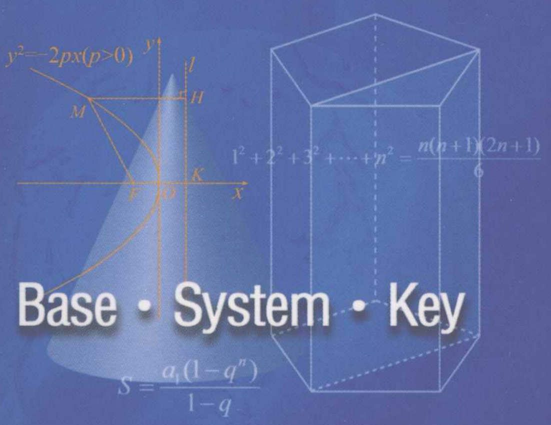
盛世教育

超级高中专题系列

超级数学专题题典

复数

·紧扣最新大纲　密切关注高考·



Base · System · Key

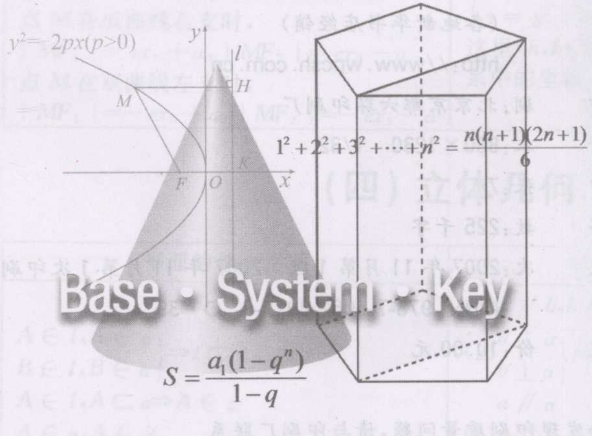
—— 学习数学必备的全面工具书 ——

世界图书出版公司

盛世教育　超级高中专题系列

超级数学专题题典

复数



世界图书出版公司

上海 · 西安 · 北京 · 广州

图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——复数/盛世教育高考命题研究组 编著.
—上海:上海世界图书出版公司,2007.11

ISBN 978-7-5062-8927-6

Ⅰ.超… Ⅱ.盛… Ⅲ.代数课-高中-习题-升学参考资料
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 152526 号

超级数学专题题典——复数

盛世教育高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司

上海市尚文路 185 号 B 楼　　邮政编码 200010

公司电话:021-63783016 转发行科

(各地新华书店经销)

http://www.wpcsh.com.cn

印　　刷:北京京都六环印刷厂

开　　本:880×1230　1/32

印　　张:7

字　　数:225 千字

版　　次:2007 年 11 月第 1 版　2007 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-8927-6/O·39

定　　价:10.00 元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:010-84498871)

前　言

参考书和教材不同，它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学，大部分都看过至少一本参考书，有个别的，甚至看完了市面上所有的参考书，这是为什么呢？

教材都是自成体系，为了配合大纲和课堂教学，其中很多内容讲述得恰到好处，可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科，必须具备三点：首先是清晰的知识框架，其次是翔实的知识内容，再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点，从理论上讲，反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的，只是需要花费较长的时间去领悟。不过，实际情况往往是限于课时进度，同学们用于学习单一科目的时间本就有限，花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥，有没有什么捷径可以走呢？答案是没有。虽然没有捷径，但却有另外一条路可供选择，这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题，透过现象看本质；或是补充个别知识点，完善整个知识框架；或是通过纵横向比较，揭示出本来就存在，但教科书却未明示的一些规律；或是汇总前人的经验，揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《超级数学专题题典》正是本着这样的初衷编写的，一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点：

(1)知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出，全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲，帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系，使学习、记忆和运用有序化。第二部分“高屋建瓴”，帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时，突破难点、提高思维。在力求提高的同时，把握尺度，不出偏题、怪题，使之虽然难度加大，但是并不偏离高考方向。

