中等职业教育机电类专业“十一五”规划教材

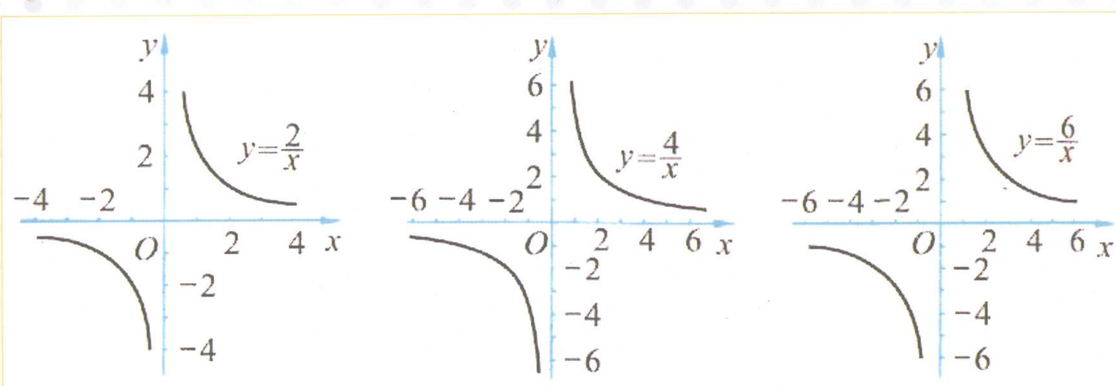
实用数学

中国机械工业教育协会

全国职业培训教学工作指导委员会
机电专业委员会

组编

易新友　主编



“工学结合”新理念
“校企合作”新模式
赠送电子教案

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

中等职业教育机电类专业“十一五”规划教材

实　用　数　学

中国机械工业教育协会

全国职业培训教学工作指导委员会　组编

机电专业委员会

易新友　主编

机　械　工　业　出　版　社

本教材是为适应“工学结合、校企合作”培养模式的要求，根据中国机械工业教育协会和全国职业培训教学工作指导委员会机电专业委员会组织制定的中等职业教育教学计划大纲编写的。本教材主要内容包括：集合与函数、三角形解法及其应用、三角函数、空间图形及其计算、直线与方程、曲线与方程和简单复数。

本套教材公共课、专业基础课、专业课、技能课、企业生产实践配套，教学计划大纲、教材、电子教案（或课件）齐全，大部分教材还有配套的习题集和解答。

本教材可供中等职业技术学校、技工学校、职业高中使用。

图书在版编目(CIP)数据

实用数学/易新友主编. —北京:机械工业出版社,2008.2
中等职业教育机电类专业“十一五”规划教材
ISBN 978-7-111-23458-6

Ⅰ. 实… Ⅱ. 易… Ⅲ. 数学课-专业学校-教材 Ⅳ. G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 017963 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：荆宏智 郎 峰 责任编辑：郎 峰 版式设计：霍永明
责任校对：张 媛 封面设计：马精明 责任印制：杨 曦
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2008 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 6.25 印张 · 147 千字
0 001—5 000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-23458-6
定价：11.50 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
销售服务热线电话:(010)68326294
购书热线电话:(010)88379639 88379641 88379643
编辑热线电话:(010)88379083

中等职业教育机电类专业“十一五”规划教材
编审委员会

《实用数学》编审人员

主　编　易新友
编　者　吴卫东　易新友
主　审　许　好

序

为贯彻《国务院关于大力发展职业教育的决定》精神，落实文件中提出的中等职业学校实行“工学结合、校企合作”的新教学模式，满足中等职业学校、技工学校和职业高中技能型人才培养的要求，更好地适应企业的需要，为振兴装备制造业提供服务，中国机械工业教育协会和全国职业培训教学工作指导委员会机电专业委员会共同聘请有关行业专家制定了中等职业学校6个专业10个工种新的教学计划、大纲，并据此组织编写了这6个专业的“十一五”规划教材。

