。如讲授热传导方程和位势方程的极值原理时，由热传导方程

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \qquad x \in \Omega \subset R^n$$

其中非齐次项 $f(x,t)$ 的物理含义是热源[对应 $f(x,t) \geqslant 0$] 或热汇[对应 $f(x,t) \leqslant 0$]。因此，直观的，当区域 Ω 内有热源时，最低温度必然在区域的边界上达到，当区域内有热汇时，最高温度必然在区域的边界上达到。这样，作为“数学物理方程”主要理论基础的极值原理就显得非常自然，也十分容易记忆和掌握了。

三、突出训练主要的求解方法

“数学物理方程”的又一基本特点是其内容十分丰富，求解方法多种多样。由于三个典型方程反映了不同性质的自然现象，因此无论是求解方法，还是解的性态研究，都有较大差异，很难用统一的

格式展开内容并加以讨论。这与学生之前所学某些数学课程的理论根植于若干个基本定理的情况有显著不同。随着课程的深入，各类方程的各种定解问题不断出现，相应的求解方法及讨论解的性态的各种手段也不断翻新。方法的多种多样也常使部分学生感觉困惑，不知如何把握。在教学环节中，我们强调讲授解法要突出训练主要的求解方法，是为了避免在过于技巧和运算过于繁杂的地方分散精力，影响学生学习的积极性。讲授求解方法应特别注意讲解其来龙去脉。每一个求解方法都体现了一定的数学思想，它是运用数学思想解决数学问题的具体方式和途径。同一个数学思想可能有不同的实现途径，其外在的反映就是不同的求解方法。突出训练主要的求解方法，是在保证突出反映基本的数学思想的前提下，使学生熟练掌握主要的求解方法，真正做到讲得出原理也算得出结果。如讲授方程的基本解，需要求解方程

$$\Delta u = \delta(x - \xi) \qquad x \in R^n, \xi \in R^n$$

这个方程可以用 Fourier 变换求解，但计算较繁，多数学生感觉反映比较困难，不易算出结果。我们采取求 Laplace 方程球对称解的方法，即求解 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的形如

$$u(x_1, x_2, \Lambda, x_n) = u(r) \qquad r = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + \Lambda + x_n^2}$$

的解。由于球对称性，原来的偏微分方程化为一个二阶常微分方程，求解变得十分容易，Laplace 方程的基本解很快就可解出。求球对称解的方法简单易学，不仅导出了 Laplace 方程的基本解，更重要的是它展示了对称性的重要作用，提示了利用各种形式的对称性简化偏微分方程的一个基本原理。在计算清楚了方程对称解之后，偏微分方程的基本解，以及随后而来的格林函数的形式及利用格林函数表达边值问题的解都容易讲授了。不仅如此，推而广之，利用球对称性，可方便讲授在某些具有球对称性的区域，如球层、圆环上求解 Laplace 方程或 Poisson 方程的边值问题等相关论题。

突出训练主要的求解方法，不仅反映在课堂教学上，也应反映在习题训练等教学环节。它可以使学生在了解各种求解方法的同时，对于主要的求解方法有更深程度上的认识和更熟练的运用，更有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

讲授理论，要突出阐述基本的数学思想；讲授概念，要突出讲授有关的物理背景；讲授解法，要突出训练主要的求解方法，这在

“数学物理方程”课程教学实践中证明是行之有效的教学方法。这一教学方法反映了本课程数学理论与物理背景紧密结合的基本特点，也是我们多年来从事本课程教学的经验总结。应用这一教学方法在本课程教学实践中可获得听课学生的广泛好评。

大学数学是培养和造就各类高层次专门人才的共同基础，培养学生的数学素质，发展学生的数学能力，是大学数学教育的重要目标之一。通过学习“数学物理方程”这门课程，一方面可以为学生今后学习物理、力学等各学科专业课程打下必要的数学基础，另一方面也可以训练学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、归纳概括能力、空间想象能力和自我学习能力，从而提高学生的综合素质和培养学生的创新能力。