(2)题目搭配合理有序

习题配备由易到难，层层延伸。基础练习题，能力练习题，历届高考题，精选星级题，3 大部分 6 小块，覆盖高中低档各类题型，层层递进，级级延伸，为复习、备考提供丰富的资料储备；题目讲解不拘一解，详尽规范，引导读者去探究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“万变归一”的思路与学习方法，使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

(3)框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图，为读者学习和探索提供参考路标。

(4)成书符合使用习惯

全书采用“知识点讲解”——“对应例题”——“另一个知识点讲解”——“对应例题”的编排模式，更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了“考频”概念，借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容，甚至这一类问题的掌握程度，以寻找更合适的复习之道，从而达到优质、有效的复习效果。

(5)自成体系一书多用

本套书完全基于教材，但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点，只要是涉及某专题的，基本上都收录进书，并分别成册；不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排，而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容，而且还脱离了教材变动的局限性，使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学，可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充；对于正在紧张复习，即将投入的高考的同学，使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场；而对于高中教育的研究者，本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限，疏漏之处在所难免，敬请不吝指正。

盛世教育高考命题研究组

2007 年 9 月

目　录

第一篇　知识篇

本专题知识结构图

复数	复数的概念	数系和复数
		复平面和共轭复数
		复数的向量表示
	复数的运算与复数域方程	复数的四则运算和性质
		复数域方程
	复数的三角形式和几何形式	复数的三角形式及其运算
		复数加减乘除法与乘方、开方运算的几何意义
	复数的应用	复数的应用

第一章 复数的概念

本章知识结构图

<table>
<tr><td rowspan="14">复数的概念</td><td rowspan="5">数系和复数</td><td>复数的形成与定义</td></tr>
<tr><td>复数的有关概念</td></tr>
<tr><td>复数的分类</td></tr>
<tr><td>复数相等的充要条件
$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c,b=d$</td></tr>
<tr><td>对复数概念的理解和应用</td></tr>
<tr><td rowspan="6">复平面和共轭复数</td><td>复平面的概念</td></tr>
<tr><td>共轭复数的概念和性质</td></tr>
<tr><td>共轭复数的几何意义</td></tr>
<tr><td>两个复数为什么不能比较大小</td></tr>
<tr><td>复数能否比较大小分析</td></tr>
<tr><td>复数集和复平面所有点组成集合对应的注意事项</td></tr>
<tr><td rowspan="3">复数的向量表示</td><td>复数的向量表示
在复平面内以原点为起点，点 $Z(a,b)$ 为终点的向量$\overrightarrow{OZ}$，由点 $Z(a,b)$ 唯一确定，对应复数为 $z=a+bi$</td></tr>
<tr><td>复数的模
① $|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$
② $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$
③ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，$|z^n|=|z|^n$</td></tr>
<tr><td>数形结合利用复数模的几何意义处理相关问题</td></tr>
</table>

第一节 数系和复数

高考考点和趋势分析

高考中常常以选择、填空题的形式考查数系和复数的概念，多为简单题.

目标 1：了解引进复数的必要性；

目标 2：理解复数的有关概念；

目标 3:掌握复数的代数表示方法及向量表示方法.

知识点讲解与应用

1. 复数的形成与定义(考频 2 次,其中,选择题 1 次,填空题 0 次,解答或证明题 1 次)

由于解方程的需要,人们开始引进一个新数 i,叫做虚数单位,并规定它的平方等于 -1,即 $i^2=-1$.

实数可以与复数进行四则运算.进行四则运算时,原有的加、乘运算律仍然成立.在这种规定下,i 可以与实数 b 相乘,再同实数 a 相加,由于满足乘法交换律及加法交换律,从而可以把结果写成 $a+bi$.这样,数的范围又扩充了,出现了形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数,人们把它们叫做复数.全体复数所成的集合,一般用字母 $\mathbf{C}$ 来表示.

