大学物理实验

——近代物理实验

主编　苏润洲　刘嘉新　吴淑杰

DAXUEWULISHIYAN

JINDAIWULISHIYAN

东北林业大学出版社

前　言

本书是由东北林业大学、哈尔滨工业大学、哈尔滨师范大学三所院校的部分教师，根据教育部制定的“近代物理实验”教学大纲进行选题，并结合近几年教学实际情况及仪器设备情况，同时在《大学物理实验——基础性实验》、《大学物理实验——提高性实验》基础上和参照兄弟院校的经验编写的。

近代物理实验所涉及的物理知识面很广，具有较强的前沿性、综合性和技术性。通过近代物理实验，使学生对物理现象的洞察能力、严谨的科学作风和实验方法、技能等几个方面都得到培养和锻炼。本书可作为物理专业学生在完成普通物理实验教学任务后进行近代物理实验的实验教材，也可供其它专业的学生作为参考资料。

在编写过程中，我们力求简明辄要，并根据实际实验设备情况，一方面仍把比较经典的实验项目作为近代物理实验项目列出，另一方面还增设了近代表面物理分析技术的实验项目，在实际教学工作中可根据学时情况进行选择。

本书由苏润洲、刘嘉新、吴淑杰主编，赵伟主审，其中东北林业大学的苏润洲编写了误差理论与数据处理基础知识、单元三、单元五与单元七部分，并进行了全书的统稿；刘嘉新编写了单元一、单元四与单元六部分；吴淑杰编写了单元二部分；哈尔滨工业大学的陈小凡与哈尔滨师范大学的王相夷参编了部分内容，并协助进行了全书的统稿；东北林业大学的赵伟全面审阅与修改了全书。在本书编写过程中还曾得到过许多同仁的帮助，同时又参阅了兄弟院校的有关教材，在此谨致衷心的感谢。由于编者水平有限，时间又比较仓促，书中难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2000 年 10 月

目　录

第一部分　误差理论与数据处理基础知识

第二部分　实验内容

第 一 部 分

误差理论与数据处理基础知识

一 概述

物理学是一门实验科学,物理规律的认识和验证都是通过观察物理现象,定量测量有关物理量,由测量结果分析这些物理量间的关系实现的。

由于各种因素的影响,使得测量结果总是或多或少地偏离真实值,测量值 X 与真值 a 之间的差,定义为误差 Δ

$$\Delta = X - a \tag{1-1}$$

由于测量总有误差,我们的任务是尽量减小误差,求得被测量最可信赖值,并对测量结果的准确度给以正确的估计,误差理论就是适应这种需要建立和发展起来的。

对一物理量的测量,不仅在实验之后对数据分析处理需要误差知识,而且在实验的设计阶段(方法、仪器的选择等)以及在实验进行过程中的控制和监视也需要误差知识,这样才能使得测得的结果更接近真值,并能对结果的可靠程度作出合理的估计。

误差按其性质通常分为系统误差、偶然误差和过失误差。

(一)系统误差

系统误差总是使测量结果向一个方向或有规律的偏离,其数值一定(如仪器的零点误差)或按确定规律变化(如刻度盘偏心差的周期性变化)。用相同方法相同的条件下多次重复测量,只能求其平均,但不能使系统误差消除。系统误差的主要来源是仪器不准、校准条件和使用条件不同、制造上的缺陷等,以及测量条件偏离公式成立的条件、公式的不完善、公式的近似性、观测者固有的习惯等。

在物理实验中往往要做许多工作来发现和消除系统误差,或根据系统误差的大小对测量结果进行修正。在某些重要的精密实验中,对系统误差的分析处理,对整个工作的科学价值和水平有决定性作用。

