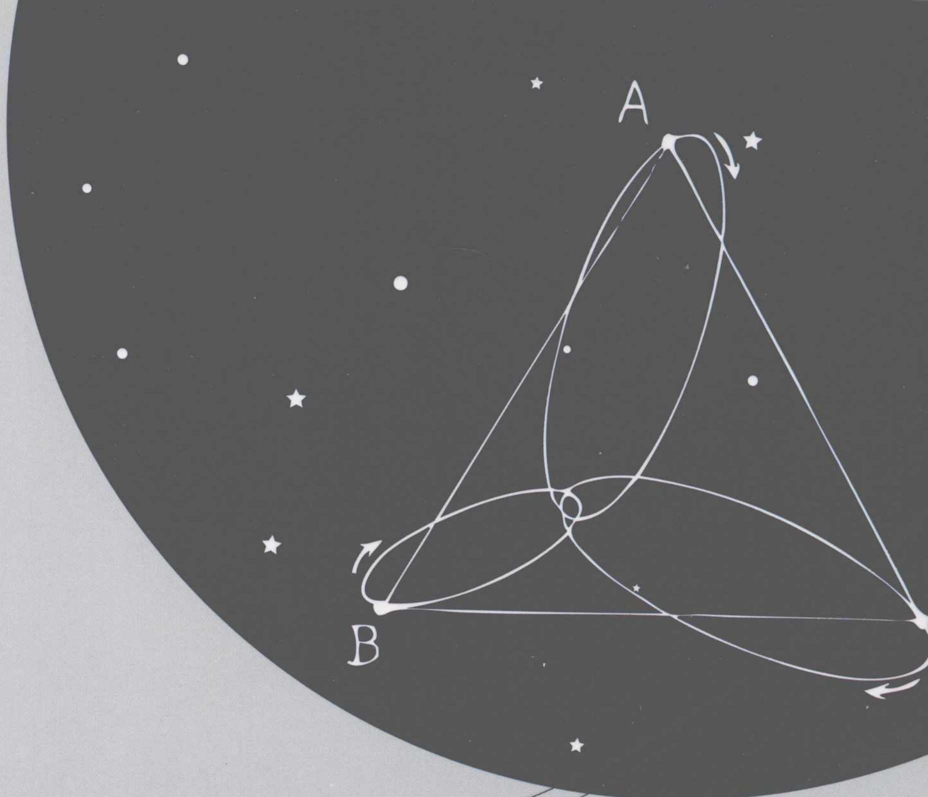
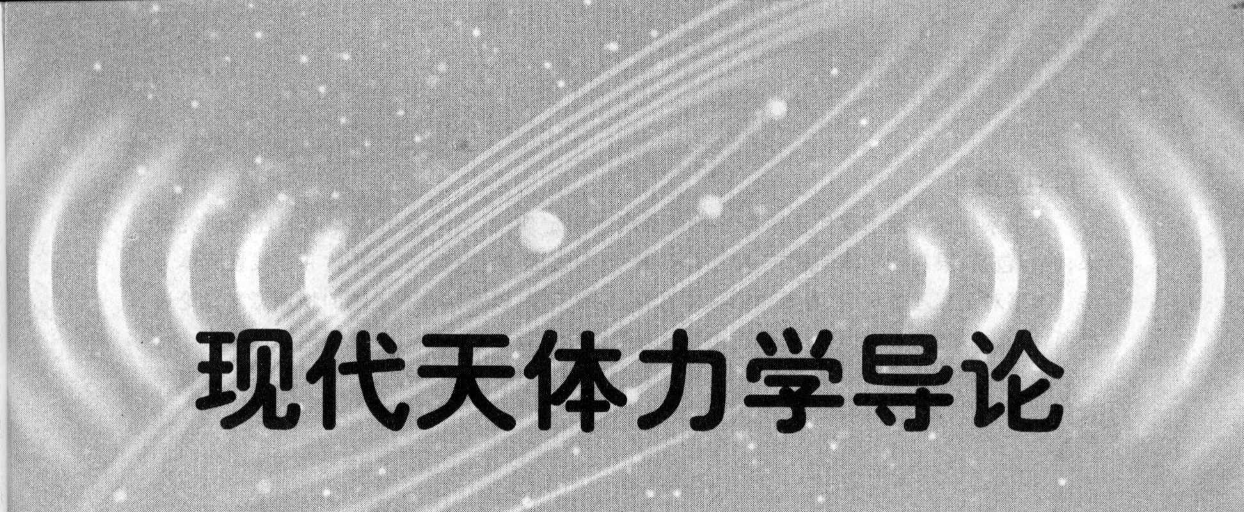


