应用概率统计

（第二版）

Yingyong Gailü Tongji

主编　吴松林　吴传志

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

应用概率统计

（第二版）

主编　吴松林　吴传志

编者　伍度志　杨秀文
　　　林　琼　许川容

重庆大学出版社

内容提要

本书主要介绍随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、随机模拟实验与统计实验。本书基本理论完善，结构合理，力求应用。章末附有习题，书末有解答。

本书可作为高等工科院校的本科教育、专科教育、高等职业技术教育、成人教育的概率与数理统计课程的教材，也可供其他各类技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计/吴松林，吴传志主编. —2版. —重庆：重庆大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5624-2818-3

Ⅰ.应… Ⅱ.①吴…②吴… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 193071 号

应用概率统计

(第二版)

主编 吴松林 吴传志

责任编辑：曾显跃 版式设计：曾显跃

责任校对：任卓惠 责任印制：张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆大学建大印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：16 字数：399 千

2003 年 8 月第 1 版 2008 年 1 月第 2 版 2008 年 1 月第 3 次印刷

印数：7 001—10 500

ISBN 978-7-5624-2818-3 定价：25.00 元

第二版前言

在新世纪的教学改革中，大多数高校都针对工科数学的教学内容和课程体系进行了一系列的改革尝试。作为随机分析的入门课程，《概率论与数理统计》的重要性不容置疑，为了与高等教育的改革协调一致，它的改革刻不容缓。在全国高等院校工科数学课程指导委员会关于工科数学系列课程教学改革的建议中，指出微积分、几何与代数、概率与统计、数学实验是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础。

本书的作者均经过长期的教学和科研，积累了丰富的经验，将随机模拟实验和统计实验增加在教材里，这是一个极大的改革尝试，必将极大提高老师和学生的实践能力。现在的第二版在第一版的基础上作了以下修订：

①更正了第一版的错误和不够严谨的地方；

②理顺了部分章节的顺序，如第1、2、4，9章；

③替换了部分例题和习题；

④在部分章节增加了内容，如第1章的概率史，第3章的Γ函数；

⑤增加了第10章（概率统计实验）。

本书改版的具体分工如下：吴松林负责第6、7、8、9、10章及全书的统稿；伍度志负责第1、5章以及全书的错误的修改；林琼负责第3章；杨秀文负责第2章；许川容负责第4章。

本书得到了后勤工程学院数学教研室的各位老师的大力支持，提出了宝贵意见，在此深表谢意。

编　者

2007年10月

前言

本书是根据高等学校工科数学课程指导委员会审定的《概率与数理统计课程基本要求》编写的，可作为高等院校工程本科教育、专科教育、高等职业技术教育、成人教育概率与数理统计课程的教材，也可供其他各类技术人员参考。

本书力求在结构体系、内容安排、习题选择等方面既要以基本概念、基本理论为主线，又要时时穿插应用案例，努力使学生了解概率与数理统计的思想、理论及方法，培养学生运用概率统计的方法分析和解决实际问题的能力。

本书分两部分。概率论部分（第1章至第5章）作为基础知识，是全书的重点；数理统计部分（第6章至第9章）介绍了统计的基本内容。

参与本书编写的有吴传志、杨秀文、林琼、许川容。全书由吴传志统稿。

本书由后勤工程学院数学教研室主任严尚安教授主审，参与审稿的还有重庆大学何良材教授，他们提出了许多宝贵意见，对此，我们表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，书中难免存在不少缺点和错误，希望读者批评指正。

编　者

2003年4月

目录

第 1 章 随机事件与概率

1.1 概率论发展简史

概率论不仅是当代科学的重要数学基础之一，而且是当代社会和人类日常生活所必需的知识之一. 正如 19 世纪法国著名数学家拉普拉斯所说:“对于生活中的大部分，最重要的问题实际上只是概率问题. 你可以说几乎我们所掌握的所有知识都是不确定的，只有一小部分我们能确定地了解. 甚至数学科学本身，归纳法、类推法和发现真理的首要手段都是建立在概率论的基础之上的. 因此，整个的人类知识系统是与这一理论相联系的……” 的确，人们只要浏览一下当今的报纸，看一看电视，就会发现在某种程度上概率统计的语言已经成为人类生活中重要的一部分. 然而，饶有趣味的是，这门被拉普拉斯称为“人类知识的最重要的一部分”的数学却直接地起源于一种相当独特的人类行为的探索:人们对于机会性游戏的研究思考.