最后声明一点，在编著本书时，我们考虑到实际问题的复杂性和教学时数的减少性，凡涉及到三类方程——双曲型方程、抛物型方程和椭圆型方程的具体模型都未编入本书，但讲授教师在授课时应根据需要做出适当的补充，对此我们将十分感谢。

编者　曹春娟　张翠英　赵连生

二〇〇七年三月

线性偏微分方程的理论与应用
教　学　计　划

本课程主要通过对三个典型方程的介绍，让学生掌握线性偏微分方程的古典理论与应用，并为进一步学习一般线性偏微分方程和现代偏微分方程打下良好的基础。

本课程按照一学期 72 个学时安排，具体分解如下：

第一章　绪论(10 学时)

一、基本要求

1. 了解偏微分方程的一些基本概念(解、阶、维数、线性与非线性、齐次与非齐次)以及线性方程解的迭加原理；
2. 知道三个典型方程三种定解问题(初值问题、边值问题和混合问题)的提法；
3. 会将二阶线性偏微分方程化为标准形式并会求一些方程的通解；
4. 知道定解问题适定性的意义；
5. 会求一阶拟线性偏微分方程的解；
6. 会找偏微分方程中的一些变换。

二、教学学时安排

1. 偏微分方程的一些基本概念(2 学时)；
2. 定解问题与解的适定性(2 学时)；
3. 二阶线性偏微分方程的分类与化简(2 学时)；
4. 偏微分方程与常微分方程组的关系(2 学时)；
5. 偏微分方程的一些变换(2 学时)。

第二章　双曲型方程(22 学时)

一、基本要求

1．掌握 D'Alember 法、球平均法、降维法及延拓法；

2．知道 D'Alembert 公式和 Poisson 公式的物理意义；

3．熟练掌握分离变量法，特别是各种形式的在特殊区域上的分离变量解法；

4．会用本特征函数法解非齐次方程的定解问题；

5．会用辅助函数、迭加原理和 Duhamel 原理处理非齐次方程的非齐次边界条件问题；

6．会利用能量不等式证明方程定解问题解的唯一性和稳定性，会验证解的存在性。

二、教学学时安排

1．初值问题的简化与 Duhamel 原理(2 学时)；

2．初值问题的解表达式(一)(4 学时)；

3．初值问题的解表达式(二)(2 学时)；

4．初值问题的解表达式(三)(2 学时)；

5．初值问题的解表达式(四)(2 学时)；

6．初值问题的能量不等式与解的唯一性稳定性(4 学时)；

7．混合问题的解表达式(一)(4 学时)；

8．混合问题的解表达式(二)(2 学时)；

9．混合问题的能量不等式与解的唯一性稳定性(4 学时)。

第三章　抛物型方程(14 学时)

一、基本要求

1．掌握 Fourier 积分变换及其在解偏微分方程中的应用；

2．会利用初值问题和混合问题的形式解，在给定的条件下验证形式解就是古典解；

3. 掌握极值原理及其应用；
4. 会用能量不等式证明定解问题解的唯一性和稳定性。

二、教学学时安排

1. Fourier 变换及其性质(2 学时)；
2. 初值问题的解表达式及其解的验证(2 学时)；
3. 混合问题的解表达式及其解的验证(2 学时)；
4. 极值原理及应用(4 学时)；
5. 能量不等式与解的唯一性和稳定性(4 学时)。

第四章　椭圆型方程(22 学时)

一、基本要求

1. 掌握第一、第二和第三 Green 公式的成立条件及推导过程；
2. 会应用 Green 公式证明 Dirichlet 问题和 Neumann 问题解的唯一性；
3. 掌握极值原理的证法，会应用极值原理证明 Dirichlet 问题和 Neumann 问题解的唯一性和稳定性；
4. 了解 Green 函数的定义与性质；
5. 会应用 Green 函数建立特殊区域上 Dirichlet 问题和 Neumann 问题的积分表达式，会应用 Poisson 积分公式推导调和函数的一些基本性质；
6. 了解 Dirichlet 问题的解的验证；
7. 熟练掌握调和函数的性质及其应用；
8. 掌握强极值原理，会用强极值原理证明 Dirichlet 问题和 Neuman 问题解的唯一性；
9. 会用能量不等式证明定解问题解的唯一性和稳定性；
10. 了解 Dirichlet 问题的等价问题。