现代天体力学导论

Introduction to Modern Celestial Mechanics

孙义燧　周济林　编著

高等教育出版社



现代天体力学导论

孙义燧 周济林 编著

高等教育出版社

内容提要

本书系统地介绍了现代天体力学的基本概念和定理，以及一些比较有代表性的研究成果，内容包括：限制性三体问题，一般三体问题，周期轨道，轨道稳定性与扩散和非线性天体力学。本书对于定理的证明，着重介绍总体思路，必要步骤，以及结论和定理的物理意义。论述严谨，深入浅出，具有天体力学，分析力学和现代数学基础的读者可以较流畅地阅读本书。

本书可作为我国高等学校天文类，数学类和物理类各专业本科生，及研究生的天体力学课程教材，也可供有关的科学研究人员，教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代天体力学导论 / 孙义燧，周济林编著. —北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-021960-9

Ⅰ.现… Ⅱ.①孙…②周… Ⅲ.天体力学-高等学校-教材 Ⅳ.P13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 182420 号

策划编辑 郭亚嫘 **责任编辑** 忻 蓓 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 朱 静
版式设计 陆瑞红 **责任校对** 刘 莉 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年1月第1版
印　　张	16.25	印　　次	2008年1月第1次印刷
字　　数	300 000	定　　价	25.50元

物料号　21960-00

前　言

天体力学是天文学的一个分支，自17世纪诞生至今，已有三百多年的历史，它是研究天体的运动和形状的一门科学，但在很长一段时间主要是研究天体的运动，并主要研究太阳系天体的运动，这是符合科学发展规律的，因为对太阳系天体的观测相对来说比较容易，且观测精度也比较高。由于观测技术的不断提高，使人们能观测到更远、更暗的天体，因此天体力学的研究对象逐渐延伸到外太阳系(outer solar system)的天体(例如Kuiper带天体)和太阳系外(extrasolar system)行星系统中的天体。

三体(n体)问题以及限制性三体问题对应的运动方程是不可积的，从而迫使天体力学家发展了天体力学定性理论和摄动理论，它们后来发展成了数学中的微分方程定性理论和摄动理论。由于受到观测技术、数值计算手段以及与天体力学密切相关的现代数学和物理学发展的制约，天体力学在比较长一段时期内发展缓慢。近几十年一些新天体的不断被发现，对它们复杂运动的研究，向天体力学提出了挑战。大型计算机的迅速发展，为探索天体运动中的复杂现象提供了有力的工具，而现代数学和现代物理的丰硕成果，则为现代天体力学的发展提供了坚实的基础。因此近几十年来，天体力学无论从研究对象，还是从研究深度和广度方面都有了很大发展。本书是为准备从事现代天体力学研究的研究生和天文工作者以及动力系统和非线性动力学等方面的教师、研究人员提供必要的基础知识而编写的。本书除了比较系统地介绍了现代天体力学所要求的必要基础外，还介绍了一些有代表性的现代天体力学研究的成果。对一些定理的证明，着重介绍了证明的总体思路、必要步骤、结论和定理的意义，而不注重证明的具体细节，但列出了有关参考文献和著作供有兴趣深入探讨的读者查阅，这样可以使本书在结构上比较紧凑。具有天体力学、分析力学和现代数学基础的读者，阅读本书基本上不会有困难。

