



普通高等教育“十一五”国家级规划教材专用辅导

高等数学

同步辅导

第六版 上册

主 编：同济大学数学系 彭 舟

- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解
- 考研真题精选

航空工业出版社



教育部推荐教材 工科类数学课程教材 工科类数学课程教材

高等数学

第六版 上册

第六版 上册

高等教育出版社

- 微分方程与积分
- 多元微分与积分
- 向量代数与微分
- 微分方程与积分
- 微分方程与积分

高等教育出版社



普通高等教育“十一五”

013/5=6C4

:1

2004

用辅导

要 要 容 内

高等数学

同步辅导

第六版 上册

主 编：同济大学数学系 彭 舟

航空工业出版社
北京

内 容 提 要

本书是与同济大学数学系主编的《高等数学》第六版相配套的学习辅导用书,全书是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试要求编写的。可供理、工、农、医(非数学专业)大学生学习高等数学时作为参考用书,也可供考研数学复习第一阶段使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导. 上 / 彭舟主编. —北京: 航空工业出版社, 2004.8 (2008.7 重印)

ISBN 978-7-80183-419-5

I. 高… II. 彭… III. 高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 130245 号

高等数学同步辅导(上册)

Gaodeng Shuxue Tongbu Fudao (Shangce)

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行部电话: 010-64815615 010-64978486

北京山华苑印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经售

2004 年 8 月第 1 版

2008 年 7 月第 5 次印刷

开本: 787 × 960 1/16

印张: 41.25

字数: 880 千字

印数: 13001-27000

定价: 50.00 元 (上、下册)

前 言

本书是同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)的指定配套参考用书,适合初次学习《高等数学》课程的大学生及准备报考硕士研究生的人员复习《高等数学》时使用。

由于近年来教学改革的实施,高等数学课时有所减少,对概念的深入探讨、知识点的融会贯通、课本知识的灵活运用无法在课堂上完成,同学们急切需要一本合适的高等数学辅导书。为了满足同学们的需求,北京大学数学科学学院、同济大学数学系根据多年的高等数学教学经验,听取广大学生的意见,联合编写了这本《高等数学同步辅导》。

全书分上下两册,内容体系编排完全按照同济大学第六版教材。本书主要有以下特点:

1. **重点难点剖析**:在每章开始给出了大纲对本章各知识点的不同程度的要求,使学生在学习中做到有的放矢。

2. **教材内容归纳**:知识内容表格网络化,更有利于同学提纲挈领,深刻地理解各部分内容之间的关系,从整体的角度掌握课本内容。

3. **典型例题解析**:例题既包括与基本概念有关的各种题型,又有综合多个知识点具有一定难度的综合例题,从基础到提高,适合各种水平学生的需要。

4. **课本习题全解**:给出了每节课后习题的全解,供学生作为解题参考。

5. **考研真题精选**:精选了有代表性的近年考研真题及解答放在每章的最后,让学生在第一遍学习时就对研究生入学考试的难度要求有初步认识。

《高等数学同步辅导(第六版)》(上、下册)有科学完整的体系,如果合理地使用本书,必将事半功倍。本书的出版,如果能对广大学生在高等数学的学习和复习中有所帮助,那就是对我们工作的最大肯定。

由于时间仓促和水平所限,书中的不足之处恳请广大读者和专家给予批评指正。

编 者

二〇〇八年一月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	3
第二节 数列的极限	17
第三节 函数的极限	22
第四节 无穷小与无穷大	28
第五节 极限运算法则	32
第六节 极限存在准则 两个重要极限	36
第七节 无穷小的比较	40
第八节 函数的连续性与间断点	43
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	49
第十节 闭区间上连续函数的性质	52
总习题一	56
本章近年考研真题精选	60
第二章 导数与微分	64
第一节 导数概念	65
第二节 函数的求导法则	74
第三节 高阶导数	82
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	87
第五节 函数的微分	94
总习题二	99
本章近年考研真题精选	104
第三章 微分中值定理与导数的应用	107
第一节 微分中值定理	108
第二节 洛必达法则	116
第三节 泰勒公式	122
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	131
第五节 函数的极值与最大值最小值	142

