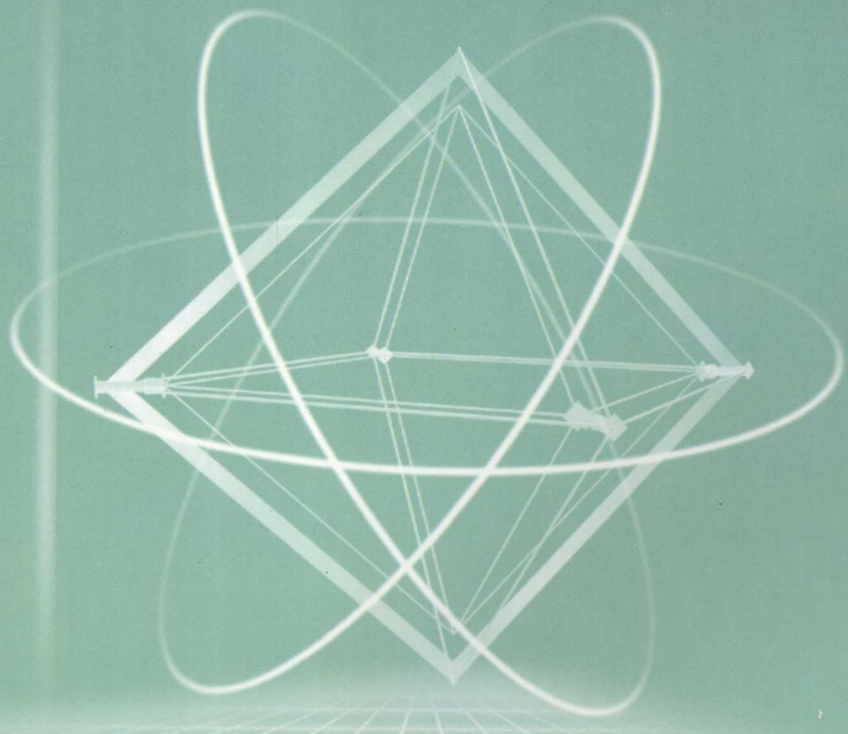
机电专业数学基础

一元微积分

（高职高专试用教材）

李颖颖　编



中国地质大学出版社

机电专业数学基础

一元微积分

（高职高专试用教材）

武汉职业技术学院机电工程学院

李颖颖 编

中国地质大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一元微积分/李颖颖编. 一武汉:中国地质大学出版社,2005.9
ISBN 7-5625-2037-2

Ⅰ. 一…
Ⅱ. 李…
Ⅲ. 微积分-一元-高职高专类
Ⅳ. O172

一元微积分 李颖颖 编

责任编辑:段连秀 技术编辑:阮一飞 责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号) 邮编:430074
电话:(027)87482760 传真:87481537 E-mail:cbb@cug.edu.cn
经销:全国新华书店 http://www.cugp.cn

开本:787毫米×1092毫米 1/16 字数:185千字 印张:7
版次:2005年9月第1版 印次:2005年9月第1次印刷
印刷:武汉教文印刷厂 印数:1—2 000册

ISBN 7-5625-2037-2/O·71 定价:13.00元

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

前　言

高等数学是学习现代科学技术必不可少的基础知识，高等数学中的“一元函数微积分”是高职高专学校工科各专业的一门重要的基础课，又是一门重要的工具课．根据高职高专院校工科专业的培养目标，本教材的任务是：使学习者在已学过初等数学的基础上，进一步学习极限思维的分析方法和相关的数学理论，使学习者具备一定的逻辑推理、抽象概括问题以及较熟练的基本运算的能力．能初步运用微积分理论去分析和解决简单的实际问题，为学习后续专业课程打下一定的数学基础．

根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》，并充分考虑到现阶段高职高专院校学生的实际．本教材在注重保持数学自身的系统性、逻辑性的同时，力求使内容的表述深入浅出、通俗易懂．略去了较复杂定理的推导证明，尽量使定理的导出直观化、具体化，以便于课堂教学和课余自学．

教材中标有“*”的内容可供学时较多的专业和学有余力的学生选用．本书教学建议课时列表如下：

序号	教学内容	必学时数
1	函数的极限与连续	12
2	导数、微分及其应用	24
3	不定积分	12
4	定积分及其应用	12
5	复习与机动	4
	总　学　时	64

编　者

2005 年 6 月

目　录

第一章　函数的极限与连续

第一节　函　数

物质是运动的.一切客观事物都是在不断发展变化的.事物的变化总是按一定规律相互关联的.这反映到数学上就是变量之间的函数关系.函数是用数学解决实际问题的一个极其重要的研究对象.