(二)偶然误差

假设完全消除或不存在显著的系统误差,在相同的实验条件下重复同一测量,每次测得结果并不一致,每次测量与真值之差时正时负,时大时小,测量值似乎杂乱地分散在一定范围内,这种误差带有偶然性或随机性,故称之为偶然误差或随机误差。偶然误差的来源在于实验技术水平的限制,总存在观测者未知或尚不能控制的某些偶然因素,使得各次测量的实验条件发生微小的变化,如环境条件的无规起伏、仪器性能的统计涨落、微小的干扰等等都导致测量的偶然误差,此外观测者感官分辨本领的限制也是偶然误差的一个来源。

测量的偶然误差和系统误差之间的差别也仅仅是一种程度上的差别,并非种类上的差别。所谓的一定实验条件,是相对观测者所能控制的程度而言,事实上,偶然误差本身正是许多微小的、独立的、难以控制的、不可分解的系统误差的随机组合。

偶然误差遵从一定的统计规律,可以用数理统计的方法处理。

(三)过失误差

由于不正确地操作仪器,观察错现象,读错或记错数等错误造成测量结果被明显歪曲,这种由错误引起的误差称为过失误差或粗差。过失误差一般明显地偏离偶然误差的统计分布区间,可借助偶然误差的统计规律选择一个“鉴别值”,判断哪些测量值属于粗差,从而加以剔除。

测量中常用精密度(Precision)来描述测量结果之间的彼此接近程度,它和偶然误差大小有关,如果测量的偶然误差小,说明重复测量的离散程度小,重复性好,称之为精密度高;而用准确度(Accuracy)来描述测量结果和真值偏离的程度,如果测量的系统误差和偶然误差都小,则准确度高,准确度和精密度的意义可形象化地用图 1-1 表示。

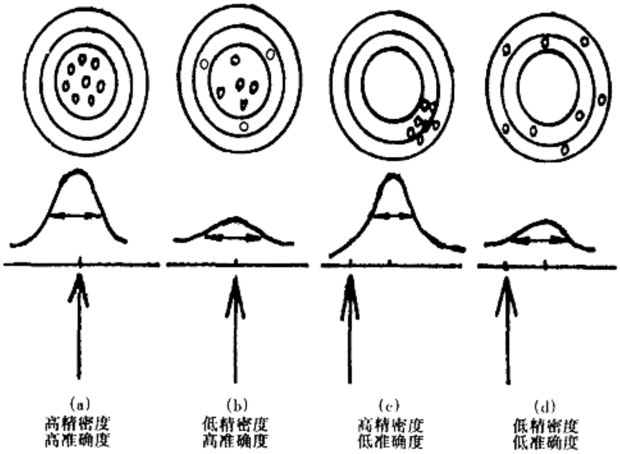


图 1-1　精密度与准确度

在物理测量过程中,观测值除了来自测量的偶然误差外,有时还来自物理现象的固有随机性质,这种随机性质使物理量本身的实际数值围绕着平均值起伏变化,并服从一定的统计规律,例如平衡态的宏观物体的热力学量以及某些和微观过程相联系的物理量的统计涨落就是这种情况。有时物理量本身固有的统计涨落也造成测量结果的离散,例如在核物理实验中,用各种探测器检测原子核衰变产生的各种射线,计数率的统计涨落是造成测量数据离散的主要原因,它是无法用提高测量的精密度予以减小或消除的。

通常把测量的偶然误差和物理现象的固有随机性质带来的物理量观测值的统计涨落统称为统计误差。对于统计误差,必须用概率论和数理统计的方法进行分析,对这方面有许多专著和文献(见参考文献)可供学习和参考。

二　随机变量与统计分布

由于测量存在偶然误差,以及测量对象本身的统计涨落,使得每次测量量带有随机性质,

因此对测量数据分析处理必须应用随机量的数学。在此仅介绍一些与测量数据分析处理有关的最基本的概念和其应用,以期从概率和统计的意义上来理解误差,并学习一些有关的数据处理分析方法。