作者感谢高等教育出版社对本书出版给予的大力支持，感谢本书的责任编辑作了大量的工作。另外还要感谢张天岭教授、周礼勇博士在本书编写过程中

作出的辛勤劳动。

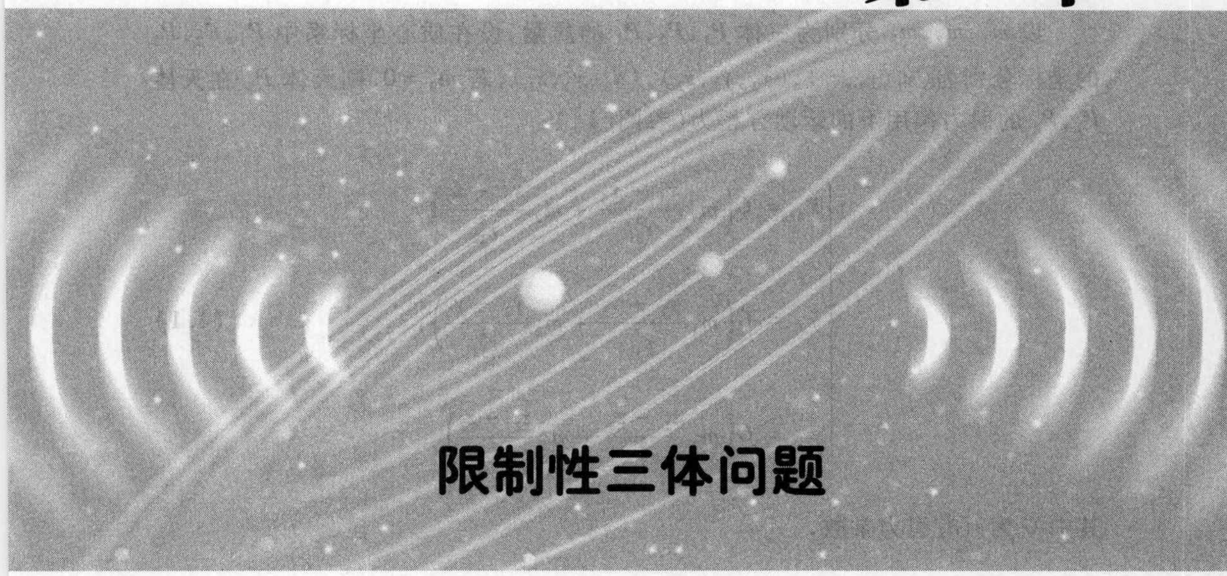
由于作者学识水平有限，书中的不妥及疏漏之处在所难免，恳请读者提出批评指正。

作 者

2007 年 4 月 20 日

目 录

第一章



限制性三体问题

限制性三体问题是一般三体问题的一种特殊情形，其中三体中的一个天体的质量为无限小，限制性三体问题便是研究无限小质量天体在另外两个有限质量天体作用下的运动，它是太阳系小天体运动的主要动力学模型.在星系中，特别在双星系统中也会遇到类似的动力学模型.本章将介绍限制性三体问题的一些基本内容.

§1 运动方程

设 m_1, m_2, m_3 分别为三体 P_1, P_2, P_3 的质量，设在质心坐标系中 P_1, P_2, P_3 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)，若 $m_3 = 0$，则天体 P_3 在天体 P_1, P_2 的引力作用下的运动方程为（参阅[1]）：

$$\begin{cases} \ddot{x}_3 = G\left(m_1 \dfrac{x_1 - x_3}{r_{31}^3} + m_2 \dfrac{x_2 - x_3}{r_{32}^3}\right), \\ \ddot{y}_3 = G\left(m_1 \dfrac{y_1 - y_3}{r_{31}^3} + m_2 \dfrac{y_2 - y_3}{r_{32}^3}\right), \\ \ddot{z}_3 = G\left(m_1 \dfrac{z_1 - z_3}{r_{31}^3} + m_2 \dfrac{z_2 - z_3}{r_{32}^3}\right). \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 G 为万有引力常数，

$$\begin{cases} r_{31}^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2, \\ r_{32}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2, \end{cases} \tag{1.2}$$

在(1.2)式中 $x_i, y_i, z_i (i = 1,2)$ 为时间 t 的已知函数，因此方程(1.1)是一个 6 阶非定常微分方程组. 由于天体 P_3 对天体 P_1, P_2 的运动不产生影响，故 P_1, P_2 组成一个二体问题，对应于 P_1, P_2 的运动方程是可积的，它们沿着以原点为焦点的圆锥曲线运动. 根据 P_1, P_2 作三种不同类型的圆锥曲线运动，分别称相应的限制性三体问题为椭圆（包括圆），抛物和双曲型限制性三体问题. 由于太阳系中大行星近似地作椭圆运动，因此限制性三体问题中最重要的是椭圆型限制性三体问题. 大行星的椭圆轨道的偏心率很小，近似于圆轨道，因而圆型限制性三体问题不但是限制性三体问题最简单的一种，而且也是太阳系中小天体运动的一种较好的近似模型，因此对它的研究比较深入，这将在下面给以详细介绍.