第六节 函数图形的描绘	151
第七节 曲率	153
第八节 方程的近似解	158
总习题三	160
本章近年考研真题精选	165
第四章 不定积分	170
第一节 不定积分的概念与性质	171
第二节 换元积分法	176
第三节 分部积分法	183
第四节 有理函数的积分	189
第五节 积分表的使用	197
总习题四	199
本章近年考研真题精选	207
第五章 定积分	210
第一节 定积分的概念与性质	211
第二节 微积分基本公式	221
第三节 定积分的换元法和分部积分法	228
第四节 反常积分	238
*第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数	243
总习题五	249
本章近年考研真题精选	257
第六章 定积分的应用	262
第一节 定积分的元素法	263
第二节 定积分在几何学上的应用	264
第三节 定积分在物理学上的应用	276
总习题六	280
本章近年考研真题精选	284
第七章 微分方程	288
第一节 微分方程的基本概念	290
第二节 可分离变量的微分方程	293
第三节 齐次方程	298

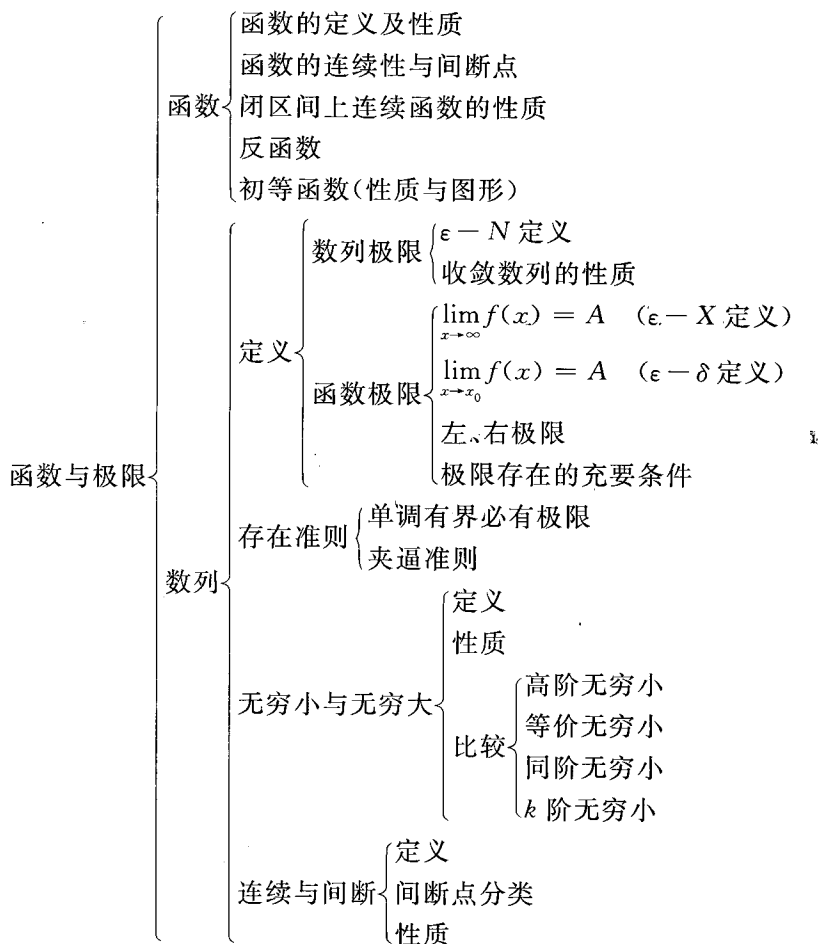
第四节	一阶线性微分方程	305
第五节	可降阶的高阶微分方程	313
第六节	高阶线性微分方程	321
第七节	常系数齐次线性微分方程	327
第八节	常系数非齐次线性微分方程	333
* 第九节	欧拉方程	343
* 第十节	常系数线性微分方程组解法举例	347
总习题七		353
本章近年考研真题精选		360

第一章 函数与极限

本章大纲要求

1. 理解函数的概念
2. 掌握函数单调性、周期性和奇偶性
3. 理解反函数和复合函数的概念
4. 熟悉基本初等函数性质及图形
5. 理解并掌握极限的 $\varepsilon - N$ 、 $\varepsilon - \delta$ 定义
6. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则), 会用两个重要极限求极限
7. 了解无穷大、无穷小的概念
8. 理解函数在一点连续的概念并会判断间断点的类型
9. 了解初等函数的连续性, 熟练掌握闭区间上连续函数的性质(介值定理与最值定理)