(一)随机变量

1.随机变量和随机子样

在物理实验中,在一定条件下测量每个物理量,由于存在观测者未知的和尚不能控制的许多偶然因素,每一观测值的出现是一随机事件,该物理量为随机变量,各次观测值为随机变量的取值。

随机变量的全部可能取值的集合称为总体或母体。如果总共进行了 N 次独立测量,得到随机变量的 N 个取值(又称随机数)$X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$,它的集合称为随机变量的一个随机子样(又称样本或子样),N 个随机数称为子样的容量,实际上物理量的测量总是获得某些随机量的子样,子样的容量由重复观测次数决定。

如果随机变量的取值为有限个或可数的一串数值,它为离散型随机变量,如核物理实验探测器记录的放射粒子的个数等等。如果可能取值布满某个区间的随机变量,则称为连续型随机变量,多数物理量测量属于连续型随机变量。

2.随机事件的概率

如果在一定条件下进行了 N 次试验,其中事件 A 发生了 N_A 次,则比值 N_A/N 称为事件 A 发生的频率。当 N 增加时,N_A/N 逐渐稳定于某个确定值,该值称为事件 A 的概率,记为 $P_r(A)$。

3.分布函数、概率函数和概率密度函数

对于随机变量的可能的全部取值可以排列在实数轴 X 上,构成实数轴上一个子集合,更为关心地是各种可能取值的概率,即随机变量的概率分布,如图 2-1 所示。对于离散型随机变量 X,它只能取可数的数个值 $X_1,X_2,\cdots\cdots$,定义概率函数为随机变量 $X=x$ 的概率,即

$$P(x)=P_r(X=x) \tag{2-1}$$

而分布函数定义为

$$P(x)=P_r(X\leqslant x) \tag{2-2}$$

显然有

$$P(x)=\sum_{x_i\leqslant x}P(x_i) \tag{2-3}$$

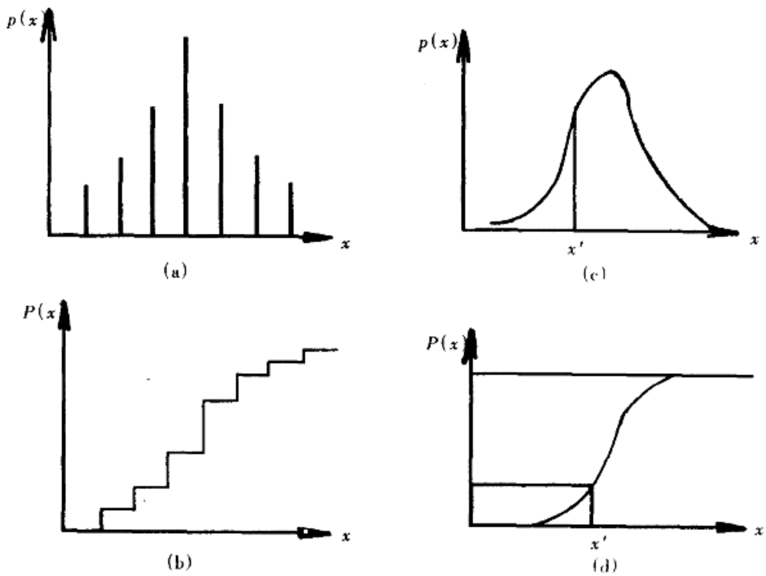
对于连续型随机变量 X,则 $x\leqslant x\leqslant x+\mathrm{d}x$ 的概率称为概率密度函数 $p(x)$,它和分布函数 $P(x)$的关系显然有

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x \tag{2-3$'$}$$

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}p(x)\mathrm{d}x \tag{2-4}$$

且 $p(x)$应满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=1 \tag{2-5}$$



(a)离散型随机变量 X 的概率密度函数;(b)离散型随机变量 X 的分布函数;
(c)连续型随机变量 X 的概率密度函数;(d)连续型随机变量 X 的分布函数。