二、教学学时安排

1. Green 公式及其应用(2 学时)；
2. 极值原理与唯一性和稳定性(4 学时)；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

3．Green 函数及其性质(2 学时)；
4．特殊区域上定解问题的 Green 函数积分表达式(2 学时)；
5．Dirichlet 问题解的验证(2 学时)；
6．调和函数的性质(4 学时)；
7．强极值原理与定解问题解的唯一性(4 学时)；
8．Dirichlet 问题的等价问题(2 学时)。

第五章　复习与考试(4 学时)

一、内容复习(2 学时)

二、考试练习(2 学时)

目　　录

第一章　绪　论 ………………………………………………………… 1
§1　偏微分方程的一些基本概念 …………………………………… 1
§2　定解问题与解的适定性 ………………………………………… 7
§3　二阶线性偏微分方程的分类与化简 ………………………… 14
§4　偏微分方程与常微分方程组的关系(一) ………………… 21
§5　偏微分方程与常微分方程的关系(二) …………………… 26
§6　偏微分方程的一些变换 ………………………………………… 30
第二章　双曲型方程 ……………………………………………………… 46
§1　初值问题的简化与 Duhamel 原理 ………………………… 46
§2　初值问题解的表达式(一) …………………………………… 51
§3　初值问题解的表达式(二) …………………………………… 63
§4　初值问题解的表达式(三) …………………………………… 67
§5　初值问题解的表达式(四) …………………………………… 78
§6　初值问题能量不等式与解的唯一性和稳定性 …………… 82
§7　混合问题的解表达式(一) …………………………………… 88
§8　混合问题的解表达式(二) …………………………………… 95
§9　混合问题解的能量不等式与唯一性稳定性 ……………… 116
第三章　抛物型方程 …………………………………………………… 122
§1　Fourier 变换及其性质……………………………………… 122
§2　初值问题的解和解的验证 ………………………………… 130
§3　混合问题的解及其验证与唯一性 ………………………… 135
§4　极值原理与能量不等式(一) ……………………………… 139
§5　极值原理与解的唯一性稳定性(二) ……………………… 144

第四章　椭圆型方程 …… 164
§1　Green 公式及其应用 …… 165
§2　极值原理与唯一性和稳定性 …… 169
§3　Green 函数及其性质 …… 174
§4　Dirichlet 问题的 Green 函数法 …… 178
§5　Dirichlet 问题解的验证 …… 187
§6　调和函数的基本性质 …… 193
§7　强极值原理及 Neumam 问题解的唯一性 …… 198
§8　Dirichlet 问题的等价问题 …… 212
§9　二阶线性椭圆型方程的爆破解与弱解的一个结果 …… 219
第五章　复习与考试 …… 227

附录 1　记号与公式 …… 235
附录 2　复变函数论及其应用 …… 239
参考文献 …… 242
后记 …… 243

第一章　绪　论

偏微分方程是一门具有 280 多年历史的学科。由于它具有直接地联系着许多自然现象的特点，因此 19 世纪以来，它一直是数学科学的中心分支之一。但由于它的复杂性和困难性，从而使它远远不如比它出现较迟的近世代数、拓扑学和泛函分析的理论更为完整。直到 1950 年左右，人们才建立了常系数线性偏微分方程的一般理论。1970 年左右线性偏微分方程才在理论上得到重大进展。近几十年来，非线性偏微分方程的研究发展很快，应用也很广。

我们主要介绍线性偏微分方程的经典理论。此外，还将收集一些期刊上的材料，丰富和拓宽这方面的内容。由于这门课中我们将广泛使用专门的知识，例如泛函分析、复变函数等，因此在必要时我们总是把其中的结果拿来使用。在这门课中，我们分别从以下几个方面进行系统的介绍：先讲述偏微分方程的基本知识，包括方程的分类、化简以及要解决的问题是什么；然后重点介绍偏微分方程中简单的并具很强实际背景的三个典型方程：波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0$，热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0$ 以及位势方程 $\Delta u = 0$ 在一定条件下的解的存在性、唯一性和稳定性等方面的问题；最后总结一下学习本课程的内容，供读者复习参考。