一、变量、区间

1. 常量、变量

在实际的问题中,我们常会面对许多不同数值的量.在某一变化过程中,其数值始终保持不变的量叫做常量,而数值发生变化的量则叫做变量.如:在一个密闭容器中加热、融化冰块时,当冰块未全部融化为水时,冰和水的温度保持不变,是常量;而水的体积由于不断增大,成为变量.一般用 a、b、c 或 A、B、C 等表示常量,而用字母 x、y、z 或 X、Y、Z 以及 t、u、v 等表示变量.

2. 区间

实际问题中,变量和常量在一定条件下是可以相互转化的.如在前面例子中,密闭容器中融化冰块时,当冰块全部化为水时,水的体积不再增大,成为常量;而水温则开始上升,成为变量.因此,需要将变量的变化范围加以标定.数学上常用区间来表示变量 x 的变化范围.设 a、b 为两个实数,且 $a<b$.满足 $a<x<b$ 的实数全体叫做开区间,记为 (a,b);满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数全体叫做闭区间,记做 $[a,b]$;而满足 $a<x\leqslant b$ 及 $a\leqslant x<b$ 的实数全体则叫做半开区间,分别记为 $(a,b]$ 及 $[a,b)$.上述区间称为有限区间.若 a,b 分别用负无穷大 $(-\infty)$ 和正无穷大 $(+\infty)$ 取代时,还有无限区间:$(a,+\infty)$ 表示大于 a 的全体实数的集合;$[a,+\infty)$ 表示不小于 a 的全体实数的集合;$(-\infty,b)$ 表示小于 b 的全体实数的集合;$(-\infty,b]$ 表示不大于 b 的全体实数的集合;$(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数的集合.

3. 邻域

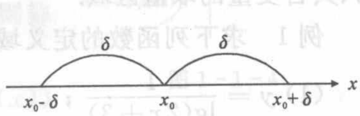


图 1-1-1

邻域是一个特殊的区间,在数轴上(如图 1-1-1),一个以 x_0 点为中心,以正数 δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 域.记为 $U(x_0,\delta)$.显然,该邻域内任何一点 x 到 x_0 点的距离都小于 δ.即有 $|x-x_0|<\delta$.

二、函数的概念

我们知道,一个圆金属板的面积 S 与其半径 r 的关系为 $S=\pi r^2$,当金属板受热膨胀时,半径 r 发生变化,对于变化中的每一个 r 值,圆板面积 S 都按计算式 $S=\pi r^2$ 中的某一确定值 S

与r对应.

我们称变量S与r有函数关系.一般地,有如下函数的定义:

1. 函数定义

定义1　设y与x是同一变化过程中的两个变量,如果当x在其变化范围D内任取一个数值时,变量y按一确定的法则f都有确定的值与之对应,则称y是x的函数.记为$y=f(x)$.式中,x称为自变量,y称为x的函数.

x的取值范围D称为函数的定义域.当x取遍D中所有数值时,对应的函数值的全体称为函数的值域W.

在同一问题中,如果出现几个函数,则需用不同的函数记号分别表示.如用f、φ、ψ表示不同的函数关系,则有不同的函数$y=f(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=\psi(x)$.

定义域和对应关系称为函数的两要素。两个函数只有它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才是完全相同的.因此,当保持一个函数的定义域和对应关系不变时,该函数式中的自变量和函数字母可以用不同的字母取代,所得到的函数与原来的函数为同一函数.

如　函数　$y=2x+1$　与函数　$S=2t+1$,由于两者的定义域和函数对应关系是相同的,因此,它们是同一函数.

对于一个确定的自变量,如果函数只有惟一的值与其对应,则该函数称为单值函数.否则叫做多值函数.如函数$y=x^2+1$为单值函数,而$y^2=3x+1$为多值函数,其中$y=\sqrt{3x+1}$和$y=-\sqrt{3x+1}$是它的两个单值.