圆型限制性三体问题中天体 P_3 的质量 $m_3 = 0$，两个主天体 P_1, P_2 绕它们的质量中心作圆周运动，它们之间的距离保持不变为一常数，将它取作长度单位. 我们选取无量纲变量和自变量，则有 $m_1 + m_2 = 1$，若 $m_2 \leqslant m_1$，令 $m_2 = \mu \leqslant \dfrac{1}{2}$，则

$m_1=1-\mu$,此时 P_1,P_2 绕它们的质心作圆周运动时的角速度 $n=1$. 设天体 P_1, P_2 的运动平面为 (x,y) 平面,z 轴垂直于此平面,坐标原点取在 P_1,P_2 的质量中心. 将此坐标系绕 z 轴旋转,使得 P_1,P_2 永远在 x 轴上,则 P_1,P_2 的坐标分别为 $(\mu,0,0)$,$(-1+\mu,0,0)$,设在此坐标系中天体 P_3 的坐标为 (x,y,z),则它的运动方程(1.1)可写成

$$\begin{cases} \ddot{x}-2\dot{y}-x=-\left[(1-\mu)\dfrac{x-\mu}{r_1^3}+\mu\dfrac{x-\mu+1}{r_2^3}\right], \\ \ddot{y}+2\dot{x}-y=-\left[\dfrac{1-\mu}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}\right]y, \\ \ddot{z}=-\left[\dfrac{1-\mu}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}\right]z, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中

$$r_1^2=r_{31}^2=(x-\mu)^2+y^2+z^2,$$

$$r_2^2=r_{32}^2=(x+1-\mu)^2+y^2+z^2.$$

方程(1.3)也可被写成

$$\begin{cases} \ddot{x}-2\dot{y}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y}+2\dot{x}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中

$$\Omega=\Omega(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}+\frac{1}{2}\mu(1-\mu), \tag{1.5}$$

在 $\Omega(x,y,z)$ 中加上常数项 $\frac{1}{2}\mu(1-\mu)$,它不影响运动方程,但可将 $\Omega(x,y,z)$ 写成 r_1,r_2 的对称形式. 在(1.5)式中 x^2+y^2 的项为离心力势函数,$\frac{1}{r_1}$ 和 $\frac{1}{r_2}$ 的项则为引力势函数,它们的偏导数分别给出了离心力和引力.

§2 运动状态流形的奇点及运动特解

由上节的运动方程(1.4)可得如下的一个积分(参阅[1]):

$$2\Omega - V^2 = C, \tag{2.1}$$

其中

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

(2.1)式为运动状态流形,被称为 Jacobi 积分,此状态流形奇点的方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0,\ \dot{z} = 0, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

这也是运动方程(1.4)平衡解所满足的方程. 由方程(2.2)的最后一个式子

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0$$

可知,对有限的 r_1, r_2,上式的第二个因子为正,因此有 $z = 0$,这说明状态流形的奇点或者运动方程的平衡解(亦即为运动特解)在(x,y)平面上.

从上面的讨论可知,平衡解应满足下面的方程:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0,$$

即

$$x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3} = 0, \tag{2.3}$$

和

$$y\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0. \tag{2.4}$$

显然,$r_1 = r_2 = 1$ 满足方程(2.3)和(2.4),即此平衡解位于与 P_1, P_2 组成等边三角形的顶点,故其坐标为 $x = \mu - \dfrac{1}{2}, y = \pm\sqrt{3}/2$. 另外,从(2.4)式还可得 $y = 0$,代入(2.3)式有

$$x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{|x-\mu|^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{|x+1-\mu|^3} = 0, \tag{2.5}$$

现在我们将 x 轴分成 $(-\infty, \mu-1)$，$(\mu-1, \mu)$ 和 $(\mu, +\infty)$ 3 个区间来讨论.