这套新模式的教材共近70个品种。为体现行业领先的策略，编出特色，扩大本套教材的影响，方便教师和学生使用，并逐步形成品牌效应，我们在进行了充分调研后，才会同行业专家制定了这6个专业的教学计划，提出了教材的编写思路和要求。共有22个省（市、自治区）的近40所学校的专家参加了教学计划大纲的制定和教材的编写工作。

本套教材的编写贯彻了“以学生为根本，以就业为导向，以标准为尺度，以技能为核心”的理念，“实用、够用、好用”的原则。本套教材具有以下特色：

1. 教学计划大纲、教材、电子教案（或课件）齐全，大部分教材还有配套的习题集和习题解答。

2. 从公共基础课、专业基础课，到专业课、技能课全面规划，配套进行编写。

3. 按“工学结合、校企合作”的新教学模式重新制定了教学计划、教学大纲，在专业技能课教材的编写时也进行了充分考虑，还编写了第三学年使用的《企业生产实习指导》。

4. 为满足不同地区、不同模式的教学需求，本套教材的部分科目采用了“任务驱动”形式和传统编写方式分别进行编写，以方便大家选择使用；考虑到不同学校对软件的不同要求，对于《模具CAD/CAM》课程，我们选用三种常用软件各编写了一本教材，以供大家选择使用。

5. 贯彻了“实用、够用、好用”的原则，突出“实用”，满足“够用”，一切为了“好用”。教材每单元中均有教学目标、本章小结、复习思考题或技能练习题，对内容不做过高的难度要求，关键是使学生学到干活的真本领。

本套教材的编写工作得到了许多学校领导的重视和大力支持以及各位老师的热烈响应，许多学校对教学计划大纲提出了很多建设性的意见和建议，并主动推荐教学骨干承担教材的编写任务，为编好教材提供了良好的技术保证，在此对各个学校的支持表示感谢。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免存在某些缺点或不足，敬请读者批评指正。

中国机械工业教育协会
全国职业培训教学工作指导委员会
机电专业委员会

前　言

本书是在中国机械工业教育协会和全国职业培训教学工作指导委员会的指导下，坚持以学生为根本，以就业为导向，以标准为尺度，以技能为核心的原则，正确把握数学课在中等职业教育中的作用和地位，为中等职业学校的数学课程教学而编写的。

本书结合生产实践中的应用实例，吸收了近年来职业教育关于初等数学课程改革和教材建设的宝贵经验，结合中等职业教育的实践教学特点，根据现有生源的质量状况，在编写过程中注意了以下几个方面：

1. 明确学习对象，充分考虑学生的学习特点，不强求死记硬背，不追求数学理论的系统性，在保留必要理论推导的前提下，尽量避免纯理论的推导过程。

2. 注意直观和归纳，方便学生对教学内容的理解和掌握。

3. 强调基本知识和基本技能，避免复杂的计算和变换。

4. 课后安排了大量的练习题，习题难易适中，方便教师选择。

本书的第一章～第三章由吴卫东编写，第四章～第七章由易新友编写。全书由易新友主编，由太原技师学院的许妤审稿，她对本书提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促，兼之作者水平有限，书中不妥之处恳请广大读者和同仁批评指正。

编　者

目　录

第一章　集合与函数

教学目标

1. 掌握集合的概念，会用符号表示元素与集合的关系。掌握集合的表示法。

2. 理解空集、子集的概念，了解集合之间的关系，掌握集合交、并的简单运算。

3. 理解数集、区间的概念，会用区间表示数集。

4. 掌握函数的概念及其定义域，会求简单函数的定义域和值域，了解函数的三种表示方法。理解函数的单调性等概念，掌握其图像特征，会根据图像写出函数的单调区间。会求简单函数的最大值和最小值。

