高等学校数学系列教材

（修订版）

积分方程论

路见可 钟寿国 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校数学系列教材

（修订版）

积分方程论

■ 路见可　钟寿国　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

积分方程论/路见可,钟寿国编著.—修订版.—武汉:武汉大学出版社,2008.2

高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-06130-9

Ⅰ.积…　Ⅱ.①路…　②钟…　Ⅲ.积分方程—高等学校—教材
Ⅳ.O175.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 015152 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:程小宜　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:720×1000　1/16　印张:17.625　字数:311 千字　插页:1

版次:2008 年 2 月第 1 版　　2008 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06130-9/O·380　　定价:23.00 元

内 容 提 要

本书介绍积分方程中的 Fredholm 理论、特征值理论、积分变换理论和投影方法。重点是线性 Fredholm 第二种方程，但对第一种方程，Volterra 方程、非线性方程、卷积型方程、核密度为 L_2 的 Cauchy 型奇异积分方程等也有讨论。

本书的特点是注意用泛函观点处理古典理论，力求理论的系统性、严谨性，又紧密联系实际应用。每章末附有习题。

本书可作为数学、力学、物理各专业的大学生选修课、研究生课的教材，也可供其他有关人员参考。

已出版书目

高等学校数学系列教材

复变函数（第二版） （普通高等教育“十一五”国家级规划教材）	路见可 钟寿国 刘士强
线性规划（第二版）	张干宗
积分方程论（修订版）	路见可 钟寿国
常微分方程（第二版）	蔡燧林
抽象代数（第二版）	牛凤文
高等代数	邱 森

修订版序言

本书前版于 1990 年在高教出版社出版，距现在已有 16 年时间。根据我们的教学实践和读者的反馈意见，本版进行了一次修订，尽可能把我们认为疏漏和不当之处得以校正、修改和补充，特别是，在前版第一章 Schauder 不动点定理的证明中，仍发现有瑕疵。此次则在降低前版原定理的条件下，采用了完全不同于前版的另一个证明，其证明思路更简洁清晰，且把前版原定理的结论作为本版的特例。参考文献有所补充，其它更动处不一一列举。因水平有限，仍可能会有不当的地方，恳请读者及同行批评指正。

编　者

于武汉

2007 年 12 月

前版序言

现代数学学科的迅速发展，正改变着各经典数学分支面貌。

我国 20 世纪 60 年代前，积分方程教材以翻译苏联教材为主，基本属于同一模式，即在连续函数类中讨论，以古典分析为工具。从现代眼光来看，在论证和叙述方面未免陈旧、烦琐，在内容方面比较单薄、狭窄。当然也有少数外国教材步入另一极端，把积分方程理论搞得很抽象，致使学生学完理论后碰到解决具体问题时往往一筹莫展，这两者都不可取。我们试图选择一条“中间”道路。我们这样想：选择 L_2 空间来讨论古典积分方程比连续函数类更为自然，因为前者是后者的完备化空间，同时在 L_2 中也便于用泛函分析的算子理论来处理古典理论。因此把泛函分析与积分方程两者结合起来完全可能。这便是本书的指导思想。1973 年，由美国出版 H. Hochstadt 著《积分方程》一书在这方面给了我们很大启示。因此，我们在编写过程中主要参考了该书，一些材料(包括某些习题)还直接取材于它。

本书的编写有两个宗旨：在理论上我们要求严谨，有一定的深度和较大容量；同时还要求处理得简明，不过分抽象。由于本课程在微分方程、力学、物理学及工程技术等方面有广泛应用，因此我们希望本书有较大适应面，要求学生学习理论后能具体解决实际问题。

以下对各章作一些简要说明。

第一、二章主要介绍线性 Fredholm 和 Volterra 第二种方程的系统理论(解的存在、唯一性及其表示)。详细讨论了核在各种假设条件下，解级数及预解核级数的收敛性，并在 L_2 核情况下给出了用预解核表示解的一个新证明。所得结果比较一般，而把连续函数及有界可测函数类的结果作为特例给出。