(1) 对 $x \in (-\infty, \mu-1)$，方程(2.5)为

$$x + \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} + \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} = 0 \tag{2.6}$$

令 $x = \mu - 1 - \xi^{(1)}$，$\xi^{(1)} > 0$，则有

$$\xi^{(1)} + 1 - \mu + \frac{\mu - 1}{(1+\xi^{(1)})^2} - \frac{\mu}{(\xi^{(1)})^2} = 0, \tag{2.7}$$

由此可知 $\xi^{(1)}$ 为下面五次代数方程的根：

$$\xi^5 + (3-\mu)\xi^4 + (3-2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 - 2\mu\xi - \mu = 0, \tag{2.8}$$

根据代数方程正根的笛卡儿符号判别准则，对 $0 < \mu \leqslant \frac{1}{2}$，方程(2.8)有唯一的正根. 下面用迭代法寻求代数方程(2.8)的解，将方程(2.8)写成

$$\xi^3 = \frac{\mu(1+\xi)^2}{3 - 2\mu + \xi(3-\mu+\xi)}, \tag{2.9}$$

以 $\xi = 0$ 作为迭代的初始值，作第一次迭代，可得 $\xi = [\mu/(3-2\mu)]^{\frac{1}{3}}$，事实上，根据下面的讨论，我们可取 $[\mu/3(1-\mu)]^{\frac{1}{3}}$ 作为迭代的初始值. 将(2.7)式写成

$$\xi + (1-\mu)[1 - (1+\xi)^{-2}] - \mu\xi^{-2} = 0,$$

或

$$(1-\mu)[1 + \xi - (1+\xi)^{-2}] + \mu(\xi - \xi^{-2}) = 0,$$

由此可得

$$\frac{\mu}{3(1-\mu)} = \frac{\xi^3(1+\xi+\xi^2/3)}{(1+\xi)^2(1-\xi^3)}, \tag{2.10}$$

则方程(2.10)具有下面形式的幂级数解：

$$\xi^{(1)} = \nu\left(1 + \frac{1}{3}\nu - \frac{1}{9}\nu^2 - \frac{31}{81}\nu^3 - \frac{119}{243}\nu^4 - \frac{1}{9}\nu^5\right) + O(\nu^7), \tag{2.11}$$

其中 $\nu = [\mu/3(1-\mu)]^{\frac{1}{3}}$. 由此可知，用迭代法求解(2.9)式时，初始值取 $[\mu/3(1-\mu)]^{\frac{1}{3}}$ 是合理的.

(2) 对 $x \in (\mu-1, \mu)$ 方程(2.5)为

$$x+\frac{1-\mu}{(x-\mu)^2}-\frac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0, \tag{2.12}$$

令 $x=\mu-1+\xi^{(2)}, \xi^{(2)}>0$,则有

$$\xi^{(2)}-1+\mu+\frac{1-\mu}{(\xi^{(2)}-1)^2}-\frac{\mu}{(\xi^{(2)})^2}=0, \tag{2.13}$$

或

$$\xi^3=\frac{\mu(1-\xi)^2}{3-2\mu-\xi(3-\mu-\xi)}, \tag{2.14}$$

其中 $\xi=\xi^{(2)}$,(2.14)式可写成下面的五次方程:

$$\xi^5-(3-\mu)\xi^4+(3-2\mu)\xi^3-\mu\xi^2+2\mu\xi-\mu=0, \tag{2.15}$$

同样按照笛卡儿符号准则,方程(2.15)至少存在一个正根.类似于展式(2.11),此时有

$$\xi^{(2)}=\nu\left(1-\frac{1}{3}\nu-\frac{1}{9}\nu^2-\frac{23}{81}\nu^3+\frac{151}{243}\nu^4-\frac{1}{9}\nu^5\right)+O(\nu^7), \tag{2.16}$$

其中 $\nu=\left[\frac{\mu}{3(1-\mu)}\right]^{\frac{1}{3}}$.

(3) 最后对 $x\in(\mu,+\infty)$,方程(2.5)为

$$x-\frac{1-\mu}{(x-\mu)^2}-\frac{\mu}{(1+x-\mu)^2}=0, \tag{2.17}$$

置 $x=\mu+\xi^{(3)}, \xi^{(3)}>0$,则有

$$\xi^{(3)}+\mu-\frac{1-\mu}{(\xi^{(3)})^2}-\frac{\mu}{(1+\xi^{(3)})^2}=0, \tag{2.18}$$

或

$$\xi^3=\frac{(1-\mu)(1+\xi)^2}{1+2\mu+\xi(2+\mu+\xi)}, \tag{2.19}$$

其中 $\xi=\xi^{(3)}$,上式可写为如下的五次方程:

$$\xi^5+(2+\mu)\xi^4+(1+2\mu)\xi^3-(1-\mu)\xi^2-2(1-\mu)\xi-(1-\mu)=0, \tag{2.20}$$