以后如果没有特别说明,我们讨论的都是单值函数.

有些函数在其定义域内的不同范围里,需要用不同的函数式表示,这类函数称为分段函数.如:

$$y=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ \cos x, & x>0\end{cases},\text{(见图 1-1-2)}$$

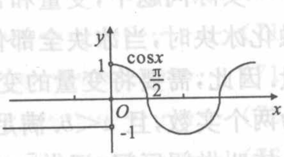


图 1-1-2

函数除了可以用数学式表示之外,也常用表格和图像表示.如三角函数表、工厂里的"投入产出"计划表等,属于函数的表格表示;而函数在各类坐标系下的曲线图形,则是函数的图像表示.

函数的定义域对于确定一个函数具有非常重要的意义.函数的定义域就是使函数有意义的、其自变量的取值区域.

例1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(2x+3)}$;

(2) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{2}+\arctan(x+1)$;

(3) $y=\dfrac{x-1}{x+2}+\sqrt{x^2-x-2}$;

解:(1) 为使函数有意义,则须

$$\begin{cases}2x+3>0\\ 2x+3\neq 1\end{cases},\text{ 即}\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\ x\neq -1\end{cases},$$

所以函数的定义域为$(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,+\infty)$；

(2) 为使函数有意义，则须

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{1-x}{2}\leqslant 1\\ -\infty<x+1<+\infty\end{cases}，\quad 即 -1\leqslant x\leqslant 3，$$

所以函数的定义域为$[-1,3]$；

(3)由 $\begin{cases}x+2\neq 0\\ x^2-x-2\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\neq 2\\ (x+1)(x-2)\geqslant 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x\neq -2\\ x\geqslant 2 或 x\leqslant -1\end{cases}$

所以函数的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[2,+\infty)$.

2. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$（称直接函数）的定义域为 D，值域为 W. 若对于 W 中的每一个 y 值，都可由函数式 $y=f(x)$ 确定出惟一的 x 值（$x\in D$）与之对应. 则由 $y=f(x)$ 得出的、以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 其定义域为 W，值域为 D.

如 $y=2x+1$ 的反函数为 $x=\frac{1}{2}(y-1)$；而对于 $y=x^2$ 由于 y 和 x 的值不是惟一对应的，因而 $y=x^2$ 没有反函数. 但如将其定义域$(-\infty,+\infty)$分为两个区间$(-\infty,0)$和$[0,+\infty)$，则 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内的反函数为 $x=-\sqrt{y}$，$(y>0)$，而在$[0,+\infty)$内的反函数为 $x=\sqrt{y}$，$(y\geqslant 0)$.

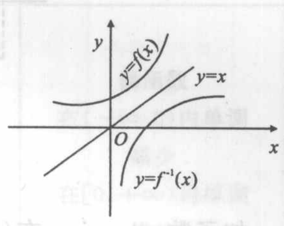


图 1－1－3

习惯上，函数用符号 y 表示，自变量用符号 x 表示，所以反函数通常用 $y=f^{-1}(x)$ 表示.

直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在单位长度相等的直角坐标系中是对称于直线 $y=x$ 的.（见图 1－1－3）.

三、函数的几种特性

1. 奇偶性

定义 3 若在函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 内（$\pm x\in D$），总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数.

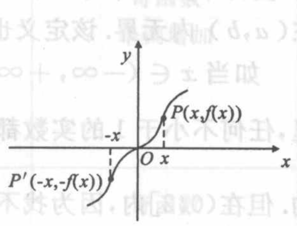


图 1－1－4

对于奇函数，由于 $f(-x)=-f(x)$，因此当点 $P(x,f(x))$ 在图形上时，与 P 点关于原点对称的点 $P'(-x,-f(x))$也在图形上，即奇函数的图形是关于原点对称的.（参见图 1－1－4）.

对于偶函数，由于 $f(-x)=f(x)$，因此当点 $P(x,f(x))$ 在图形上时，与 P 点关于 y 轴对称的点 $P'(-x,f(x))$ 也在图形上，即偶函数的图形是关于 y 轴对称的.（参见图 1－1－5）.