图 2-1　分布函数与概率密度函数

(二)分布的数字特征量——期待值、方差和协方差

如果一个随机变量的概率函数或概率密度函数的形式已知,只要能给出函数式中的各个参数(称为分布参数)的数值,则随机变量的分布就完全确定了,而分布参数的数值往往就是所研究的物理量的数值。

1.随机变量的期待值(数学期望)

随机变量的期待值定义为:

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{2-7}$$

或

$$\langle X \rangle = \sum_x xP(x) \tag{2-7'}$$

期待值的物理意义是进行无限多次重复测量时测量结果的平均值即为期待值。显然期待值是随机变量概率密度曲线的重心位置,对于单峰、对称的概率密度曲线,期待值就是曲线峰所对应的位置。

2.方差

随机变量的方差定义为:

$$Var(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{2-8}$$

方差 $Var(X)$ 为随机变量 X 与其 $\langle X \rangle$ 之差的平方的期待值。对离散型分布

$$Var(X)=\sum_x(x-<X>)^2P(x) \tag{2-8'}$$

或
$$\left.\begin{aligned}\sigma(X)&=(Var(X))^{\frac{1}{2}}\\ \sigma^2(X)&=Var(X)\end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

方差或标准误差描述随机变量围绕其期待值分布的离散程度，方差越小，随机变量在其期待值左右分布得越集中。

可以证明

$$Var(X)=\delta^2(X)=<X^2>-<X>^2 \tag{2-10}$$

3.两个随机变量的协方差

两个随机变量的协方差定义为

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-<X>)(y-<Y>)P(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=<(x-<X>)(y-<Y>)>\end{aligned} \tag{2-11}$$

它描述两个随机变量相关程度，当 X、Y 相互独立时，$Cov(X,Y)=0$；当 $Cov(X,Y)\neq0$时，X，Y 必相关。并用相关系数

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \tag{2-12}$$

描述 X，Y 相关程度，若 $\rho(X,Y)>0$ 称 X、Y 正相关，Y 值随 X 值大而增大；$\rho(X,Y)<0$ 为负相关，Y 值随 X 增大而减少；$\rho(X,Y)=1$ 为完全线性相关，Y 为 X 的线性函数，如图 2-2 所示。

也能证明

$$\sigma ov(X,Y)=<XY>-<X><Y> \tag{2-13}$$

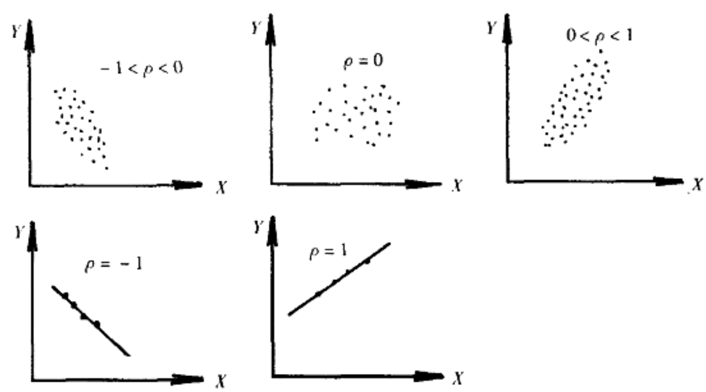


图 2-2　两个随机变量的不同相关程度

(三)数据处理中的常用分布

由于影响随机变量的因素各不相同,因此随机变量的概率分布规律也多种多样,这里仅介绍几种物理量测量中常见的和数据分析处理中常用的统计分布。

1.二项式分布

若随机事件 A 发生的概率为 P,不发生的概率为 $1-P$,在 N 次独立试验中 A 发生 K 次的概率为:

$$P(K)=\frac{N!}{(N-k)!\ k!}P^k(1-P)^{N-k} \tag{2-14}$$

它正是二项式$[P+(1-P)]^N$ 展开式中的任意项,故称为二项式分布。随机变量 k 是离散型的,它只能取 $k=0,1,2,\cdots\cdots,N$。