教学重点和难点

本章的重点是集合的运算、求函数的定义域、二次函数的性质及应用。本章的难点是集合的概念、二次函数的建立、二次函数的性质及应用。

第一节　集　　合

一、集合与元素

【引例】　我们先考察下列几组对象：（1）我们学校的全体学生；（2）1，3，5，7；（3）直线 $y=3x+2$ 上所有的点。

它们分别是由一些人、数、点组成的整体，这三个整体虽有区别，但每个整体中的对象都具有某种共同属性。

1. 集合的定义

一般地，具有某种共同属性的不同对象的全体称为**集合**（简称**集**）。集合里的各个不同对象称为这个集合的**元素**。

在数学中，由数字组成的集合称为**数集**，由方程或不等式的解所组成的集合称为**解集**。1，3，5，7 组成的集合就是一个数集；1，-1 组成的集合既是一个数集，也是方程 $x^2=1$ 的解集。

2. 集合的特征

从引例可以看到，集合有如下特征：

1）组成集合的对象都是确定的。例如，我们学校的全体学生，谁是这个学校的学生，谁不是这个学校的学生，都是明确的。

2）由一些元素组成集合时，每个元素不能重复出现。例如，1，3，5，7 的集合，这几个数字中的每一个数字，只能出现一次。

3）由于集合是由一些元素组成的整体，因此不用考虑这些元素的排列次序。例如，太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋组成的集合与大西洋、北冰洋、太平洋、印度洋组成的集合是同一个集合。

3. 特殊集合的记号

1）全体非负整数的集合简称为自然数集，记作 N。

2）全体的正整数的集合简称为正整数集，记作 N_+。

3）全体整数的集合简称为整数集，记作 Z。

4）全体有理数的集合简称为有理数集，记作 Q。

5）全体实数的集合简称为实数集，记作 R。

4. 集合与元素的关系

一般地，若 a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$，读作 a 属于 A；若 b 不是集合 A 的元素，记作 $b \notin A$，读作 b 不属于 A。

5. 集合的种类

1）含有无限多个元素的集合称为**无限集**，如引例中的（3）是无限集。

2）含有有限个数的元素的集合称为**有限集**，如引例中的（1）、（2）都是有限集。

3）只含一个元素的集合称为**单元素集**。例如：$3x=5$ 的解组成的集合（简称解集）就是一个单元素集。

4）不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$。

二、集合的表示法

表示集合的方法通常有两种：列举法和描述法。

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫做**列举法**。

例如，绝对值小于 3 的整数组成的集合，可以表示为：$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$。

2. 描述法

把集合中所有元素的共同属性描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫做**描述法**。

例如，直线 $y=2x+1$ 上所有的点坐标组成的集合（也称为点集），可以表示为：$\{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$。

描述法的另一种表达形式是把集合中元素的共同属性直接写在大括号内。例如，所有等腰三角形的集合，可以表示为：{等腰三角形}。

三、子集与真子集

1. 子集

观察两个集合 A 和 B：$A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，发现集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就把集合 A 叫做集合 B 的子集。

一般地，对于集合 A 和 B，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”。

由子集的概念可知，任何一个集合都是它本身的子集，即 $A \subseteq A$。

2. 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么 A 就叫做 B 的**真子集**，表示为：$A \subset B$ 或 $B \supset A$。

规定　空集是任何一个非空集合的真子集，也就是说对于任何一个非空集合 A，都有 $\varnothing \subset A$。

3. 集合相等

如果集合 A 是集合 B 的子集，同时集合 B 又是集合 A 的子集，即：$A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$。

例如：$A=\{x\mid x^2=9\}$，$B=\{-3,3\}$。集合 A 和集合 B 的元素都是 -3、3，那么 $A=B$。

例 1 写出集合 $\{0,1\}$ 的所有子集和真子集。

解 集合 $\{0,1\}$ 的所有子集分别是：$\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$ 和 $\varnothing$。真子集分别是：$\{0\}$，$\{1\}$ 和 $\varnothing$。

四、集合的运算

1. 交集

【引例】 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $B=\{2,4,6,8\}$，由集合 A、B 可以看出 $\{2,4\}$ 是由 A 和 B 的公共元素组成的一个新的集合。

定义 设 A、B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例 2 已知 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$，求 $A\cap B$。