1.1.1 机会性游戏

所谓“机会性游戏”，就是靠运气取胜的一些游戏，如赌博等. 这种游戏不是哪一个民族的单独发明，它几乎出现在世界各地的许多地方，如埃及、印度、中国等. 在玩骰子游戏的几千年的时间里，概率理论的某些思想可能早应该出现了. 但是，一直没有迹象表明人们观察到赌博与数学之间的直接关系，甚至没有发现有人意识到骰子点数下落的频率的计算是可能的、有效的，或每一面会以相同的频率出现等这些最简单的概率思想的萌芽. 对于概率的思想出现得如此缓慢的现象，人们提出了许多解释的原因. 这些解释包括:可能是由于缺少完美平衡和“诚实”的骰子，因而阻碍了人们发现任何可察觉的规律;或者由于缺少适当的数学概念和符号，从而阻碍了数学的探索;还有一个更有力的原因，可能是“随机”概念本身与时空观念相对. 长期以来，人们一直认为:一系列的好运和厄运都是神授的. 人们相信上帝或众神以某种预先确定的计划指导着世俗的事件，所以随机不但是不可能的，甚至是不可想象的. 古希腊人似乎已得到这样的结论:精确和规律只存在于神的王国，而混沌和无规律则是人类世界的特征. 但是他们不愿使理想化的自然规律屈从于一个不完美的物理世界的事实，因而未能发展概率的思想. 还有一个解释涉及道德的规范，赌博长期以来被视为一种不道德的行为，历史上充满了限制、

制止赌博的各种尝试.既然赌博被视为不道德的,那么将机会性游戏作为科学研究的对象也就是大逆不道了.然而这些原因没有一个得到广泛的认可,人们对每一个猜测都提出了反驳的理由.

1.1.2 概率的萌芽

直到文艺复兴时期,随着阿拉伯数字和计算技术的广泛传播,简单代数和组合数学的发展,并且哲学的思想开始转变、拓展时,随机事件的试验和计算在本质上才有所进展,概率的思想才开始逐渐浮出水面.现在有史可查的对于赌博问题最早加以研究的是从意大利开始的,15世纪后期和16世纪早期,当一些意大利数学家开始思考包括在赌博游戏中各种存在结果的数学比率时,开始有了对概率第一次纯数学的处理.

卡尔达诺(1501—1576)是意大利数学和医学教授,他天资聪明,常常不循规蹈矩,有着有趣而丰富的经历.他的最著名的著作是1524年出版的《伟大的艺术》,其中包括了那时所有发展起来的代数规则,包括求三次和四次方程的根的解法.在他一生中超过40年的时间里,卡尔达诺几乎每天都参与赌博.作为对在不合适的活动中浪费时间的补偿,他认真地分析了这种活动中的有价值的方面——智力因素.例如,从一副牌中抽出A的概率是多少?同时掷两个骰子,出现点数的和为7的概率是多少?等等.最终,在一本名叫《机会性游戏手册》的书中,他公布了这些调查和思考的结果和他关于赌博实践的体会.这本书成书于1526年前后,但直到100多年后的1663年才出版.在书中他提醒他的赌徒朋友:在分牌时,得到某一张牌的机会是随着前一张牌的选走而增大的.在题为"掷一个骰子"的章节里,他写到:"我能掷出2、4、6,同时也能掷出1、3、5.因此,如果骰子是'诚实'的,那么下赌注就应依据这种等可能性;如果骰子不是'诚实的',那么它就以一定的或大一点或小一点的比例离开这种等可能性."这里面已包含了"把概率定义为等可能性事件的比"的思想萌芽,即一个特殊结果的概率是所有达到这个结果的可能的方法的数目被一个事件的所有可能结果的总和所除.此时是第一次,人们看到关于骰子的问题由经验向理论的概率思想的转变.从这一角度来讲,有人认为卡尔达诺可以被称为是"概率论之父",概率论这一个数学分支应当以此作为起点.但是,这种观点并未得到广泛认可.除了卡尔达诺,伟大的天文学家伽利略也早已开始对掷骰子的问题进行数学化的思考,在一篇写于1613年至1623年之间标题为《关于骰子游戏的思想》的短文中,伽利略解释了在抛掷三枚骰子时为什么会有216种同等可能的结果的问题.