遵从二项式分布的随机变量 k 的期待值和方差分别为:

$$<k>=\sum_{k=0}^{N}K\frac{N!}{(N-k)!\ k!}P^k(1-P)^{N-k}=NP \tag{2-15}$$

$$\sigma^2(k)=<k^2>-<k>^2=NP(1-P) \tag{2-16}$$

二项式分布有二个独立参数 P 和 N。

2.泊松(Poisson)分布

在二项式分布中,当 $N\to\infty$,每次试验 A 发生的概率 $P\to 0$,但其期待值 $<k>=NP\to m$,m 为有限值,则二项式分布变为泊松分布。

$$\begin{aligned}\text{由于 } P(K)&=\frac{N!}{(N-k)!\ k!}P^k(1-P)^{N-k}\\&=\frac{(NP)^k}{k!}(1-\frac{NP}{N})^{N-k}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{N})\cdots\cdots(1-\frac{k-1}{N})\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时,$\lim\limits_{N\to\infty}NP=m$,$\lim\limits_{N\to\infty}(1-\frac{NP}{N})^{N-k}=e^{-m}$

$$\lim_{N\to\infty}1\cdot(1-\frac{1}{N})\cdots(1-\frac{k-1}{N})=1$$

从而有泊松分布

$$P(K)=\frac{m^k}{k!}\cdot e^{-m} \tag{2-17}$$

$k=1,2,\cdots\cdots$也是离散型变量。k 的期待值、方差和标准误差为

$$<k>=m,\sigma^2(k)=m,\sigma(k)=\sqrt{m} \tag{2-18}$$

泊松分布的参数只有一个,即 m。

数目极多的原子各自独立发射光子,或原子核发生衰变,光子数目或衰变次数遵从泊松分布。

3.高斯(Gauss)分布(又称正态分布)

高期分布是误差理论中最重要的分布,它是一种连续型分布,其概率密度函数形式为:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2] \tag{2-19}$$

式中：μ 和 σ 为分布参数，且 $\sigma > 0$。通常用 $n(x;\mu,\sigma)$ 表示正态(高斯)分布的概率密度函数，用 $N(x;\mu,\sigma)$ 表示正态分布的分布函数，即

$$\left.\begin{aligned} n(x;\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ N(x;\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \tag{2-20}$$

服从正态分布的随机变量称为正态变量，正态变量 X 的期待值，方差和标准误差分别为：

$$\left.\begin{aligned} < X > &= \int_{-\infty}^{+\infty} x n(x;\mu,\sigma)\mathrm{d}x = \mu \\ \sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x;\mu,\sigma)^2 n(x;\mu,\sigma)\mathrm{d}x = \sigma^2 \\ \sigma(X) &= [\sigma^2(X)]^{\frac{1}{2}} = \sigma \end{aligned}\right\} \tag{2-21}$$

参数 μ 就是正态分布的期待值，在消除测量的系统误差下，μ 即为待测物理量的真值；σ 为待测物理量的标准误差，表征分布偏离期待值的程度，如图 2-3 所示。在期待值附近一个标准误差范围内的概率含量为：

$$\xi = P_r(|x-\mu| \leqslant \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} n(x;\mu,\sigma)\mathrm{d}x = 68.3\% \tag{2-22}$$

见图 2-4。而在三个标准误差范围内的概率含量为：

$$\xi = P_r(|x-\mu| \leqslant 3\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} n(x;\mu,\sigma)\mathrm{d}x = 99.7\% \tag{2-23}$$