其中第一章 1.6 节对非线性方程的讨论本可独立成篇，但又考虑到非线性方程理论目前尚不完整，独立成篇似觉单薄，故仍归入第一章。第二章 2.2 节涉及整函数的一些知识，若读者不太熟悉可暂不读定理 2.2.3 之前的部分(不包括定理 2.2.3)以及定理 2.2.7 及其以后的部分。

第三章介绍经典的特征值理论，并详细讨论了它在微分方程中的应用。

在论证的严密性和结论的深度方面我们都有一些发展。这样做的目的是让读者对于积分方程在微分方程中的应用方面初见端倪。

第一种方程的理论目前尚不完整，其它书中系统讨论较少。我们参考了复旦大学所编《积分方程理论及应用》一书（指油印稿），并纳入本书第四章。它们主要是讨论实空间中的情形，收敛意义是绝对一致收敛。为了写得简洁一些，我们采用算子写法，并且改变了核的条件，把结果推广到复空间且主要在平均收敛意义下讨论，这样做与我们全书的格调相一致。

第五、六两章介绍以积分变换理论为工具求解卷积型积分方程及偏微分方程；以 Hilbert 变换、L_2 中的投影定理、乘子定理、边值定理为工具求解 Winer-Hopf 方程及 L_2 中的奇异积分方程。这些内容无论从理论意义及实用价值来说都非常重要。

阅读本书只要求读者有泛函分析关于线性赋范空间及 Hilbert 空间中的一些初等知识，并不要求对泛函分析有较深的了解。凡涉及数学各专业稍微专门一点的知识都尽可能列出并指明出处。在叙述和论证方面力图强调思想方法，使之便于自学。

本书主要适用于作为综合大学及高等师范院校数学专业本科生选修课及研究生基础课教材，也可供工科院校相近专业的学生使用。经验表明，本书内容可供一学期使用（约 72 学时），数学专业本科生及工科院校学生使用本教材时可选学其中某些章节，不必全讲完（例如 2.2，2.3，3.5，3.7，5.5，5.6 节可以不讲，若时间不够第六章也可不讲）。本书每章后面都有一定数量的习题以加深对教材的理解，巩固所学的知识。

本书编写中得到不少同行的关心，特别是，卫念祖教授和赵桢教授看过本书初稿，提出很多宝贵意见，对我们的想法深表赞同，在此深致谢意。

我们编写本书的尝试，虽经过多次教学实践的检验，但由于编者水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者惠予指正。

编　者

于武汉

1988 年 5 月

目　录

第一章 解的存在性及唯一性定理

1.1 积分方程的概念

在积分符号下含有未知函数的方程称为**积分方程**. 为了研究方便，常常进行如下的分类，如

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x), \tag{1.1}$$

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x), \tag{1.2}$$

其中 a,b 有限或无限，λ 为复参数，$K(x,y),\varphi(x),f(x)$ 为实自变量的复函数，$\varphi(x)$ 是未知函数①，分别称(1.1)，(1.2) 为 **Fredholm 第一种方程**和 **Fredholm 第二种方程**，简记为 F-Ⅰ,F-Ⅱ 方程. 这类方程由瑞典几何学家 I. Fredholm 首先提出并进行过系统的研究.

含变限的方程

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x), \quad a < x < b, \tag{1.3}$$

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x), \quad a < x < b, \tag{1.4}$$

由意大利数学家 V. Volterra 提出，故分别称(1.3),(1.4) 为 **Volterra 第一种方程**和 **Volterra 第二种方程**，简记为 V-Ⅰ,V-Ⅱ 方程. 如果令

$$K_1(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & a \leqslant y \leqslant x, \\ 0, & x < y \leqslant b, \end{cases}$$

可见(1.3),(1.4) 实际上也是 Fredholm 方程. 尽管如此，由于 Volterra 型方程毕竟还是具有与一般 Fredholm 型方程本质不同的性质，所以独立地对它们加以研究仍然是非常必要的.