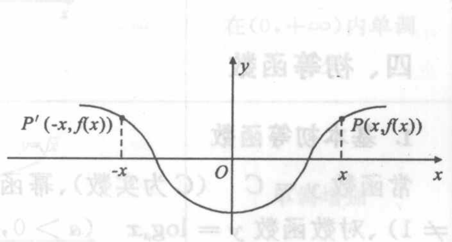


图 1－1－5

2. 周期性

定义 4 对于函数 $y=f(x)$，若存在正实数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足该等式的最小正实数 T 叫做函数 $f(x)$ 的周期.

如，由于 $\tan x=\tan(x+\pi)=\tan(x+2\pi)=\cdots$

因此 $\tan x$ 是周期函数，且周期为 π.

3. 单调性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，且 x_1、x_2 为 (a,b) 内任意两点，若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，(参见图 1-1-6 (a))；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的. (参见图 1-1-6(b)).

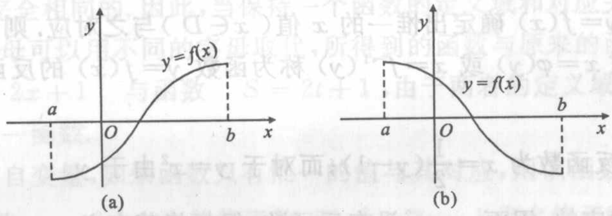


图 1-1-6

如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内是单调增加的，但在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内却是单调减少的. 这样，对于整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 而言，函数 $y=\sin x$ 没有单调性. 通常称它为分段单调函数.

4. 有界性

定义 6 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对所有的 $x\in(a,b)$ 时，存在某个正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界；若这样的数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界. 该定义也适用闭区间或无穷区间的情形.

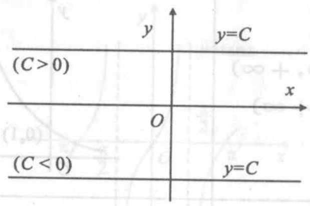
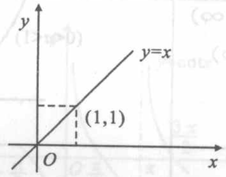
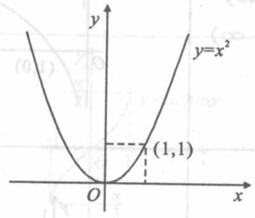
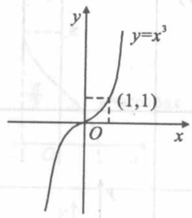
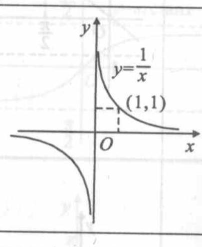
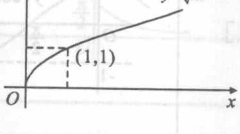
如当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，由于 $|\sin x|\leqslant 1$，所以在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$\sin x$ 是有界的. 这里，任何不小于 1 的实数都可以作为 M. 又如，在 $[1,2]$ 内，因为 $\frac{1}{x}\leqslant 1$，所以函数 $\frac{1}{x}$ 是有界的. 但在 $(0,2]$ 内，因为找不到一个确定的正数 M，使得 $|\frac{1}{x}|\leqslant M$ 成立，所以在 $(0,2]$ 内，函数 $\frac{1}{x}$ 无界.

四、初等函数

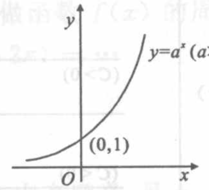
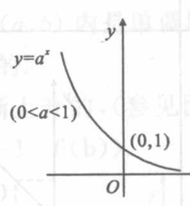
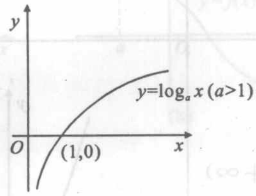
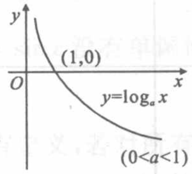
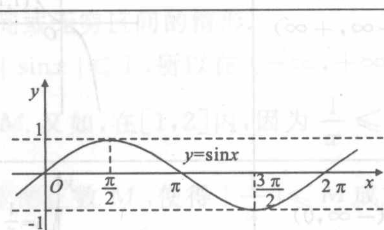
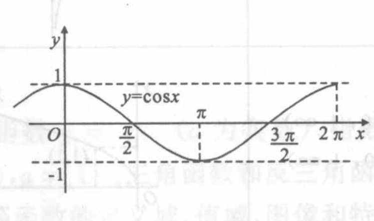
1. 基本初等函数

常函数 $y=C$ （C 为实数）、幂函数 $y=x^a$ （a 为实数）、指数函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq 1$）、对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0,a\neq 1$）、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 为方便起见，现将一些常见的基本初等函数的定义域、值域、图像和特性列于表 1-1-1 中.