因此，正态变量的取值与期待值相关 3σ 的概率将小于 0.3%，可用它作为剔除粗差的依据。

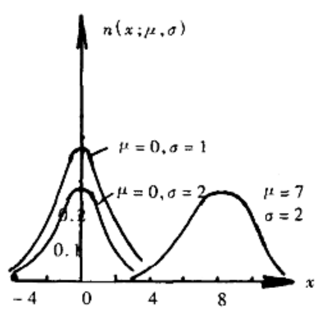


图 2-3　不同参数的正态分布曲线

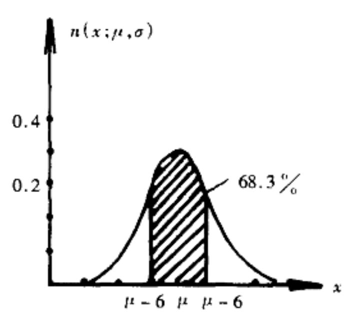


图 2-4　$|X-\mu| \leq \sigma$ 的概率含量

当期待值 $\mu = 0$，方差 $\sigma^2 = 1$ 时的正态分布称为标准正态分布，其概率密度函数和分布函数分别为：

$$n(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$
$$N(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \qquad (2-24)$$

标准正态分布的 $n(x;0,1)$和 $N(x;0,1)$在一般的数理统计和误差理论书籍中有表可查。

对于分布为 $n(x;\mu,\sigma)$的正态变量 X,做变换

$$u=\frac{X-\mu}{\sigma} \qquad (2-25)$$

即可划归标准正态分布,它们间满足

$$\left.\begin{aligned} n(x;\mu,\sigma)&=\frac{1}{\sigma}n(u=\frac{x-\mu}{\sigma};0,1)\\ N(x;\mu,\sigma)&=N(u=\frac{x-\mu}{\sigma};0,1)\end{aligned}\right\} \qquad (2-26)$$

正态分布之所以重要的另一原因是,其他许多分布的极限条件下都趋向于正态分布。例如泊松分布当 $m>10$ 时已接近正态分布,$m\geqslant 20$ 时,与正态分布相差很小,可证明 m 足够大时,泊松分布趋近于

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\exp\left[\frac{-(k-m)^2}{2m}\right] \qquad (2-27)$$

其中 $<k>=m,\sigma=\sqrt{m}$。

4.其他分布

当根据试验得到随机子样,并对随机变量的分布参数、分布规律做分析推断时,X^2 分布、t 分布、F 分布等有重要应用,它们不但能检验设定的分布规律是否正确,误差选取是否合适,而且能帮助检查是否有系统误差存在。这部分内容,可查阅有关参考书。

三 数据处理中分布参数的估计

本部分我们将讨论等精度和非等精度下测量量的真值的最佳估计,测量精密度(散离程度)的估计,误差的传递和实验条件的选择确定等问题。

(一)偶然误差遵从高斯分布

1.偶然误差的性质

如果排除了系统误差、过失误差,仅考虑测量的偶然误差,当对一物理量进行大量的、独立的测量时,出现的偶然误差具有如下特点:

(1)绝对值相同的正负偶然误差出现的概率相等,即有对称性。

(2)绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大,即有单峰性。

(3)偶然误差的绝对值有一极限,所有的偶然误差都落在某一定范围内,超过极限的误差

实际上不出现，即有有界性。

由上面的三条特性，我们不难发现，随着测量次数的增加，偶然误差越来越趋向于零。

2.偶然误差遵从高斯分布

测量值 x 与真值 a 之差：

$$\Delta = x - a$$

为偶然误差时，误差在 Δ 到 $\Delta + \mathrm{d}\Delta$ 范围内的概率应正比于范围 $\mathrm{d}\Delta$ 的大小，且与 Δ 有关。

$$p = \varphi(\Delta)\mathrm{d}\Delta \tag{3-1}$$

其中 $\varphi(\Delta)$ 为偶然误差的概率分布密度。由偶然误差的性质，不难证明 $\varphi(\Delta)$ 正是高斯分布（正态分布）：

$$\begin{aligned}\varphi(\Delta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\Delta^2/2\sigma^2} \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-h^2\Delta^2}\end{aligned} \tag{3-2}$$