1.1.3 概率的产生

尽管有卡尔达诺和伽利略等先驱者的一些非常重要的工作,而概率论历史学家大多赞同这样一个观点:对于数学中一个非常特别问题的解法探求成为数学化的概率科学产生的标志之一,这个问题被称作"点问题".所谓"点问题",是指当游戏在完成前被终止时,怎样处理两名技能相当的游戏者的赌金分配问题,其依据是游戏者的得分数或是游戏终止时的点数.意大利的帕巧利(1445—1509)早在1494年出版的《算术书》一书中,就提到了赌博中常常遇到的"点问题",他是最早在数学著作中提到点问题的作者.紧接着,卡尔达诺和他的对手塔尔塔利亚(1499—1557)都讨论过这个问题.然而,所有这些人,对这一问题得出的结论都不正确.直到100多年后,在1654年,一个名为德·梅勒(1607—1684)的法国人将这个问题寄给了当时的数学天才帕斯卡,从此概率论历史上一个决定性的阶段才开始了.

帕斯卡(1623—1662)在早年就表现出了超常的数学能力，在数学史中他被称做“最伟大的天才”，他曾经对微积分、射影几何、概率论等数学分支作出了巨大的贡献. 他拥有如此高的数学天赋和非常敏锐的直觉能力，他理应创造更多的发现. 不幸的是，在他生命的大部分时间里，他备受敏感性神经痛和精神幻觉症的折磨. 他于 1662 年去世，年仅 39 岁. 与帕斯卡共同分享概率论创始人声誉的法国另一位数学家费马(1601—1665)的一生则充满了喜悦. 他的职业是一名律师，他把自己大部分的空余时间都献给了数学研究. 虽然他没受过什么特别的数学训练，但是在数学这一领域中，却取得了同时代其他数学家不可比拟的重大发现. 费马的众多重要的贡献丰富了数学的很多领域，所以被称为“业余数学家之王”.

德·梅勒的问题的形式是：德·梅勒和他的一个朋友每人出 30 个金币，两人各自选取一个点数，谁选择的点数首先被掷出 3 次，谁就赢得全部的赌注. 在游戏进行了一会儿后，德·梅勒选择的点数“5”出现了 2 次，而他的朋友选择的点数“3”只出现了一次. 这时候，德·梅勒由于一个紧急事情必须离开，游戏不得不停止. 他们该如何分配赌桌上的 60 个金币的赌注呢？他们对这一问题的看法和计算方法不一致，为此而争论不休. 后来德·梅勒将这个问题告诉了帕斯卡，帕斯卡对此也很感兴趣，又写信告诉了费马. 于是，在这两位伟大的法国数学家之间开始了具有划时代意义的通信. 在通信中，两人用不同的方法正确地解决了这个问题. 帕斯卡和费马正确解决了“点问题”的这一事件被伊夫斯称为“数学史上的一个里程碑”. 在概率论的历史上，一般的传统观点则将这一事件看作为数学概率论的起始标志.