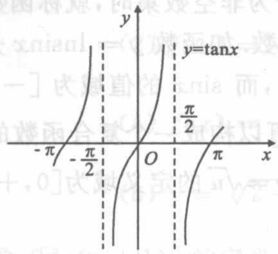
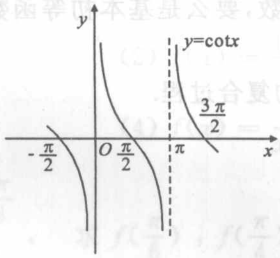
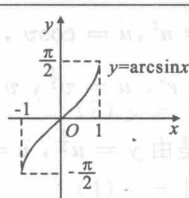
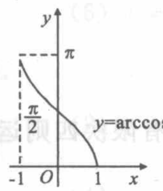
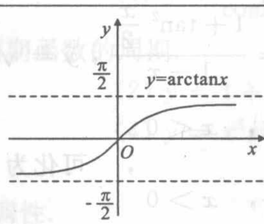
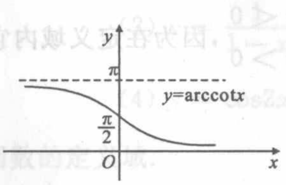
表 1-1-1

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
常函数	$y=C$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=C$		偶函数
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$[0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表 1-1-1

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加

续表 1-1-1

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. 复合函数

定义 7 设 y 是 u 的函数 $(y=f(u))$，u 又是 x 的函数 $(u=\varphi(x))$，则当 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的重叠部分为非空数集时，就称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合构成的函数. 简称复合函数. 如函数 $y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=\sin x$ 复合构成的，其中 $\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而 $\sin x$ 的值域为 $[-1,1]$，两区域的重叠区间为 $(0,1]$.

并不是任意两个函数都可以构成一个复合函数的. 如函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\arcsin x-2$ 就不能构成一个复合函数. 因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，而 $u=\arcsin x-2$ 的值域为 $[-3,-1]$，两区域没有重叠区间.

复合函数也可由两个以上的函数复合而构成. 在分析复合函数的复合过程时，一般来讲，复合函数的每一个中间层函数，要么是基本初等函数，要么是由若干个较简单函数的和、差、积、商算式构成的函数.

例 2 分析下列各函数的复合过程.

(1) $y=\cos^2 3x$；

(2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$；

(3) $y=\sqrt{\ln\dfrac{1-\sin^2 x}{1+2x}}$.

解：(1) $y=\cos^2 3x$ 是由 $y=u^2, u=\cos v, v=3x$ 复合而成的；

(2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=e^u, u=v^{\frac{1}{2}}, v=x^2+1$ 复合而成的；

(3) $y=\sqrt{\ln\dfrac{1-\sin 2x}{1+2x}}$ 是由 $y=u^{\frac{1}{2}}, u=\ln v, v=\dfrac{1-\sin 2x}{1+2x}$ 复合而成，其中第三层函数 $v=\dfrac{1-\sin 2x}{1+2x}$ 的分子中又有一个两层的复合函数 $\sin 2x$，它可分解为 $s=\sin t, t=2x$.

3. 初等函数

定义 8 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

如 $y=\sin(x^2-1)$，$y=\dfrac{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}{1-x}$，$y=\sqrt{\sin x+\cos 2x}$ 等都是初等函数.

由于分段函数 $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x<0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，可化为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$，所以该分段函数是初等函数.

而分段函数 $y=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$，因为在定义域内它不能用一个式子来表示，所以它不是初等函数.