本章知识结构图



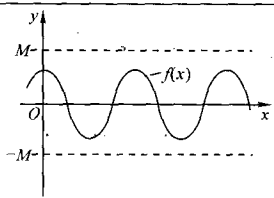
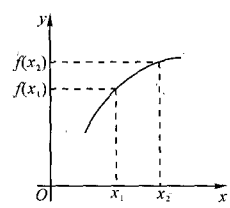
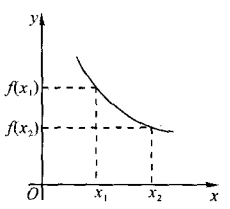
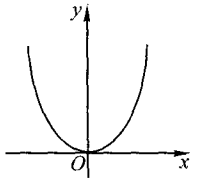
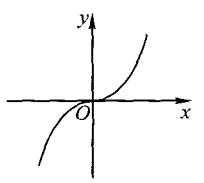
第一节 映射与函数

一、基本内容

表 1-1 函数及相关定义

名称	定 义	注 意	补充说明
函数	设 X, Y 是两个非空实数集合, 若存在对应法则 f , 使对任意 $x \in X$, 存在唯一 $y \in Y$ 与之对应, 称 f 是 X 到 Y 的函数, 记作 $y = f(x)$, X 称为定义域, $\{y \mid y = f(x), x \in X\} \subset Y$, 称为 f 的值域	三要素: 定义域、值域、对应法则	
复合函数	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 U , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X , 值域为 U^* , 且 $U^* \subset U$, 则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 或 $y = f \circ \varphi$ 为定义在 X 上的复合函数	定义域、值域的变化	结合律成立: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ 但交换律 $f \circ g = g \circ f$ 不成立
反函数	设函数 $y = f(x)$ 定义域为 D , 值域为 W , 对 $\forall y \in W$, 有满足 $f(x) = y$ 的唯一的 $x \in D$ 与之对应, 由这样的关系确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数		$f: X \rightarrow Y$ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ $f^{-1}(f) = I_X: X \rightarrow X$ $f \circ f^{-1} = I_Y: Y \rightarrow Y$ $(f^{-1})^{-1} = f: X \rightarrow Y$
一一对应	设 $f(x)$ 在 D 上有定义, 对 $\forall x_1, x_2 \in D$, 若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 或由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 称 $f(x)$ 在 D 上是一一对应的		把不同 x 映射为不同的 y
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成, 并可用一个解析式表示的函数	有限次	

表 1-2 函数性质

性质	定 义		图例或说明
有界性	函数 $f(x)$ 定义域为 D , 若存在 $M > 0$, 对 $\forall x \in D$ 有 $ f(x) \leq M$, 称 $f(x)$ 在 D 上是有界函数. 上界: $\exists M_1$, 对 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \leq M_1$; 下界: $\exists M_2$, 对 $\forall x \in D$, 有 $f(x) \geq M_2$		
无界性	函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 对 $\forall M > 0, \exists x_0 \in D$, 使 $ f(x_0) > M$, 称 $f(x)$ 在 D 上无界		如: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上 无界: $\forall M > 0, \exists x_0 = \frac{1}{2M}$, $f(x_0) = 2M > M$
单调性	单调增加	函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D, \forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加	
	单调减少	函数 $f(x)$ 定义域为 D , 区间 $I \subset D, \forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少	
奇偶性	偶函数	函数 $f(x)$ 定义域 D 关于原点对称, 若对 $\forall x \in D$, 有 $f(x) = f(-x)$, 称 $f(x)$ 为偶函数	
	奇函数	函数 $f(x)$ 定义域 D 关于原点对称, 若对 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数	