1657 年，荷兰数学家惠更斯(1629—1695)发表了《论赌博中的计算》，这是最早的概率论著作. 以上数学家的著述中所出现的第一批概率论概念与定理，标志着概率论的诞生. 而概率论作为一门独立的数学分支，真正的奠基人是雅格布·伯努利(1654—1705). 他在遗著《猜度术》中首次提出了后来以“伯努利定理”著称的极限定理，在概率论发展史上占有重要地位. 伯努利之后，法国数学家棣莫弗(1667—1754)将概率论又作了巨大推进，他提出了概率乘法法则，正态分布和正态分布率的概念，并给出了概率论的一些重要结果. 之后法国数学家蒲丰(1707—1788)提出了著名的“普丰问题”，引进了几何概率. 另外，拉普拉斯、高斯和泊松(1781—1840)等对概率论做出了进一步奠基性工作. 特别是拉普拉斯，他是严密的、系统的科学概率论的最卓越的创建者，在 1812 年出版的《概率的分析理论》中，拉普拉斯以强有力的分析工具处理了概率论的基本内容，实现了从组合技巧向分析方法的过渡，使以往零散的结果系统化，开辟了概率论发展的新时期. 泊松则推广了大数定理，提出了著名的泊松分布.

19 世纪后期，极限理论的发展成为概率论研究的中心课题，俄国数学家切比雪夫对此作出了重要贡献. 他建立了关于独立随机变量序列的大数定律，推广了棣莫弗—拉普拉斯的极限定理. 切比雪夫的成果后被其学生马尔可夫发扬光大，影响了 20 世纪概率论发展的进程.

19 世纪末，一方面概率论在统计物理等领域的应用提出了对概率论基本概念与原理进行解释的需要，另一方面科学家们在这一时期发现的一些概率论悖论也揭示出古典概率论中基本概念存在的矛盾与含糊之处. 这些问题却强烈要求对概率论的逻辑基础做出更加严格的考察.

1.1.4　概率论的公理化

俄国数学家伯恩斯坦和奥地利数学家冯·米西斯(R. von Mises，1883—1953)对概率论的严格化做了最早的尝试，但它们提出的公理理论并不完善. 事实上，真正严格的公理化概率论

只有在测度论和实变函数理论的基础才可能建立.测度论的奠基人法国数学家博雷尔(E. Borel,1781—1956)首先将测度论方法引入概率论重要问题的研究,并且他的工作激起了数学家们沿这一崭新方向的一系列搜索.特别是苏联数学家科尔莫戈罗夫的工作最为卓著,他在1926年推倒了弱大数定律成立的充分必要条件,后又对博雷尔提出的强大数定律问题给出了最一般的结果,从而解决了概率论的中心课题之一——大数定律,成为以测度论为基础的概率论公理化的前奏.

1933年,科尔莫戈罗夫出版了他的著作《概率论基础》,这是概率论的一部经典性著作.其中,科尔莫戈罗夫给出了公理化概率论的一系列基本概念,提出了六条公理,整个概率论"大厦"可以从这六条公理出发建筑起来.科尔莫戈罗夫的公理体系逐渐得到数学家们的普遍认可.由于公理化,概率论成为一门严格的演绎科学,并通过集合论与其他数学分支密切地联系.科尔莫戈罗夫是20世纪最杰出的数学家之一,他不仅仅是公理化概率论的建立者,在数学和力学的众多领域,他都作出了开创或奠基性的贡献,同时,他还是出色的教育家.由于概率论等其他许多领域的杰出贡献,科尔莫戈罗夫荣获1980年的沃尔夫奖.

1.1.5 进一步的发展

在公理化基础上,现代概率论取得了一系列理论突破.公理化概率论首先使随机过程的研究获得了新的起点.1931年,科尔莫戈罗夫用分析的方法奠定了一类普通的随机过程——马尔可夫过程的理论基础.科尔莫戈罗夫之后,对随机过程的研究作出重大贡献而影响着整个现代概率论的重要代表人物有莱维(1886—1971)、辛钦、杜布和伊藤清等.1948年莱维出版的著作《随机过程与布朗运动》提出了独立增量过程的一般理论,并以此为基础极大地推进了作为一类特殊马尔可夫过程的布朗运动的研究.1934年,辛钦提出平稳过程的相关理论.1939年,维尔引进"鞅"的概念,1950年起,杜布对鞅概念进行了系统的研究而使鞅论成为一门独立的分支.从1942年开始,日本数学家伊藤清引进了随机积分与随机微分方程,不仅开辟了随机过程研究的新道路,而且为随机分析这门数学新分支的创立和发展奠定了基础.像任何一门公理化的数学分支一样,公理化的概率论的应用范围被大大拓宽.