2. 复数的有关概念(考频 12 次,其中,选择题 1 次,填空题 3 次,解答或证明题 8 次)

复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$(注:以后说数 $a+bi$ 时,如无特殊说明,都有 $a,b\in\mathbf{R}$),

当 $b=0$ 时是实数;

当 $b\neq0$ 时是虚数;

当 $a=0,b\neq0$ 时,这个复数叫做纯虚数;

a 与 b 分别叫做复数 $a+bi$ 的实部与虚部.

3. 复数的分类(考频 1 次,其中,选择题 0 次,填空题 0 次,解答或证明题 1 次)

$$\begin{array}{l}\text{复数}\\ a+bi(a,b\in\mathbf{R})\end{array}\begin{cases}\begin{array}{c}\text{实数}\\(b=0)\end{array}\begin{cases}\begin{array}{c}\text{有理数}\\(\text{分数})\end{array}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{cases}\text{—}\begin{cases}\text{不循环小数}\\(\text{整数、有限小数})\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{——无限不循环小数}\end{cases}\text{小数}\\ \begin{array}{c}\text{虚数}\\(b\neq0)\end{array}\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

注意分清复数分类中的界限:

设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 z 为实数等价于 $b=0$;z 为虚数等价于 $b\neq0$;

$z=0$ 等价于 $a=0$ 且 $b=0$;z 为纯虚数等价于 $a=0$ 且 $b\neq0$.

例1 当 m 为何实数时,复数 $(m^2-1)+(m^2+3m+2)i$ 是:

(1) 实数;(2) 虚数;(3) 纯虚数;(4) 零;(5) 在第二象限;(6) $\arg z=\dfrac{3}{4}\pi$.

分析 考察是否是复数,主要考察其虚部是否为 0,分类讨论.

解答 (1) 当 $m^2+3m+2=0$,即 $m=-2$ 或 $m=-1$ 时,该复数为实数;

(2) 当 $m^2+3m+2\neq0$,即 $m\neq-2$ 且 $m\neq-1$ 时,该复数为虚数;

(3) 当 $m^2+3m+2\neq0$ 且 $m^2-1=0$,即 $m=1$ 时,该复数是纯虚数;

(4) 当 $m^2+3m+2=0$ 且 $m^2-1=0$,即 $m=-1$ 时,该复数为 0;

(5) 当 $m^2-1<0$ 且 $m^2+3m+2>0$,即 $-1<m<1$ 时,该复数在第二象限;

(6) 当 $-(m^2-1)=m^2+3m+2>0$ 时,即 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时,$\arg z=\dfrac{3}{4}\pi$.

点评 遇到不确定的情况就要分类讨论,保证思维的严密性.

4. **复数相等的充要条件(考频 9 次,其中,选择题 2 次,填空题 3 次,解答或证明题 4 次)**

如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等,我们就说这两个复数相等,记作 $a+bi=c+di$(特殊情况:若 $a+bi=0$,则 $a=0$ 且 $b=0$).

注意 两个复数不能比较大小,除非两个复数都是实数.

例2 x、y 是实数,$2x+6\mathrm{i}=4-2y\mathrm{i}$,求 x、y.

分析 复数相等,由定义,实部虚部都相等.

解答 由 $\begin{cases}2x=4,\\6=-2y,\end{cases}$ 得:$\begin{cases}x=2,\\y=-3.\end{cases}$

点评 我们可以把复数虚部的 i 看作一个自变量,两边即变化为一个恒等式,然后对应项系数相等.

例3 设 x 是实数,y 是纯虚数且满足 $2x-1+\mathrm{i}=y-(3-\mathrm{i})\mathrm{i}$,求 x、y.

解答 设 $y=b\mathrm{i}$,则 $2x-1+\mathrm{i}=b\mathrm{i}-(3-\mathrm{i})\mathrm{i}$,整理有 $2x-1+\mathrm{i}=-1+(b-3)\mathrm{i}$,解得 $x=0,b=4$,即 $x=0,y=4\mathrm{i}$.