续表 1-2 函数性质

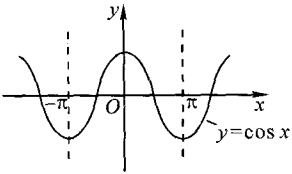
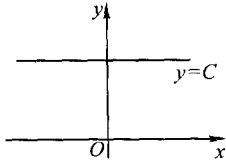
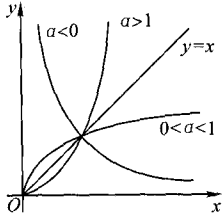
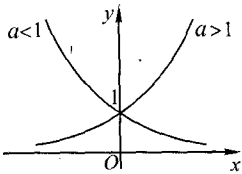
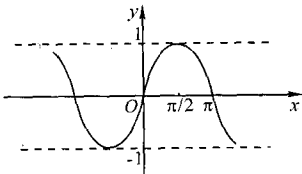
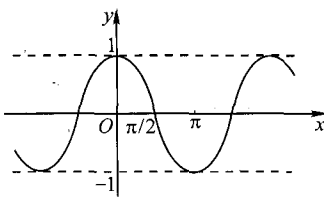
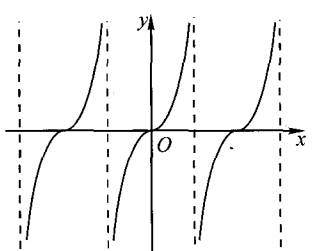
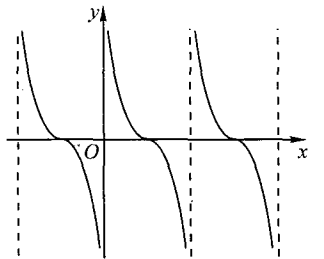
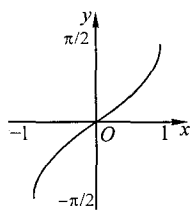
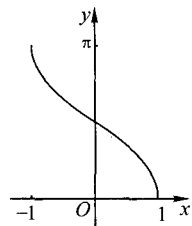
性质	定 义	图例或说明
周 期 性	函数 $f(x)$ 定义域为 D , 若存在一个正数 l , 使对 $\forall x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立, 称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 一般指最小正周期	

表 1-3 基本初等函数

名称	定义与性质	图 形
常数 函数	$y = C (-\infty < C < +\infty)$ 其图形为平行于 x 轴的直线	
幂 函 数	$y = x^a$ (a 为常数) $a > 0$, 为增函数 $a < 0$, 为减函数 定义域因 a 而异	
指数 函数	$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ $a > 1$ 时, 为增函数 $a < 1$ 时, 为减函数	
三角 函数	正弦函数: $y = \sin x$, 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 奇函数, 周期 $T = 2\pi$, $ \sin x \leq 1$, 最大值为 1, 最小值为 -1	

续表 1-3 基本初等函数

名称	定义与性质	图 形
三角函数	余弦函数: $y = \cos x$, 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 偶函数, 周期 $T = 2\pi$, $ \cos x \leq 1$, 最大值为 1, 最小值为 -1	
	正切函数: $y = \tan x$, 定义域 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 奇函数, 周期 $T = \pi$	
	余切函数: $y = \cot x$, 定义域 $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 偶函数, 周期 $T = \pi$	
反三角函数	反正弦函数: $y = \arcsin x$ 定义域: $[-1, 1]$ 值域: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 奇函数, 单调增函数	
	反余弦函数: $y = \arccos x$ 定义域: $[-1, 1]$ 值域: $[0, \pi]$ 非奇非偶函数, 单调减函数	

续表 1-3 基本初等函数

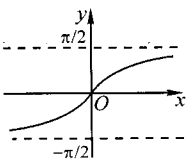
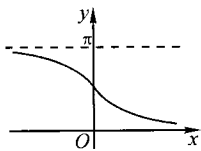
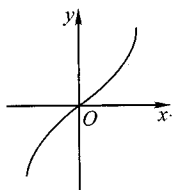
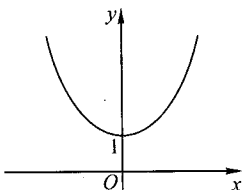
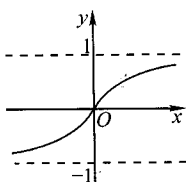
名称	定义与性质	图 形
反三角函数	反正切函数 $y = \arctan x$ 定义域: $(-\infty, +\infty)$ 值域: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 奇函数, 单调增函数	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 定义域: $(-\infty, +\infty)$ 值域: $[0, \pi)$ 非奇非偶函数, 单调减函数	

表 1-4 双曲函数

名称	定义与性质	图 形
双曲正弦	$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 定义域: $(-\infty, +\infty)$ 值域: $(-\infty, +\infty)$ 奇函数, 单调增函数	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 定义域: $(-\infty, +\infty)$ 值域: $[1, +\infty)$ 偶函数	
双曲正切	$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ 定义域: $(-\infty, +\infty)$ 值域: $[-1, 1]$ 奇函数, 单调增函数	

二、重点难点

1. 函数定义的两要素:定义域及对应法则 f .