在(1.1) ~ (1.4) 中，左端可看成是作用于 $\varphi(x)$ 上的线性算子，因此它

---

① 若无特别声明，本书中考虑的函数均为复值函数.

们统称为**线性积分方程**. 若在上述诸式中被积式 $K(x,y)\varphi(y)$ 换为更一般的函数 $K(x,y,\varphi(x))$ 或 $K(x,y)\psi(\varphi(y))$，则分别称为相应的**非线性积分方程**.

在(1.1) ~ (1.4) 中，$K(x,y)$ 称为积分方程的**核**. 有时根据问题的性质，核本身常常具有某些特点，例如 $K(x,y)$ 对变元连续，这时称之为**连续核**，记作 $K(x,y)\in C$；$K(x,y)$ 可满足条件

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty,$$

称它为 L_2 **核**，记作 $K(x,y)\in L_2$；若核可写为

$$K(x,y)=\frac{H(x,y)}{x-y}$$

或

$$K(x,y)=\frac{H(x,y)}{|x-y|^\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

且 $H(x,y)$ 连续，则 $K(x,y)$ 分别称为 **Cauchy 核或弱奇性核**，等等.

积分方程与微分方程有密切的联系，有时微分方程的问题化为积分方程来处理更为便利. 这是因为对线性算子而言，在一定条件下积分算子比微分算子在某些方面具有更好的特性.

例如初值问题

$$\begin{cases}\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)),\\ \varphi(0)=\varphi_0\end{cases}\tag{1.5}$$

可写为

$$\varphi(x)=\varphi_0+\int_0^x f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x.\tag{1.6}$$

这就是一个 V-Ⅱ 方程；常微分方程中(1.5) 的解的存在唯一性问题正是化为(1.6) 来研究的.

又如两点边值问题

$$\begin{cases}\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=f(x),\\ \varphi(0)=\varphi(1)=0,\end{cases}\tag{1.7}$$

其中 $f(x),\varphi(x)$ 在$[0,1]$上连续，可化为 F-Ⅱ 方程. 事实上，将方程两次积分并换限便得

$$\varphi(x)=c_1+c_2x+\int_0^x (x-y)\big(f(y)-\lambda\varphi(y)\big)\mathrm{d}y.$$

由边值条件定出

$$c_1=0,\quad c_2=-\int_0^1 (1-y)\big(f(y)-\lambda\varphi(y)\big)\mathrm{d}y.$$

代回上式，有

$$\varphi(x)=\int_0^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y-\lambda\int_0^x (x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$
$$-\int_0^1 x(1-y)f(y)\mathrm{d}y+\lambda\int_0^1 x(1-y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

将后两个积分拆成$\int_0^x+\int_x^1$，然后合并，并整理得

$$\varphi(x)-\lambda\left[\int_0^x y(1-x)\varphi(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 x(1-y)\varphi(y)\mathrm{d}y\right]$$
$$=-\left[\int_0^x y(1-x)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 x(1-y)f(y)\mathrm{d}y\right]. \tag{1.8}$$

令

$$K(x,y)=\begin{cases}y(1-x), & y\leqslant x,\\ x(1-y), & y\geqslant x,\end{cases}$$

则上式可统一写为

$$K(x,y)=x_<(1-x_>),$$

这里已引用记号

$$x_<=\min\{x,y\},\quad x_>=\max\{x,y\}.^{①} \tag{1.9}$$

于是(1.8) 成为 F-Ⅱ 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=F(x), \tag{1.10}$$

其中 $F(x)=-\int_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$ 为已知函数.