其中

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \tag{3-3}$$

h 称为精密度常数。

不难看出，指数项含有 Δ^2，说明绝对值等同的误差出现概率相等，符合对称性；Δ 值越小，概率越大，在 $\Delta = 0$ 时，有最大概率，符合单峰性；Δ 值增加时，$\varphi(\Delta)$ 很快减小，以至趋于零，符合有界性。

图 3－1 是误差分布（高斯分布）曲线。由图可见，h 越大，$\varphi(\Delta)$ 最大值越大，曲线越尖锐，即小误差出现的概率大，而大误差出现的概率小，精密度越高；反之 h 越小，曲线越平坦，大误差出现的概率增加，精密度越低，故称 h 为精密度常数。

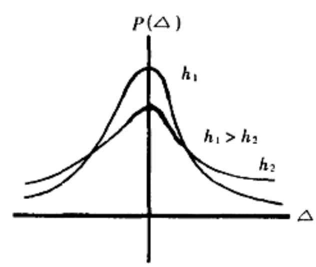


图 3－1　误差分布与精密度的关系

（二）测量精密度的估计

对一组等精密度的测量值（称为测量列）的精密度的表示，可有几种方法。

（1）均方误差（标准误差或称均方根误差）：在一组等精度的测量中，其偶然误差分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots, \Delta_n$，误差同时出现在 $\Delta_1—\Delta_1 + \mathrm{d}\Delta, \Delta_2—\Delta_2 + \mathrm{d}\Delta, \cdots\cdots, \Delta_n—\Delta_n + \mathrm{d}\Delta$ 区间内的概率为

$$p = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \mathrm{e}^{-h^2\Sigma\Delta_i^2}\underbrace{\mathrm{d}\Delta\cdot\mathrm{d}\Delta\cdots\cdots\mathrm{d}\Delta}_{n个}$$

如果参数 h 可有不同的选择，那概率最大的最佳值，即将上式对 h 微分并取为 0，求出的 h 值，即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}=n(\frac{h}{\sqrt{\pi}})^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{\pi}})e^{-h^2\Sigma\Delta_i^2}-(\frac{h}{\sqrt{\pi}})^n e^{-h^2\Sigma\Delta_i^2}\cdot 2h\Sigma\Delta_i^2=0$$

$$n-2h^2\Sigma\Delta_i^2=0$$

或

$$\frac{1}{h\sqrt{2}}=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots\cdots\Delta_n^2}{n}$$

我们取$\frac{1}{h\sqrt{2}}$作为测量列的精密度标志，称之为均方误差，以 σ 表示，则

$$\sigma=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots\cdots+\Delta_n^2}{n} \tag{3-4}$$

(2)概率误差(或偶然误差，可几误差)：如测量的误差落在 $\pm r$ 区间内的概率和落在 $\pm r$ 区间之外的概率相等时，r 就称为偶然误差。

$$由于\int_{-r}^{r}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\mathrm{d}\Delta=\frac{1}{2} \tag{3-5}$$

可求得：

$$r=0.6745\sigma\simeq\frac{2}{3}\sigma \tag{3-6}$$

(3)平均误差 η：各测定值误差的绝对值的平均值即

$$\eta=\frac{\Sigma|\Delta_i|}{n} \tag{3-7}$$

由

$$\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\mathrm{d}\Delta=\frac{1}{\sqrt{\pi}h}得到$$

$$\eta=0.7979\sigma\simeq\frac{4}{5}\sigma \tag{3-8}$$

这关系常用来通过 η 的计算求出 σ 值，以简化计算。

从理论上讲，三种误差对表示同一测量列的精密度效果是相同的，但实际上在有限测量次数情况下，三种表示却有所不同，而均方误差对数据中存在的较大误差比较敏感。我国和世界上很多国家都在科学报告中采用均方误差。