下面先介绍偏微分方程的基本知识。

§1　偏微分方程的一些基本概念

首先给出偏微分方程的定义：

定义 1　所谓偏微分方程就是指含有未知函数的偏导数的关系式。例如，关系式

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=y$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8u=7y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

都是偏微分方程。

设 Ω 是 R^n 中的一个区域，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 Ω 中的点。假定 $u=u(x)$ 是 $\Omega \to R$ 的一个连续的具有 k 阶偏导数的函数。对固定的正整数 k，我们用符号 $D^k u$ 表示 u 的所有 k 阶偏导数

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}$$

其中$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$是集合$\{1,2,\cdots,n\}$中 k 个元素的任意排列。于是，我们可以把 $D^k u$ 看成是 n^k 维欧氏空间 $R_n{}^k$ 上的向量，并记它的长度为

$$|D^k u|=\left(\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n}\cdots\sum_{i_k=0}^{n}\left|\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}\right|^2\right)^{1/2}$$

特别地，当 $k=1$ 时，我们称 n 维向量

$$\nabla=Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

为 u 的梯度；当 $k=2$ 时，我们称 $n\times n$ 矩阵

$$D^2 u=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$

为 u 的 Hessian 矩阵。我们称 Hessian 矩阵的迹 $\mathrm{tr}(D^2 u)$ 为 Laplace 算子。证为

$$\Delta u=\mathrm{tr}(D^2 u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

设 $F=(F_1,F_2,\cdots,F_n)$是定义在 $\Omega\to R$ 的一个向量函数，即 F_i

是 $\Omega \to R$ 的一个函数。F 的散度定义为：

$$\mathrm{div}F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

于是我们有

$$\Delta u = \mathrm{div}(Du)$$

即 Δu 是 u 的梯度的散度。

下面定义偏微分方程的阶：

定义 2　方程中所含偏导数的最高阶数称为该方程的阶数。

因而如下形式的方程

$$F(x, u, Du, \cdots, D^k u) = 0 \tag{1}$$

一般情况下表示一个 k 阶偏微分方程。其中 F 是一个 $\Omega \times R \times R^n \times \cdots \times R^{n^k}$ 上的已知函数。

定义 3　我们把满足方程(1) 的所有函数 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为方程(1) 的解。如果 $u \in C^k(\Omega)$，则称这样的解为方程(1) 的古典解。

容易验证 $u(x,y) = e^x \sin y$ 是方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 的解。$u = f(xy)$ 是方程 $xu_x - yu_y = 0$ 的解，其中 f 是任意可微的函数。但对于 $u = \frac{1}{r}$，我们只能验证它是方程 $\Delta u = 0$ 的不包含点 (x_0, y_0, z_0) 的任何区域上的解。其中 $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$。这里需要注意的是，$u = \frac{1}{r}$ 虽然不是方程 $\Delta u = 0$ 整个空间上的解，但它仅在一点 (x_0, y_0, z_0) 处有奇性，在以后的讨论中这样的解显得很重要，我们把这样具有奇性的解称为方程的广义解。

在常微分方程理论中，通解的作用是非常大的，但在偏微分方程中虽然方程的解可能有无穷多个，例如 $u = C_1 \frac{1}{r} + C_2$ 是方程 $\Delta u = 0$ 的解，但由这种形式的解，我们解不出这个方程形如 $u = \ln r$ 和 $u = r^n \cos n\theta$ 的解。因此，通解的概念在偏微分方程中没有多少地位。只有极少的方程有通解，而且我们今后知道，偏微分方程的解不需要全部求出，在绝大多数的情况下，只要求求出符合一定条件的解就可以了。

定义 4　如果方程(1) 可表示成

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{2}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com