解 $A\cap B=\{x\mid -1<x<2\}\cap\{x\mid 0\leqslant x<3\}$

$=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$。

其几何意义如图 1-1 所示。

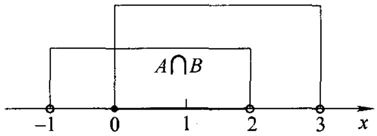


图 1-1

2. 并集

【引例】 已知集合 $A=\{1,2,3,6\}$，集合 $B=\{2,4,5,6\}$，如果把 A、B 所有元素合并在一起，组成一个新的集合 C，$C=\{1,2,3,4,5,6\}$。

由上例可以看出，集合 C 是由属于集合 A 和集合 B 的所有元素组成的集合。

定义 一般地，对于两个集合 A 与 B，由属于 A 和属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}。$$

例 3 已知 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=\{x\mid -1<x<1\}\cup\{x\mid 0\leqslant x<2\}$

$=\{x\mid -1<x<2\}$。

其几何意义如图 1-2 所示。

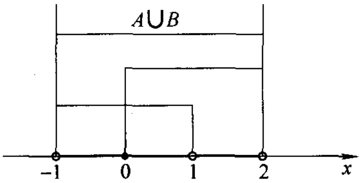


图 1-2

五、区间的概念

在研究数集和函数的定义域时常常用到区间的概念。区间表示的是某一区域的全体实数。

设 a，b 是两个实数而且 $a<b$，则

1）数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)。

2）数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$。

3）数集 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为左开右闭区间，记作 $(a,b]$。

4）数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 称为左闭右开区间，记作 $[a,b)$。

5）数集 $\{x \mid x > a\}$，记作 $(a, +\infty)$。

6）数集 $\{x \mid x \geqslant a\}$，记作 $[a, +\infty)$。

7）数集 $\{x \mid x < b\}$，记作 $(-\infty, b)$。

8）数集 $\{x \mid x \leqslant b\}$，记作 $(-\infty, b]$。

9）数集 $\mathrm{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，记作 $(-\infty, +\infty)$。

符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作正无穷大和负无穷大。它们并不表示某个确定的数，而是表示实数在正、负两个方向上的变化趋势。

前四种区间为有限区间，它们在数轴上的表示如图 1-3 所示。后五种为无限区间，其中 5）~8）四种无限区间在数轴上的表示如图 1-4 所示。

在例 3 中，$A \cup B = \{x \mid -1 < x < 2\}$，用区间表示：$A \cup B = (-1, 2)$。

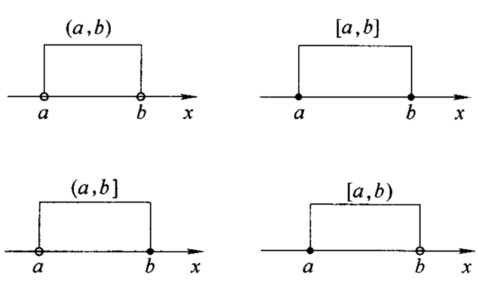


图 1-3

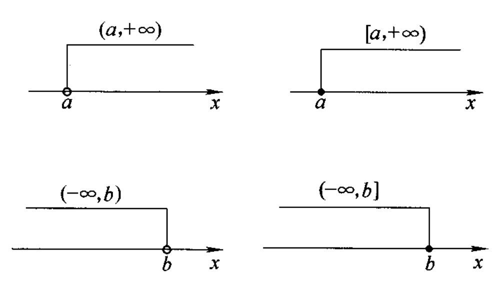


图 1-4

习 题 1-1

1. 将符号 $\in$ 或 $\notin$ 填入空格中

5 ___$\mathbf{N}$，π ___$\mathbf{Q}$，$\sqrt{3}$___$\mathbf{R}$，-2 ___$\mathbf{N}_+$

2. 用列举法表示绝对值不超过 3 的整数组成的集合。

3. 用描述法表示大于 0 小于 1 的全体实数的集合。

4. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$，求 $A \cap B$，$A \cup B$。