应当指出，上述几种误差均为对一组测量中各测定值的可靠程度的估计，而不是对测量结果(平均值)的可靠程度的估计。为了加以区别，称上述的误差为测量列的均方误差(或然误差、平均误差)。

根据正态分布函数关系，可计算误差落在 $\pm\Delta$ 区间的概率：

$$p(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\Delta$$

以 $t=\frac{\Delta}{\sigma}$代换变量得

$$p(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}\mathrm{d}t$$

将不同的 t 值代入上式，便可得变量 t 落在不同范围的概率值。一般可根据 t 值，查表得到 p 值。上式称为概率积分。

当 $\Delta=\sigma$ 时，则 $t=1$，查得误差落在 $\pm\sigma$ 区间的概率为：

$$p_{+\sigma}^{-\sigma}=0.683$$

这就是说在一系列观测中，误差值处于 $+\sigma$ 到 $-\sigma$ 之间的数目占误差总数目（即观测次数 n）的 68.3%。

当 $\Delta=\eta=0.7979\sigma$ 时，$t=0.7979$

查得 $$p_{+\eta}^{-\eta}=0.575$$

即测量值的误差落在 $\pm\eta$ 区间内的数目占总误差数目的 57.5%。

同理当 $\Delta=3\sigma$ 时，$t=3$

得 $$p_{+3\sigma}^{-3\sigma}=0.997$$

即误差落在 $\pm3\sigma$ 区间内的概率为 99.7%，而落在 $\pm3\sigma$ 区间外的概率仅为 0.3%，这一概率很小，故一般可认为误差超过 $\pm3\sigma$ 是几乎不可能的，因此把 $\pm3\sigma$ 称为极限误差。一般在技术报告中多使用极限误差。

可以证明，在误差曲线上，均方误差 σ 之值是曲线拐点的横坐标；η（平均误差）是纵轴一侧曲线下所包面积的重心的横坐标；概率误差 γ 则是将此面积分为两等分的横坐标，如图 3－2 所示。

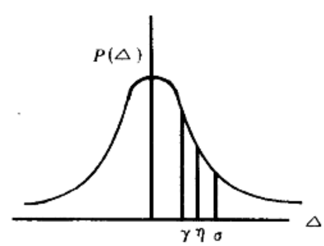


图 3－2　三种误差表示法

（三）真值最佳估计——算术平均值与最小二乘原理

在等精度条件下对真值为 a 的物理量进行了 n 次独立测量，测定值为 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$。假设系统误差已消除，不存在过失误差，其偶然误差分别为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots\cdots\Delta_n$，误差同时出现在 Δ_1—$\Delta_1+\mathrm{d}\Delta,\cdots\cdots\Delta_n$—$\Delta_n+\mathrm{d}\Delta$ 区间内的概率为

$$p=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\Sigma(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\Delta\cdots\cdots\mathrm{d}\Delta$$

如果 a 为最佳值，则概率 p 应该为最大，也就是

$$Q=\Sigma(x_i-a)^2=(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots\cdots+(x_n-a)^2$$

为极小。将上式对 a 微分，并取为 0，则得

$$\left.\begin{aligned}&-2(x_1-a)\cdots\cdots-2(x_n-a)=0\\&\langle a\rangle=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}=\bar{x}\end{aligned}\right\}\tag{3-9}$$

可见 a 的最佳值就是算术平均值。因最佳值并不等于真值，故用 $\langle a\rangle$ 表示。

又将各测定值和算术平均值的差称为残差，用符号 v 表示，则

$$v_i=x_i-\bar{x}\tag{3-10}$$

这样（3－9）式可写成

$$v_1^2+v_2^2+\ +v_n^2=\text{极小}\tag{3-11}$$

因此上述的结论又可说，等精度 n 次直接测量后的最佳值，是使残差平方和为最小时求出的数值，这就是最小二乘原理。