点评 构造一个方程组,解答对应项系数相等.

例4 设方程 $(1+\mathrm{i})x^2+(1+5\mathrm{i})x-(2-6\mathrm{i})=0$ 有实数根,求这个实根.

分析 给定方程为一个复数方程,而其有实数根,说明某个实数代入原方程可使得虚部、实部都为 0. 故而可用方程组解.

解答 原方程可以整理为:$(x^2+x-2)+\mathrm{i}(x^2+5x+6)=0$.

设方程的实根为 x_0,根据两个复数相等的充分必要条件,

则有 $\begin{cases}x_0^2+x_0-2=0,\\x_0^2+5x_0+6=0,\end{cases}$ 解方程组得:$x_0=-2$.

点评 以方程和恒等的思想,将问题转化.

例5 已知复数 $z=(a^2+7a+10)+\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+3a-10}\mathrm{i}$,问是否存在实数 a 使 z 为纯虚数.

分析 根据 z 为纯虚数的充分必要条件,命题等价于是否存在实数 a,满足下述条件 $\begin{cases}a^2+7a+10=0,\\\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+3a-10}\neq 0,\end{cases}$ 解出 a,然后检验.

解答 由已知有 $a^2+7a-10=0$,解得 $a=-2$ 或 $a=-5$.

当 $a=-2$ 时 $a^2+3a-10=0$,分式 $\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+3a-10}$ 无意义;

当 $a=-5$ 时 $a^2-3a-10=0$,分式 $\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+3a-10}$ 值为零.

因此,不存在这样的实数 a,使得 $z=(a^2+7a+10)+\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+3a-10}\mathrm{i}$ 为纯虚数.

点评 本题重点在于解答之后要验证所解答案是否是解,如果单纯靠一个条件得到一个答案就当作最终答案,则忽略了思维的严密一致性.

例6 设复数 $z=\log_2(x^2-5x+7)+\mathrm{i}\cdot\log_2(x^2-x-1)$,问 x 为何数时:

(1) 复数 z 为纯虚数；

(2) 复数 z 位于第二象限；

(3) 复数 z 表示的点在 $\ln 2 \cdot x - y - \ln 13 = 0$ 上.

分析 z 为纯虚数，实部为 0，虚部不为 0；z 位于第二象限，实部小于 0，而虚部大于 0；z 表示的点在直线上，说明实部、虚部作为变量代入方程满足.

解答 (1) 复数 z 为纯虚数等价于 $\log_2(x^2-5x+7)=0\neq\log_2(x^2-x-1)$，

整理有 $x^2-5x+7=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

$x=2$ 代入 $\log_2(x^2-x-1)$ 为 0 需舍去，

$x=3$ 代入 $\log_2(x^2-x-1)$ 不为 0；

(2) 复数 z 位于第二象限等价于 $\begin{cases}\log_2(x^2-5x+7)<0,\\ \log_2(x^2-x-1)>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}0<x^2-5x+7<1,\\ x^2-x-1>1,\end{cases}$ 解得：$2<x<3$；

(3) 复数 z 表示的点在直线 $\ln 2\cdot x-y-\ln 13=0$ 上等价于：

$\ln 2\cdot\log_2(x^2-5x+7)-\log_2(x^2-x-1)-\ln 13=0$，

化简整理有 $x^2-5x+7=13(x^2-x-1)$，解得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{5}{3}$，

即当 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{5}{3}$ 时，复数 z 表示的点在直线 $\ln 2\cdot x-y-\ln 13=0$ 上.

点评 注意定义的范围限制要求，纯虚数除了实部为 0，还要保证虚部不为 0.

例7 已知关于 x 的二次方程：$x^2+(2+\mathrm{i})x-6ab+(3a+b)\mathrm{i}-2=0$，求方程有实根的时候，点 (a,b) 的轨迹，求方程实数根的取值范围.

分析 此题属于探索性问题，故假设其有根，然后将所“假设”的根代入原式，利用其为实数，使虚部为 0，求解.