两个函数的定义域与对应法则均相同时,两函数相同;函数表示法与具体变量选用的字母无关,如: $y = x^2$ 与 $z = t^2$ 表示同一函数.

2. $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 表示同一曲线,若交换反函数中的 x 和 y ,即用 x 表示自变量, y 表示因变量,则 $y = f^{-1}(x)$, 与 $y = f(x)$ 图像关于 $y = x$ 对称.

3. $f(x)$ 有界则 $f(x)$ 有下界 $-M$ 和上界 M ;反之, $f(x)$ 有上界 M_1 , 下界 M_2 , 则 $f(x)$ 必有界, $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$.

4. 注意复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 的定义. 若存在 $X^* \subset X$, 使 $\varphi(x)$ 在 X^* 上的值域 $W^* \subset U$, U 为 $y = f(u)$ 的定义域, 则 X^* 为复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 的定义域. $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 定义域不相交时, 不能复合. 如: $y = \ln u$ 与 $u = -x^2$ 不能复合为 $y = \ln(-x^2)$.

5. 虽然我们一般说的周期函数的周期是指最小正周期, 但最小正周期不一定存在. 如常函数 $f(x) = C$, 狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 均为周期函数, 但无最小正周期.

6. 掌握分段函数的表示法、定义域.

三、典型例题分析

例 1. 指出下面各组中两个函数是否相同, 并说明理由.

$$(1) f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad (2) f(x) = x+1, g(x) = \sqrt{(x+1)^2}$$

$$(3) f(x) = x, g(x) = \sin(\arcsin x)$$

解 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同. 因为它们的定义域相同, 都是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 对应关系也相同, 是 $y = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同. 因为它们的对应关系不同. $g(x) = |x+1|$.

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同. 它们的定义域不同. $f(x)$ 定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 定义域为 $[-1, 1]$.

提示 判断两个函数是否相同的一般步骤为:

- (1) 判断定义域是否相同;
- (2) 判断函数表达式是否相同.

例 2. 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt{2x+1} \quad (2) f(x) = 3 + \sqrt{\ln \cos x}$$

解 (1) 要使 $f(x)$ 有意义, 须使

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ 定义域为 $[-\frac{1}{2}, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

(2) 要使 $f(x)$ 有意义, 须使

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \ln \cos x \geq 0 \end{cases}$$

即 $\cos x \geq 1$,

故 $f(x)$ 定义域为 $\{x \mid x = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

提示 求函数定义域, 也就是求得使函数有意义的自变量的范围, 一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域, 再求出这些定义域的交集.

例 3. 设 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2} (x > 0)$, 求 $f(x)$.

解 设 $u = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{u} (u > 0)$, 代入 $f(\frac{1}{x})$, 得:

$$f(u) = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} = \frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}$$

故 $f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} (x > 0)$.

例 4. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, 求 $f[f(x)]$.

解 因为 $f[f(x)] = \begin{cases} \sqrt{2-(f(x))^2} & |f(x)| \leq 1 \\ 0 & |f(x)| > 1 \end{cases}$, 所以关键是要找出使

$|f(x)| \leq 1$ ($|f(x)| > 1$) 的 x 的范围.

当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = \sqrt{2-x^2} > 1$; $|x| = 1$ 时, $f(x) = 1$; $|x| > 1$ 时, $f(x) = 0$, 所以

$$f[f(x)] = \begin{cases} 0 & , |x| < 1 \\ 1 & , |x| = 1 \\ \sqrt{2} & , |x| > 1. \end{cases}$$

提示 求函数表达式时同时要求出相应定义域, 根据最外层函数定义域的区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析.

例 5. 证明下列函数在所示区间内是单调的:

$$(1) f(x) = 2^{1-x} \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2) f(x) = \frac{1+x}{x} \quad (0 < x < +\infty)$$