1.2 随机事件

1.2.1 随机试验与随机事件

(1)随机现象

自然现象和社会现象是多种多样的.有一类现象,在一定条件下必然发生(或必然不发生),如同性电荷相斥,异性电荷相吸;在标准大气压下,温度达到100 ℃的纯水必然沸腾;从地球上看,太阳每天从东方升起等.这种在保持条件不变的情况下,重复实验或观察,其结果总是确定的现象称为**确定性现象**.过去学过的数学就是研究这类现象的.还有一类现象,在保持条件不变的情况下,重复实验或观察,或出现这种结果,或出现那种结果,这一类现象称为**随机现象**.如掷一枚质地均匀的骰子,观察出现的点数;抛一枚质地均匀的硬币,观察出现的正反面;同一门炮向同一目标射击,观察弹着点的位置等.

人们经过长期实践并深入研究发现，对于上述这类现象，虽然就每次实验或观察而言，其结果具有不确定性，但在大量重复实验和观察下，其结果就呈现出某种规律性. 如抛一枚质地均匀的硬币，尽管事先无法知道哪一面向上，但是当抛硬币的次数相当多时，出现正面和反面的比例约为 1∶1；查看各国人口统计资料，发现新生婴儿中男女各占约一半等. 随机现象所呈现的这种规律性称为随机现象的统计规律性. 概率与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

概率统计的理论和方法应用非常广泛，几乎遍及所有科学技术领域. 例如，使用概率统计的方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报以及产品的抽样检验等.

(2)随机试验

在一定条件下，对自然现象和社会现象进行的实验或观察，称为**试验**，常用 E 表示.

例 1.1　将一枚质地均匀的硬币抛两次，观察出现正、反面的情况.

例 1.2　掷一枚质地均匀的骰子，观察出现的点数.

例 1.3　记录某电话交换台一小时接到的呼叫次数.

例 1.4　一射手进行射击，直到击中目标为止，观察射击情况.

例 1.5　在一批灯泡里，任取一只，测试其寿命.

例 1.6　一口袋中装有红、白两种颜色的乒乓球，从袋中任取一只球，观察其颜色.

上述试验均具有以下共同特点：

①可以在相同条件下重复进行；

②每次试验的可能结果不止一个，但事先明确试验的所有可能结果；

③每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

具有上述三个特点的试验，称为**随机试验**，简称**试验**.

1.2.2　随机事件与样本空间

随机试验的结果称为该随机试验的**随机事件**，简称事件. 用 A、B、C 等表示. 如例 1.2 中，“出现 1 点”、“出现偶数点”、“点数大于 3”都是随机事件.

随机试验的每一个可能的基本结果称为**基本事件**(样本点)，记作 ω.

全体基本事件的集合称为**样本空间**，记作 Ω .

例如，例 1.1 中的试验，基本事件有两个：正(表示正面向上)、反(表示反面向上)，样本空间 $\Omega_1=\{正,反\}$；

例 1.2 中的试验，基本事件有六个：“出现 1 点”、“出现 2 点”、“出现 3 点”、“出现 4 点”、“出现 5 点”、“出现 6 点”，样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

同样，例 1.3、例 1.4、例 1.5、例 1.6 的样本空间分别为：

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

$\Omega_4=\{1,01,001,\cdots\}$，这里“0”表示没有击中，“1”表示击中；

$\Omega_5=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$；

$\Omega_6=\{红色,白色\}$.