解答 设方程 $x^2+(2+\mathrm{i})x-6ab+(3a+b)\mathrm{i}-2=0$ 的实根为 α.

将其代入原方程得：$\alpha^2+(2+\mathrm{i})\alpha-6ab+(3a+b)\mathrm{i}-2=0$.

根据复数相等的充分必要条件，上式等价于方程组 $\begin{cases}\alpha^2+2\alpha-6ab-2=0,\\ \alpha+3a+b=0,\end{cases}$

由 $\alpha+3a+b=0$ 得：$\alpha=-(3a+b)$，并代入 $\alpha^2+2\alpha-6ab-2=0$.

此时，可以得到：$(3a+b)^2-2(3a+b)-6ab-2=0$，

化简整理得：$\dfrac{(a+\frac{1}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2}+\dfrac{(b+1)^2}{2^2}=1$，

$\therefore$ 点 (a,b) 的轨迹是以 $(-\dfrac{1}{3},-1)$ 为中心，半长轴为 2(平行于 y 轴)，半短轴为 $\dfrac{2}{3}$(平行于 x 轴) 的椭圆.

将上述结果的 $\alpha=-(3a+b)$ 变形有 $b=-(\alpha+3a)$，

代入 $a^2+2a-6ab-2=0$ 有 $18a^2+6\alpha a+(\alpha^2+2\alpha-2)=0$.

考虑到 $a\in\mathbf{R}$,$18a^2+6\alpha a+(\alpha^2+2\alpha-2)=0$ 的判别式应该非负,

即$(6\alpha)^2-4\times18\cdot(\alpha^2+2\alpha-2)\geqslant0$,化简为:$-\alpha^2-4\alpha+4\geqslant0$,

此时 $-2-2\sqrt{2}\leqslant\alpha\leqslant-2+2\sqrt{2}$.

(思考:为什么这里只考虑了 $a\in\mathbf{R}$,而没有考虑椭圆中对变量 a 的限制).

点评 假设其有根之后,利用复数相等的定义,得出关系式,然后再换元化简出最终关系,注意变量的取值范围.

例8 若 $\sqrt{2x-2}+(y+1)\mathrm{i}=y+\mathrm{i}\sqrt{3x}(x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R})$,求 $x-y^2$.

分析 利用恒等,解得 x,y 值,然后代入所求.

解答 根据复数相等的充分必要条件 $\begin{cases}\sqrt{2x-2}=y,\\ \sqrt{3x}=y+1,\end{cases}$

解这个方程组得 $\begin{cases}x=3,\\ y=2,\end{cases}$ $\therefore x-y^2=-1$.

例9 求 θ 使得 $z=(2\cos^2\theta-3\cos\theta+1)+(\tan^2\theta-3)\mathrm{i}$ 是 ① 实数;② 纯虚数;③ 零.

分析 利用复数相等的定义,使给定复数分别与 $a+0\cdot\mathrm{i},0+b\cdot\mathrm{i},0+0\cdot\mathrm{i}(b\neq0)$ 相等,即可得出 θ 的关系式.

解答 $2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$ 等价于 $\cos\theta=1$ 或 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,

即 $\theta=2k\pi$ 或 $\theta=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$,

$\tan^2\theta-3=0$ 等价于 $\tan\theta=\pm\sqrt{3}$,即 $\theta=k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$,其中 $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$,

①z 为实数则 $\theta=2k\pi$ 或 $\theta=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$,其中 $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$;

②z 为纯虚数则 $\theta=2k\pi+\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$,其中 $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$;

③z 为零则 $\theta=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$,其中 $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.

点评 将复数相等的含义扩展到所求不是直接代数式,而是三角式,其实道理相通.

例10 复数 $z=(k^2-5k-6)-(k^2+2k-3)\mathrm{i}$ 所对应的点在第三象限,求 k 取值范围.