5. 设 $A = \{x \mid -3 < x < 2\}$，$B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$，求 $A \cap B$，$A \cup B$。

6. 用列举法表示下列集合：

（1）小于 10 的自然数的集合；

（2）方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的解集；

（3）$\{x \in \mathbf{Z} \mid -5 < x < 5\}$。

7. 用描述法表示下列集合：

（1）大于 -4 小于 2 的全体实数；

（2）所有奇数的全体。

8. 写出下列各题中集合 A，B 的交集和并集：

（1）$A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{c, d, e, f\}$；

（2）$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$；

(3) $A=\{x \mid -2<x<2\}$, $B=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$。

9. 用区间表示下列集合：

(1) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$；

(2) $\{x \mid 2<x<5\}$；

(3) $\{x \mid x \geqslant 0\}$。

第二节　函　　数

一、函数的概念

在初中，我们学过函数的概念，其定义为：设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值 y 与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，x 叫做自变量，x 的取值范围叫做函数的**定义域**，与 x 对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的**值域**。

y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，括号里的 x 表示自变量，f 表示 y 是 x 的对应关系。有时，函数的对应关系也可以用 g、h 等字母表示。比如，可以将 y 是 x 的函数记为 $y=g(x)$ 或者 $y=h(x)$ 等。

二、函数的定义域

1. 函数定义域的概念

在函数 $f(x)$ 中，自变量 x 的取值范围叫做**函数定义域**。它是全体自变量的集合。

2. 自变量的确定

1）实际问题中，函数的定义域要根据实际意义进行确定。

例如，圆的面积计算公式 $S=\pi r^2$ 中，S 和 r 是变量，S 是 r 的函数，半径 $r>0$ 才有意义。

2）用数学式子表示的函数中，函数的定义域是指使这个式子有意义的 x 的取值范围。对于分式，分母不能为零。例如，$f(x)=\dfrac{2}{x}$，要使分式 $\dfrac{2}{x}$ 有意义，分母 x 不能取零。对于二次根式，根式内的代数式要大于等于零。例如，$f(x)=\sqrt{x+3}$，要使 $\sqrt{x+3}$ 有意义，则 $x+3 \geqslant 0$。如果在函数式中有二次根式和分式组合时，必须同时满足分母不为零和根式内的代数式大于等于零。

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$　　(2) $f(x)=\sqrt{3-x}$　　(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

解　(1) 要使 $\dfrac{1}{x+5}$ 有意义，必须分母 $x+5 \neq 0$，即 $x \neq -5$，所以这个函数的定义域是 $\{x \mid x \in \mathbf{R}$，且 $x \neq -5\}$。

(2) 要使 $\sqrt{3-x}$ 有意义，必须使 $3-x \geqslant 0$，即 $x \leqslant 3$，所以这个函数的定义域是 $\{x \mid x \leqslant 3\}$。

(3) 要使 $\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ 有意义，必须使 $x \geqslant 0$ 和 $x \neq 2$ 同时成立，因此这个函数的定义域是 $\{x \mid x$

$\geqslant 0$，且 $x \neq 2\}$。用区间可表示为：$[0,2)\cup(2,+\infty)$。

三、函数的值域

函数的值域是指一个函数所有函数值的集合。当自变量 x 在定义域 D 内取一个确定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 对应的函数值记为 $f(x_0)$。

例如，二次函数 $f(x)=x^2+2x-1$，在 $x=0$，$x=2$ 时函数值分别为 $f(0)=-1$，$f(2)=7$。

例 2　已知函数 $f(x)=3x+5$，$x\in\{0,1,2,3\}$，求这个函数的值域。

解　$f(0)=3\times0+5=5$，$f(1)=3\times1+5=8$，$f(2)=3\times2+5=11$，$f(3)=3\times3+5=14$。

所以函数 $f(x)=3x+5$ 的值域是 $\{5,8,11,14\}$。

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\in(-\infty,0)\\ 2x+1, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$。