线性积分方程和线性代数方程组之间有密切的联系．后者的一些结果可移植到线性积分方程中来(如以后要讲的 Fredholm 择一定理)．有时将积分方程近似地离散化为线性代数方程组并由线性代数中的结果可猜测出积分方程相应的结果(当然另须严格的论证)．例如设 $K(x,y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续，$\varphi(x),f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上连续．把 F-Ⅱ 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{1.11}$$

近似离散为

$$\varphi\left(\frac{j}{n}\right)-\lambda\sum_{i=1}^n K\left(\frac{j}{n},\frac{i}{n}\right)\varphi\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=f\left(\frac{j}{n}\right),\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{1.12}$$

令

① 这一记号可简化表达式，在第三章中经常使用.

$$\boldsymbol{\varphi}=\left(\varphi\left(\frac{j}{n}\right)\right),\quad \boldsymbol{L}=\left(\frac{1}{n}K\left(\frac{j}{n},\frac{i}{n}\right)\right),\quad \boldsymbol{f}=\left(f\left(\frac{j}{n}\right)\right)$$

分别为 $n\times 1, n\times n, n\times 1$ 矩阵，则(1.12) 可写为

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{L})\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{f}. \tag{1.12$'$}$$

当 λ 不为(1.12)$'$ 的特征值时，(1.12)$'$ 有唯一解 $\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{f}$；当 λ 为特征值时，(1.12)$'$ 有无穷个解或无解. 又如将 V-Ⅱ 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{1.13}$$

近似离散为

$$\varphi\left(\frac{j}{n}\right)-\lambda\sum_{i=1}^{j-1}K\left(\frac{j}{n},\frac{i}{n}\right)\varphi\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=f\left(\frac{j}{n}\right),\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{1.14}$$

注意(1.13) 是(1.11) 中当 $y\geqslant x$ 时 $K(x,y)=0$ 的特款，或即(1.14) 是(1.12) 中当 $i\geqslant j$ 时 $K\left(\frac{j}{n},\frac{i}{n}\right)=0$ 的情形，于是(1.12) 中的 $\sum\limits_{i=1}^{n}$ 可写成 $\sum\limits_{i=1}^{j-1}$，相应的 $\boldsymbol{L}$ 为下三角矩阵：

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 0 \end{pmatrix}.$$

归纳地可证，这时 $\boldsymbol{L}$ 为 n 阶幂零矩阵，即 $\boldsymbol{L}^n=\boldsymbol{O}$. 从而

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^n=\boldsymbol{I}^n-\lambda^n\boldsymbol{L}^n=(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{L})(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{L}+\cdots+\lambda^{n-1}\boldsymbol{L}^{n-1}).$$

故对任何 λ，$\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{L}$ 均有逆矩阵存在，即对任何 λ，(1.14) 有唯一解

$$\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{L}+\cdots+\lambda^{n-1}\boldsymbol{L}^{n-1})\boldsymbol{f}.$$

由以上讨论，我们可以猜测，F-Ⅱ 方程一般不是对任何的 λ 有唯一解，而相应的 V-Ⅱ 方程对任何 λ 都有唯一解. 以后我们将看到，这些猜测是正确的.

1.2 Banach 不动点原理及其应用

1.2.1 F-Ⅱ 方程解的存在唯一性

在本节中我们设 H 为 Hilbert 空间. 如果 T 为 $H\to H$ 的算子，且对于任意的 $f_1,f_2\in H$，有

$$\| Tf_1 - Tf_2 \| \leqslant \alpha \| f_1 - f_2 \|, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

其中 α 为一常数，与 f_1, f_2 无关，则称 T 为 H 上的**压缩算子**[①]. 显然压缩算子为连续算子.

若 T 为线性算子，则 T 为压缩算子等价于 $\| T \| < 1$.

定理 1.2.1 *若 T 为 H 上的压缩算子，则算子方程 $Tf = f$ 在 H 内有唯一解.*

证 任选 $f_0 \in H$，作迭代序列：

$$f_{n+1} = Tf_n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

显然

$$\begin{aligned} \| f_{n+1} - f_n \| &= \| Tf_n - Tf_{n-1} \| \leqslant \alpha \| f_n - f_{n-1} \| \\ &\leqslant \alpha^2 \| f_{n-1} - f_{n-2} \| \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n \| f_1 - f_0 \|. \end{aligned}$$