显然，基本事件是随机事件，由基本事件组成的集合也是随机事件. 因此，随机事件是样本空间的子集，基本事件是样本空间中仅由单个样本点组成的子集. 特殊地，样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 也是随机事件.

通常说"事件发生",是指该事件中的一个基本事件发生;反之,如果某事件的一个基本事件发生,则该事件发生.如例1.2中的试验,事件A表示"出现偶数点".说"事件A发生",是指"出现2点"、"出现4点"、"出现6点"这三个基本事件中的一个发生;反之,当"出现2点"、"出现4点"、"出现6点"这三个基本事件之一发生时,事件A发生.

如果在每次试验的结果中,某事件一定发生,称该事件为**必然事件**(如样本空间Ω).如果在每次试验的结果中,某事件一定不发生,称该事件为**不可能事件**(如空集$\varnothing$).又如,例1.2中事件"点数不大于6"是必然事件,"点数大于6"是不可能事件.显然,必然事件和不可能事件所反映的现象是确定性现象,并不具有随机性,这说明确定性现象是作为随机性现象的特例来研究的.

1.2.3 事件的关系与运算

任一随机事件是样本空间的子集,所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的.设试验E的样本空间为Ω,A、B、$A_k(k=1,2,\cdots)$是E的事件,它们都是Ω的子集.

(1)包含关系

如果事件A发生,导致B必然发生,则称事件B包含事件A,记作$A\subset B$或$B\supset A$.包含关系可用图1.1说明,图中正方形表示样本空间Ω,圆A、B分别表示事件A与事件B.

如在例1.2中,事件A为"出现偶数点",事件B为"出现的点数不小于2",显然$A\subset B$.

如果$A\subset B$且$B\subset A$,称事件A与事件B相等,记为$A=B$.如在例1.2中,事件A为"出现偶数点",与事件B为"出现2、4、6点"是相等的.

(2)事件的和

事件A与事件B中至少有一个发生的事件,称为事件A与事件B的和,记为$A\cup B$,如图1.2所示.

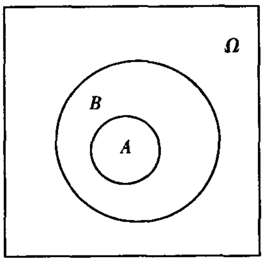

图1.1 $A\subset B$

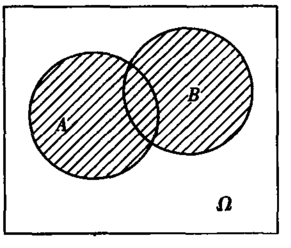

图1.2 $A\cup B$

例如:$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2,3,4\}$,则$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

类似地,事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生,称这一事件为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和,记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$;可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生,称这一事件为$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和,记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$,简记为$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(3)事件的积

事件A与事件B同时发生的事件,称为事件A与事件B的积,记为$A\cap B$或AB,如图1.3所示.

例如：$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A\cap B=\{1\}$.

类似地，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生，称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$，简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

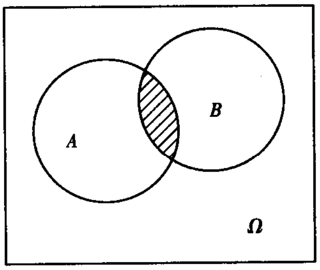

图 1.3　$A\cap B$

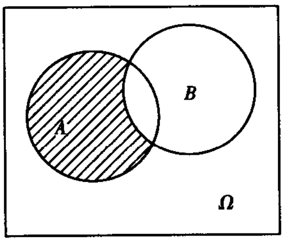

图 1.4　$A-B$

(4)互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，称 A、B 是互不相容的(或互斥的)事件.

如在例 1.2 中，"出现奇数点"与"出现偶数点"是互不相容事件.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生，即

$$A_i\cap A_j=\varnothing,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$$

称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

(5)事件的差

A 发生且 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$，如图 1.4 所示.

例如：$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A-B=\{5\}$.

(6)逆事件

如果事件 A 与事件 B 中必有一个发生，且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件)，记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$.