解　函数 $f(x)$ 的定义域是全体实数，但在定义域的不同部分上，对应法则 f 用不同的公式表示。因此

$f(-2)=-(-2)=2$；$f(0)=2\times0+1=1$；$f(3)=2\times3+1=7$。

从例 3 可以看出，有些函数在它的定义域中，它的自变量 x 在不同取值范围，对应法则不同。这样的函数通常称为分段函数。

四、函数的表示法

函数的表示法通常有以下三种：

1. 解析法

把两个变量之间的函数关系用等式表示，这种表示函数的方法叫做**解析法**。

例如，$y=x^2$，$y=2x$，$S=\pi r^2$，$y=\sqrt{x}$等都是用解析法表示的函数。

2. 列表法

所谓**列表法**，是指用表格来表示两个变量之间函数关系的方法。

例如，$y=\sin\alpha$ 几个特殊角的三角函数值表如下：

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 图像法

所谓**图像法**，是指用图像来表示两个变量之间函数关系的方法。

例如，一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图像是直线；二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图像是对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$的抛物线；反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq0$）的图像是双曲线。

此外，有的函数的图像也可以是一些点或几条线段等。我们通常采用描点法表示这些函数。

例 4　某种钢笔，每支 5 元，买 n 支钢笔的钱数（元）为 $f(n)=5n$，$n\in\mathbf{N}_+$，画出这个函数的图像。

解　这个函数的图像是由一些点组成的，如图 1-5 所示。

例 5 画函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\in[0,+\infty)\\ -x, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$ 的图像。

解 这个函数的图像是由两条射线组成的，如图 1-6 所示。

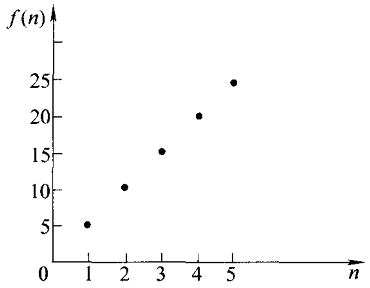


图 1-5

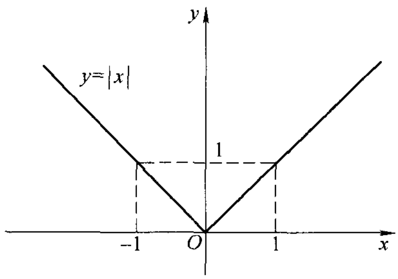


图 1-6

五、函数的单调性

函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内，y 值随着 x 的增大而减小，在区间 $(0, +\infty)$ 内，y 值随着 x 的增大而增大，如图 1-7 所示。

一般地，对于给定区间上的函数 $f(x)$：

1）如果对于这个区间上的任意两个变量 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**增函数**（或单调递增函数），如图 1-8a 所示。

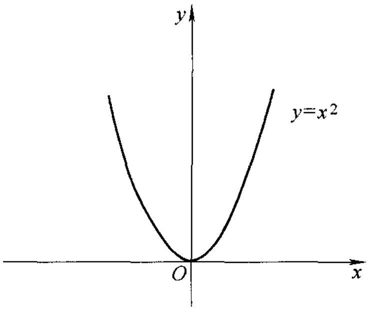


图 1-7

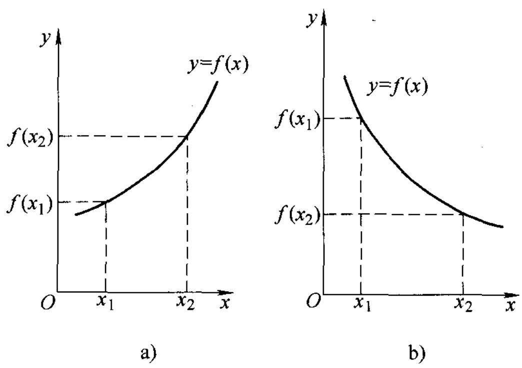


图 1-8

2）如果对于这个区间上的任意两个变量 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**减函数**（或单调递减函数），如图 1-8b 所示。