解答 由题意有 $\begin{cases}k^2-5k-6<0,\\ -(k^2+2k-3)<0,\end{cases}$ 解不等式得:$\begin{cases}-1<k<6,\\ k>1\text{ 或 }k<-3,\end{cases}$

即 k 的取值范围为 $1<k<6$.

点评 第三象限点即复数的实部和虚部都为负.

基础练习题

1. 设全集 $U=\{$复数$\}$,$M=\{$有理数$\}$,$N=\{$虚数$\}$,则$(C_UM)\cup(C_UN)$是________.

   A. {有理数}　　B. {无理数}　　C. {实数}　　D. {复数}

2. 若$(x^2-1)+(x^2+3x+2)\mathrm{i}$是纯虚数，则实数$x$的值是________.

A. 1　　B. -1　　C. ± 1　　D. 以上都不对

3. 复数$(2x^2+5x+2)+(x^2+x-2)\mathrm{i}$为虚数，则实数$x$满足________.

A. $x=-\dfrac{1}{2}$　　B. $x=-2$或$-\dfrac{1}{2}$　　C. $x\neq -2$　　D. $x\neq 1$且$x\neq -2$

4. $z_1=(m^2+m+1)+(m^2+m-4)\mathrm{i}, m\in \mathbf{R}, z_2=3-2\mathrm{i}$. 则$m=1$是$z_1=z_2$的________条件.

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分又不必要

5. 若实数x,y满足$(1+\mathrm{i})x+(1-\mathrm{i})y=2$，则$xy=$________.

A. 1　　B. 2　　C. -2　　D. -3

6. 满足方程$x^2-2x-3+(9y^2-6y+1)\mathrm{i}=0$的实数对$(x,y)$表示的点的个数是________.

7. 已知$m\in \mathbf{R}$，复数$z=\dfrac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-3)\mathrm{i}$，当$m$为何值时，

(1)$z\in \mathbf{R}$；

(2)z是虚数；

(3)z是纯虚数；

(4)$z=\dfrac{1}{2}+4\mathrm{i}$.

(参考答案见P23)

高屋建瓴

对复数概念的理解与应用

复数$a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathbf{R})$是由它实部和虚部唯一确定的，两个复数相等的充要条件是把复数问题转化成实数问题的主要方法，要很好的掌握之，此外要明确由一个复数等式可得到两个实数等式这一性质，并在解题中会运用它.

对于复数$a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathbf{R})$，既要从整体的角度去认识它，把复数$z$看成一个整体，又要从实部、虚部的角度分解成两部分去认识它. 这在今后的解题中常会遇到，要逐步加以理解.

能力练习题

1. 设x是纯虚数，y是实数且$2x-1+\mathrm{i}=y-(3-y)\mathrm{i}$，则$x+y=$________.
2. 已知关于x的方程$ax^2+(1+2\mathrm{i})x-2a(1-\mathrm{i})=0$有实根，求实数$a$的值.
3. 已知$z=(\sin\alpha-\cos\beta)+\mathrm{i}(\cos\alpha-\sin\beta)$，其中$\alpha$、$\beta$是锐角三角形的两个内角，判断$z$所对应的点$Z$落在复平面的第几象限内.
4. 设关于x的方程$x^2+(t^2+3t+tx)\mathrm{i}=0$有纯虚根，求实数$t$的值.
5. 设$z=\log_2(1+m)+\mathrm{i}\cdot\log_2(3-2m)(m\in \mathbf{R})$.

(1) 若 z 是虚数,求 m 的取值范围;

(2) 若 z 在复平面内对应的点在第四象限,求 m 的取值范围.

(参考答案见 P23)

第二节　复平面和共轭复数

高考考点和趋势分析

复平面和共轭复数的内容在高考数学中涉及复数的部分是必然会考的内容,但是由于整体来说复数部分内容的难度在逐年降低,所以这一部分的内容也不会很难. 尽管各类题型都有,但是仍以简单题为主.

目标 1:掌握复平面的概念;

目标 2:理解并能熟练运用共轭复数的概念和性质.