如例 1.2 中，"出现奇数点"的逆事件是"出现偶数点".

显然　$\overline{\overline{A}}=A$，$A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A-B=A\overline{B}$.

(7)完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件一定发生，即

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\Omega$$

则称这 n 个事件构成完备事件组.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\Omega,A_i\cap A_j=\varnothing,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$$

则称这 n 个事件构成互不相容的完备事件组.

显然，样本空间的所有基本事件构成互不相容的完备事件组.

将事件之间的关系与集合论的概念对照如表 1.1.

表 1.1

记　号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\omega\in\Omega$	基本事件,样本点	Ω 的元素
$A\subset\Omega$	事件 A	Ω 的子集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 等于集合 B
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并
$A\cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件	集合 A 的补集
$A-B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 无公共元素

与集合的运算规律类似,事件的运算满足如下规律:

交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

不难将对偶律推广到有限个事件中:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}$$

例 1.7　设一个工人生产了三个零件,记 A_1="第 1 个零件是正品",A_2="第 2 个零件是正品",A_3="第 3 个零件是正品",试表示:

①没有一个零件是次品;

②只有第一个零件是次品;

③恰有一个零件是次品;

④至少有一个零件是次品.

解　①"没有一个零件是次品"表示为 $A_1A_2A_3$;

②"只有第一个零件是次品"表示为$\overline{A_1}A_2A_3$;

③"恰有一个零件是次品"表示为$(\overline{A_1}A_2A_3)\cup(A_1\overline{A_2}A_3)\cup(A_1A_2\overline{A_3})$;

④"至少有一个零件是次品"表示为$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$或$\overline{A_1A_2A_3}$.

1.3　概率的定义及几类概率

对于随机现象的研究,不仅要知道它可能出现的各个事件,更重要的是得到各事件发生可

能性的大小，这样才更有利于认识和改造世界.

对于一个随机试验，不难发现一些事件发生的可能性大些，一些事件发生的可能性小些；而有些事件发生的可能性相差不大. 那么，应该如何精确地反映事件发生可能性的差异呢？这就需要一个定量刻画事件发生可能性大小的指标，这个指标至少应满足如下两个条件：

①客观性　对于同一个事件，在任何一次试验中它的值都是一定的.

②符合一般常识　事件发生的可能性大，则它的值大；事件发生的可能性小，则它的值小.

将这个刻画事件发生可能性大小的数量指标称为事件的概率. 事件 A 的概率记为 $P(A)$，并规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

在概率论的发展过程中，人们针对不同的问题，从不同角度给出了概论的定义，但是，这些定义都存在一定的缺陷，仅能很好地处理某些类型的随机试验.

1.3.1　统计概率

通过事件发生的频率来定义概率是一种最常用的方法，广泛地应用于统计学中. 其基本思想如下：

①与事件 A 有关的随机试验在相同条件下可重复进行.

②在 n 次重复试验中，记 n_A 为事件 A 发生的次数，即事件 A 出现的频数，称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 出现的频率.

③长期的实践表明：随着试验次数的增加，频率 $f_n(A)$ 会稳定在某一常数 P 附近，称为频率的稳定值. 这个稳定值就是该事件的概率，记 $P(A)=P$.

统计概率的定义虽然非常直观，但是它具有明显的缺陷.

实际中，任何一个随机试验都不可能重复无限多次. 因而也很难得到频率的稳定值，但是它给出了概率的近似计算方法，当试验次数比较大时，可用频率作为概率的估计值.

例 1.8　投掷硬币试验.（此处沿用书上的例 1.8）

由概率的统计定义，不难得到概率的如下性质：

性质 1　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

性质 2　$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$

性质 3.1（加法公式）　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

性质 3.2　$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

性质 3.3　若 A、B 互不相容，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

性质 3.4　若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 4　$P(A)=1-P(\overline{A})$

性质 5　若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$

性质 6　对事件 A、B，$P(A-B)=P(A\overline{B})$