对于函数 $y=f(x)$ 在某个区间上单调递增或单调递减的性质，叫做 $f(x)$ 在这个区间上的**单调性**，这个区间叫做 $f(x)$ 的**单调区间**。

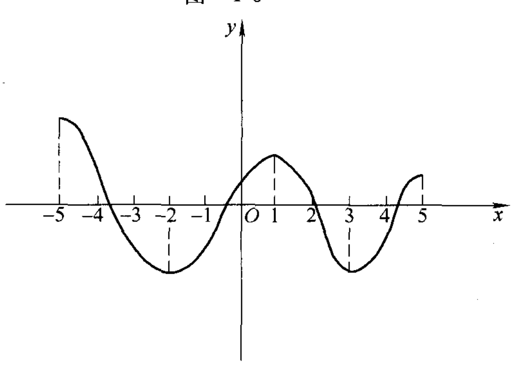


图 1-9

例 6 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-5, 5]$，如图 1-9 所示，根据图像指出函数 $y=f(x)$

的单调区间以及在每一个单调区间上函数 $y=f(x)$ 是增函数还是减函数？

解 函数 $y=f(x)$ 的单调区间有：$[-5,-2)$、$[-2,1)$、$[1,3)$、$[3,5]$。其中 $y=f(x)$ 在区间 $[-5,-2)$、$[1,3)$ 是减函数；在区间 $[-2,1)$、$[3,5]$ 是增函数。

习 题 1-2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$；(2) $f(x)=\sqrt{2x-1}+3$；(3) $f(x)=\sqrt{x+2}+\dfrac{5}{x-2}$。

2. 已知函数 $f(x)=2x^2+3x-1$，求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(2)$ 以及函数的值域。

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\in[0,+\infty)\\ 1-2x, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$，求 $f(-3)$、$f(0)$、$f(1)$ 的值。

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像（见图 1-10），根据图像写出函数的单调区间以及在每个区间上函数的增减性。

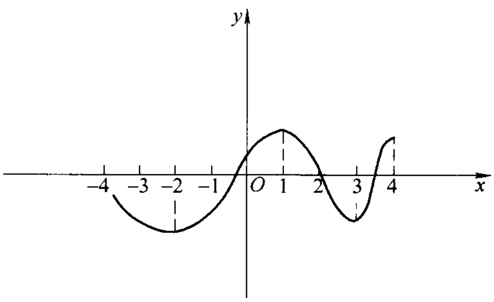


图 1-10

5. 已知函数 $y=kx+b$ 是增函数，则 $f(-2)$ 与 $f(2)$ 哪个函数值大？如果函数 $y=kx+b$ 是减函数，结果有什么变化？

6. 画出下列函数的草图，指出函数的单调区间，并判别它们在各单调区间的增减性。

(1) $f(x)=3x$；(2) $f(x)=x^2+1$。

第三节 二次函数的应用

在实际生活以及生产实践中，常常会遇到“在什么条件下，容积最大，用料最省”等问题，这一类问题就是数学中求函数的最大值或最小值的问题。

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （$a\neq 0$）的图像是对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的抛物线，其顶点为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，它的顶点是最低点，如图 1-11a 所示，也就是说，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数 y 的值最小，且 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，它的顶点是最高点，如图 1-11b 所示，也就是说，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数 y 的值最大，且 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

例 1 求二次函数 $y=x^2+2x-5$ 的最小值或最大值。

解 配方得
$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+2x-5\\&=(x+1)^2-6。\end{aligned}$$

因为 $a=1>0$，所以函数有最小值。当 $x=-1$ 时，$y_{\min}=-6$

也可以利用公式 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{4\times1\times(-5)-2^2}{4\times1}=-6$。

例 2 某工厂有三角形下角料（见图 1-12），$\triangle ABC$ 底边 $AC=30\text{cm}$，高 $BD=20\text{cm}$，如果截成一个矩形，那么，这个矩形高为多少时，它的面积最大？