知识点讲解与应用

1. 复平面的概念

复平面的定义(考频 1 次,其中,选择题 1 次,填空题 0 次,解答或证明题次)

如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等,我们就说这两个复数相等,记作 $a+bi=c+di$. 从复数相等的定义,我们知道任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以由一个有顺序的实数对 (a,b) 唯一确定. 这就使我们能借用平面直角坐标系来表示复数 $z=a+bi$. 如图 1-1-1:点 Z 的横坐标是 a,纵坐标是 b,复数 $z=a+bi$ 可用点 $Z(a,b)$ 来表示. 这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面,横轴叫做实轴,纵轴除去原点的部分叫做虚轴(因为原点表示实数零,因此它不在虚轴上). 表示实数的点都在实轴上,表示纯虚数的点都在虚轴上.

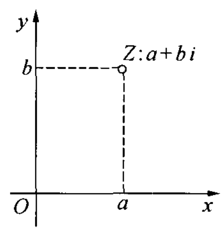


图 1-1-1

建立复平面的意义:使复数集与复平面上所有的点一一对应起来,可在复数和点之间建立如下关系:

$$z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})\leftrightarrow \text{点 } Z(a,b).$$

这种对应关系使复数和解析几何架起了桥梁,复数问题可化为几何问题解决,反之亦然.

2. 共轭复数的概念和性质

(1) 共轭复数的定义(考频 13 次,其中,选择题 1 次,填空题 3 次,解答或证明题 9 次)

当两个复数实部相等,虚部互为相反数时,这两个复数叫做互为共轭复数复数. z 的共轭复数记作 $\bar{z}$.

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，即 z 与 $\bar{z}$ 的实部相等，虚部互为相反数（不能认为 $a+b\mathrm{i}$ 与 $-a-b\mathrm{i}$ 或 $-a+b\mathrm{i}$ 是共轭复数）.

共轭复数对应的点关于实轴对称，当 $b=0$ 时，即实轴上的点关于实轴本身对称，例如：5 和 5 也是互为共轭复数. 当 $b\neq 0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭虚数. 可见，共轭虚数是共轭复数的特殊情形.

(2) 共轭复数的几何意义（考频 2 次，其中，选择题 1 次，填空题 0 次，解答或证明题 1 次）

复数 z 和它的共轭在复平面内关于 x 轴对称，而实数和它的共轭复数重合，即共轭复数为它本身且在 x 轴上.

(3) 共轭复数的性质（考频 6 次，其中，选择题 1 次，填空题 1 次，解答或证明题 3 次）

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z+\bar{z}=2a,z-\bar{z}=2b\mathrm{i};\overline{(\bar{z})}=z;z\cdot\bar{z}=|z|^2$；

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2};\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2};\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2};\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\overline{z^n}=\bar{z}^n$；

若 z 为实数，$z=\bar{z}$；若 z 为纯虚数，$z=-\bar{z}$.

例1 设 a、b 是共轭复数，并且满足等式：$(a+b)^2-3ab\mathrm{i}=4-6\mathrm{i}$，求 a、b 的值.

分析 已知 a、b 共轭，则这两个变量可以设出复数形式，然后利用复数相等的概念，进行实数运算.

解答 令 $a=x+y\mathrm{i}$，其中 $(x,y\in\mathbf{R})$，则 $b=x-y\mathrm{i}$.

代入 $(a+b)^2-3ab\mathrm{i}=4-6\mathrm{i}$ 得：

$[(x+y\mathrm{i})+(x-y)\mathrm{i}]^2-3ab(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})\mathrm{i}=4-6\mathrm{i}$，

整理有 $(4x^2-4)+[3(x^2+y^2)-6]\mathrm{i}=0$，

根据复数相等的充分必要条件得方程组：$\begin{cases}4x^2-4=0,\\3(x^2+y^2)-6=0,\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x=\pm 1,\\y=\pm 1.\end{cases}$ 所以 $a=1+\mathrm{i},b=1-\mathrm{i}$ 或 $a=1-\mathrm{i},b=1+\mathrm{i}$ 或 $a=-1+\mathrm{i},b=-1-\mathrm{i}$ 或 $a=-1-\mathrm{i},b=-1+\mathrm{i}$.