当 $n > m$ 时，

$$\begin{aligned} \| f_n - f_m \| &\leqslant \| f_n - f_{n-1} \| + \cdots + \| f_{m+1} - f_m \| \\ &= \sum_{i=m}^{n-1} \| f_{i+1} - f_i \| \leqslant \| f_1 - f_0 \| \sum_{i=m}^{n-1} \alpha^i \\ &< \| f_1 - f_0 \| \sum_{i=m}^{\infty} \alpha^i \\ &= \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \| f_1 - f_0 \| \to 0, \quad n, m \to \infty. \end{aligned}$$

由 H 空间的完备性知，存在唯一的 $f \in H$，使得 $\| f_n - f \| \to 0$. 这时 f 就是方程的解，因为由 T 的连续性知，

$$f = \lim_{n \to \infty} f_{n+1} = \lim_{n \to \infty} Tf_n = T(\lim_{n \to \infty} f_n) = Tf.$$

现证方程只有唯一解. 若 $Tf = f$, $Tg = g$，则

$$\| Tf - Tg \| = \| f - g \| \leqslant \alpha \| f - g \|$$

即 $(1 - \alpha) \| f - g \| \leqslant 0$. 故 $f = g$. ∎

对于本定理有如下几点说明：

注 1 由唯一性知，解与 f_0 的选取无关.

注 2 $f = \lim_{n \to \infty} T^n f_0$. 这是因为

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} Tf_{n-1} = \cdots = \lim_{n \to \infty} T^n f_0.$$

注 3 本定理的证明不仅断言了解的存在及唯一性，而且指出了用逐次逼近法求解的途径.

---

① 对于任何度量空间也可引进压缩算子.

注 4 若 T 是 Banach 空间的压缩算子，本定理仍然成立，证明完全一样. 此时的结论称为 **Banach 不动点原理**.

定理 1.2.2 对于方程 $\varphi-\lambda K\varphi=f$，其中 $f\in H$，K 是 $H\to H$ 的算子(线性或非线性)，若算子 K 满足 Lipschitz 条件

$$\| K\varphi_1-K\varphi_2\| \leqslant M\|\varphi_1-\varphi_2\| \quad (M>0，为常数)，\tag{2.1}$$

则当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M}$ 时，方程在 H 内有唯一解.

证 令 $T\varphi=f+\lambda K\varphi$，则原方程为 $\varphi=T\varphi$. 对任意 $\varphi_1,\varphi_2\in H$，

$$\| T\varphi_1-T\varphi_2\| = \|\lambda K\varphi_1-\lambda K\varphi_2\| \leqslant |\lambda| M\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M}$ 时，T 为压缩算子，由定理 1.2.1 知方程存在唯一解. ∎

定理 1.2.3 线性 F-Ⅱ 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x),\tag{2.2}$$

其中 a,b 有限或无限，$f(x)\in L_2[a,b]$，$K(x,y)\in L_2[a,b]$①，

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=M^2<+\infty,$$

当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M}$ 时，有唯一解

$$\varphi=f+\lambda Kf+\cdots+\lambda^n K^n f+\cdots,\tag{2.3}$$

(2.3) 在平均收敛意义下，即在 $L_2[a,b]$ 空间范数意义下收敛.

证 令 $K\varphi=\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$，则积分算子 K 为 L_2 上的线性有界算子. 事实上，设 $\varphi\in L_2$，由 Schwarz 不等式，

$$|K\varphi|^2\leqslant\int_a^b |K(x,y)|^2\mathrm{d}y\cdot\|\varphi\|^2.$$

从而

$$\| K\varphi\| \leqslant\left(\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\| = M\|\varphi\| <+\infty.$$

于是 K 是 L_2 上的线性有界算子. 而且附带地得出

---

① 确切地说应写 $K(x,y)\in L_2[a,b;a,b]$，为简化记号仍写为 $L_2[a,b]$，在不会混淆时甚至写为 $K(x,y)\in L_2$. 当 $K(x,y)$ 连续时，类似地写成 $K(x,y)\in C[a,b]$ 或 $K(x,y)\in C$. 在容易混淆时，还得详细写出来.