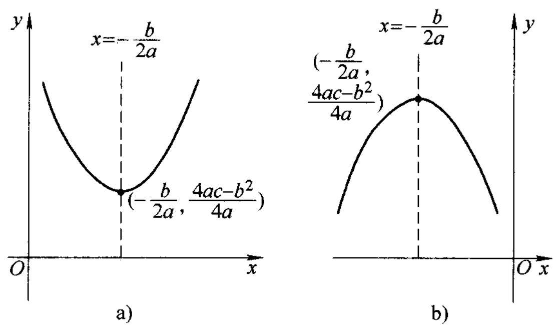


图 1-11

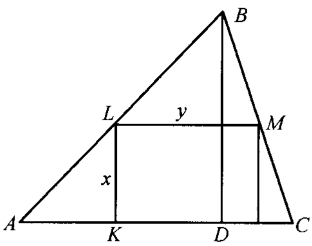


图 1-12

解 设矩形的高为 $x\text{cm}$，长为 $y\text{cm}$，矩形面积 $S=xy$。

因为在三角形 ABC 中，$LM /\!/ AC$ 且 $LK /\!/ BD$，

所以 $\dfrac{y}{30}=\dfrac{20-x}{20}$

$y=\dfrac{3}{2}(20-x)$。

由 $S=xy=x\cdot\dfrac{3}{2}(20-x)$

$=-\dfrac{3}{2}x^2+30x$

$=-\dfrac{3}{2}(x^2-20x)$

配方后得：

$S=-\dfrac{3}{2}[(x-10)^2-100]$。

因为 $a=-\dfrac{3}{2}<0$，所以函数有最大值。当 $x=10$ 时，$S_{\max}=150\text{cm}^2$。

即，当矩形的高为 10cm 时，它的面积最大，为 150cm^2。

习 题 1-3

1. 用配方法求下列二次函数的最大值或最小值：

(1) $y=x^2-2x+3$；(2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{5}{2}$。

2. 用一根长 40cm 的铁丝围成长方形框架，要想使框架所围的面积最大，它的两边长应各为多少厘米？

3. 某农户想利用一面旧墙（长度够用）围一个矩形鸡场，已知现有篱笆材料可围 100m 长，当矩形的

长、宽各为多少时，所围的鸡场面积最大？（见图 1-13）

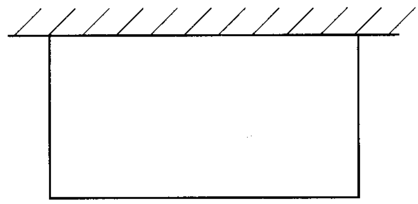


图 1-13

本章小结

本章的主要内容包括：集合、函数及其应用。

1. 集合

集合是数学的基本概念。具有共同性质的对象的全体形成一个集合。集合里的每一个对象都是集合的元素。元素与集合的关系是从属关系，这是一种个体与整体的关系。

1）集合具有以下特性：确定性、互异性和无序性。

2）集合的表示法有：列举法和描述法。

3）集合与它的子集关系为：集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$。如果 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$，那么 $A=B$。集合与它的子集的关系是包含与被包含的关系，一般地说是一种整体与部分的关系。

空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$。

4）交集和并集：设 A、B 是任意的两个集合，那么 A 与 B 的交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；A 与 B 的并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。

2. 函数

函数是数学中重要的基本概念。函数概念由三个要素所构成：即函数的定义域、对应法则和函数值域。

确定一个函数的定义域，通常应根据两种情况：

1）对于实际问题，自变量的取值集合要保证问题有实际意义。

2）对于数学式子，自变量的取值集合要保证式子有意义。

一般地，解析式的自变量受到以下条件的制约：

① 分式的分母不能等于零。

② 偶次根式的被开方数不能小于零。

3. 函数的单调性

函数的单调性是函数的一个重要性质。

如果对于这个区间上的任意两个变量 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数。如果对于这个区间上的任意两个变量 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。

增函数的图像由左向右逐渐上升；减函数的图像由左向右逐渐下降。

4. 二次函数的应用

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图像是抛物线，它的顶点为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。当 a