点评 将复数代数形式表达出来，然后利用共轭复数的性质，解答实数方程. 将复数问题转化为实数问题，体现转化的思想.

例2 已知 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{C}$，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$，

求证：$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$、$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ 都是实数.

分析 求证一个数为实数，实则证明其虚部为 0，也就是证明其共轭复数为自己本身，同时注意到 $|z|=1\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=1\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}$.

证明 由 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{C}$，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ 知：$\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha},\bar{\beta}=\frac{1}{\beta},\bar{\gamma}=\frac{1}{\gamma}$，

$\overline{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}+\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}=\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\beta}}+\frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$，这等价于 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ 是实数；

$$\overline{\left(\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\right)}=\frac{(\bar{\alpha}+\bar{\beta})(\bar{\beta}+\bar{\gamma})(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})}{\overline{\alpha\beta\gamma}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma},$$

这等价于$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$是实数.

因此$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$是实数,$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$是实数.

点评 利用共轭复数的模,和“1”的作用,将上式化简,省去了代数计算的麻烦.而此题如果直接用代数方法或者用三角方法,来计算所求复数的虚部是否为0,则就会陷入大计算量的误区.

例3 设z是复数,它的辐角主值为$\frac{7}{4}\pi$且$\frac{z^2-9}{\bar{z}}$是实数,求z.

分析 由实数定义,可以得到复数与共轭复数相等,如此即可得到关于z的方程,解方程即可.

解法1 因为$\frac{z^2-9}{\bar{z}}$是实数,因此$\frac{z^2-9}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}^2-9}{z}$.

变形整理得:$\bar{z}(\bar{z})^2-9\bar{z}=z(z^2)-9z$ 即$(z-\bar{z})[z^2+z\bar{z}+(\bar{z})^2-9]=0$.

由于z的辐角主值为$\frac{7}{4}\pi$,因此$z-\bar{z}\neq 0$故有$z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2-9=0$.

注意到$\arg z=\frac{7}{4}\pi$,此时我们有$\operatorname{Arg}z=\frac{7}{4}\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

$$\operatorname{Arg}\frac{z^2}{(\bar{z})^2}=2\operatorname{Arg}z-2\operatorname{Arg}\bar{z}=2[\operatorname{Arg}z-(2\pi-\operatorname{Arg}z)]=4\operatorname{Arg}z-4\pi$$

$$=4\left(2k\pi+\frac{7}{4}\pi\right)-4\pi=(4k+1)2\pi+\pi,$$

此时$\arg\frac{z^2}{\bar{z}^2}=\pi$,注意到$\left|\frac{z^2}{\bar{z}^2}\right|=\frac{|z|^2}{|\bar{z}|^2}=1$,我们有:$z^2=-(\bar{z})^2$,

代入$z^2+z\bar{z}+(\bar{z})^2-9=0$,得$|z|^2=z\cdot\bar{z}=9$,此时$|z|=3$,

又$\arg z=\frac{7}{4}\pi$,可得$z=3\left(\cos\frac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

点评 利用复数和共轭复数的关系,将原方程构造成直接关于z的另一个方程,然后解出z.方法比较巧妙.

解法2 设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,其中$a>0,b<0$.

根据$\arg z=\frac{7}{4}\pi$,可以得到$a+b=0$,解得$z=a(1-\mathrm{i})$.

另一方面:$\frac{z^2-9}{\bar{z}}$是实数,注意到$\frac{z^2-9}{\bar{z}}=\frac{[a(1-\mathrm{i})]^2-9}{a(1+\mathrm{i})}=-\frac{2a^2+9}{2a}-\frac{2a^2-9}{2a}\mathrm{i}$,