方程(2.20)的系数只有一个变号数,因此此方程有唯一的正根.容易判断此根靠近 $+1$,故令 $\eta=\xi-1$,这样可得 η 所满足的方程为

$$\eta^5 + (7+\mu)\eta^4 + (19+6\mu)\eta^3 + (24+13\mu)\eta^2 + 2(6+7\mu)\eta + 7\mu = 0, \tag{2.21}$$

从上式的最后两项可知,初始值应取 $\eta = -\frac{7}{12}\mu$,则 η 的展式为

$$\eta = -\nu\left(1 + \frac{23}{84}\nu^2 + \frac{23}{84}\nu^3 + \frac{761}{2\,352}\nu^4 + \frac{3\,163}{7\,056}\nu^5 + \frac{30\,703}{49\,392}\nu^6\right) + O(\nu^8),$$

其中 $\nu = 7\mu/12$.

上述三个共线平衡解称为 Euler 特解,通常记为 L_1, L_2, L_3,而等边三角形特解称为 Lagrange 特解,记为 L_4, L_5.

§3 Lagrange 和 Euler 特解的稳定性

从上节知道,圆型限制性三体问题中,小天体的运动方程存在五个特解,即 Lagrange 特解和 Euler 特解,而且这五个特解皆位于(x,y)平面上. 这一节我们将讨论这些平衡解的稳定性(参阅[1]). 首先讨论平面问题,此时运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

$$r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2,$$

$$r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2.$$

设平衡点为 $L(a,b)$,令

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta,$$

其中 ξ, η 为相对于 L 的坐标,而 a, b 为平衡解的坐标,对共线平衡解 L_1, L_2, L_3,我们有 $a = x_1, x_2, x_3$(即上节中的 $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$),$b=0$,对三角平衡解 L_4, L_5,则有 $a = \mu - \frac{1}{2}$,$b = \pm\sqrt{3}/2$. 将 $\Omega(x,y)$ 在 L 点展开

$$\Omega=\Omega(a,b)+\Omega_x(a,b)\xi+\Omega_y(a,b)\eta+\frac{1}{2}\Omega_{xx}(a,b)\xi^2$$
$$+\Omega_{xy}(a,b)\xi\eta+\frac{1}{2}\Omega_{yy}(a,b)\eta^2+O(3),\tag{3.2}$$

运动方程(3.1)变为

$$\begin{cases}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=\Omega_{xx}(a,b)\xi+\Omega_{xy}(a,b)\eta+O(2),\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=\Omega_{xy}(a,b)\xi+\Omega_{yy}(a,b)\eta+O(2),\end{cases}\tag{3.3}$$

(3.2),(3.3)式中 $O(2)$ 和 $O(3)$ 分别表示关于 ξ 和 η 二次和三次以上的项,将它们略去,则方程(3.3)便为变分方程,其相应的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda^2-\Omega_{xx}(a,b) & -2\lambda-\Omega_{xy}(a,b)\\ 2\lambda-\Omega_{xy}(a,b) & \lambda^2-\Omega_{yy}(a,b)\end{vmatrix}=0,\tag{3.4}$$

或可写为

$$\lambda^4+(4-\Omega_{xx}(a,b)-\Omega_{yy}(a,b))\lambda^2+\Omega_{xx}(a,b)\Omega_{yy}(a,b)-(\Omega_{xy}(a,b))^2=0.\tag{3.5}$$

对三个共线平衡解,当 $0<\mu<\frac{1}{2}$ 时,有

$$\Omega_{xy}=0,\quad \Omega_{xx}>0,\quad \Omega_{yy}<0,$$

因此

$$\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2<0,$$

解方程(3.5)可得

$$\lambda_{1,2}=\pm[-\beta_1+(\beta_1^2+\beta_2^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}},\quad \lambda_{3,4}=\pm[-\beta_1-(\beta_1^2+\beta_2^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}},\tag{3.6}$$

其中

$$\beta_1=2-\frac{\Omega_{xx}(a,b)+\Omega_{yy}(a,b)}{2},$$

$$\beta_2^2=-\Omega_{xx}(a,b)\Omega_{yy}(a,b)>0,$$

故有