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$； (2) $f(x)=\sqrt{5x+3}$；

(3) $f(x)=\arcsin(x^2-3)$； (4) $f(x)=\dfrac{1}{\lg(2-x)}+\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$；

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}+\arctan\dfrac{x}{2}$； (6) $y=\sqrt{2-x}-e^{\frac{1}{x-1}}$.

2. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1,10]$，求 $f[\lg(x+1)]$ 的定义域.

3. 下列函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$； (2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=1$；

(3) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$； (4) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，$g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & x<\dfrac{\pi}{4}\\ \cos x, & x\geqslant\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$，求 $f(\dfrac{\pi}{6})$，$f(\dfrac{\pi}{4})$，$f(\dfrac{\pi}{2})$.

5. 判定下列函数的奇偶性.

(1) $y=\sin 3x-\sqrt[3]{x}$； (2) $y=\dfrac{x\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$；

(3) $y=\dfrac{a^{-x}-a^{x}}{2}$； (4) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；

(5) $y=\lg(x-\sqrt{1+x^2})$； (6) $y=(x^2+1)\cos\dfrac{1}{x}$.

6. 判定下列函数在指定区间中的有界性.

(1) $y=1+\arctan x$，$(-\infty,+\infty)$； (2) $y=\dfrac{1}{x^3}$，$(0,2)$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sin 2x}$，$(0,\dfrac{\pi}{4})$； (4) $y=\dfrac{1}{\cos 2x}$，$(0,\dfrac{\pi}{6})$.

7. 判定下列函数的周期性，并求出周期函数的周期.

(1) $y=a^x+\sin x$； (2) $y=1+\cos x$；

(3) $y=2+\tan 3x$； (4) $y=x^2\sin x$；

(5) $y=\cos^2 2x$.

8. 判定下列函数在指定区间中的单调性.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$，$(-2,0)$； (2) $y=\dfrac{1}{1-x}$，$(-1,0)$；

(3) $y=\lg x$，$(0,+\infty)$； (4) $y=\cos 2x$，$(0,\dfrac{\pi}{2})$.

9. 求下列函数的反函数，并指明反函数的定义域.

(1) $y=2x+3$； (2) $y=2^{-3x}-1$；

(3) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$； (4) $y=\lg(2x+1)-1$.

10. 将下列复合函数分解成简单函数.

(1) $y=(x+1)^2$；　　(2) $y=\lg(2-x)$；

(3) $y=\sin\lg\dfrac{x}{2}$；　　(4) $y=\sqrt{\arctan(-x)}$；

(5) $y=\cos^2(1-2x)$；　　(6) $y=\lg\cos e^{2x+1}$.

第二节 极 限

一、数列的极限*

对于无穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$;记为 $\{x_n\}$,我们常常要探讨当项数 n 无限增大时,其一般项 x_n 的数值会如何变化的问题.

例 1 数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 当项数 n 无限增大时,其一般项 $x_n=\frac{1}{n}$ 的值在大于零的右边无限趋向于零,(如图 1-2-1).

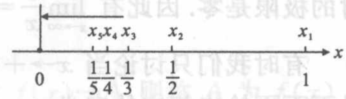


图 1-2-1

例 2 数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{6}{5},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$. 当 n 无限增大时,其一般项的值 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 在 1 的两侧来回跳动无限趋向于 1,(如图 1-2-2).

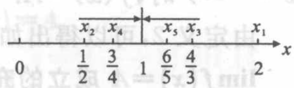


图 1-2-2

上述两例中,数列的一般项 x_n 的数值,在 n 无限增大时各分别趋向某一常数. 我们将数列一般项的这种变化情况归纳为如下定义.

定义 1 如果当 n 无限增大时,数列一般项 x_n 的数值无限接近于一个确定的常数 a ,则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$;或记为当 $n\to\infty$时,$x_n\to a$.

由此定义知:例 1 中,因为当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{n}\to 0$,所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;例 2 中,因为当 $n\to\infty$ 时,$\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\to 1$,所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

每一项数值都相同的数列 $\{c\}$, 称为常数列. 常数列的极限等于常数本身. 如对数列 $\{-3\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)=-3$.

如果当 n 无限增大时,数列的一般项的值不无限接近一个确定的常数,则该数列没有极限,称该数列是发散数列.

如数列 $\{3^n\}$,当 n 无限增大时,$x_n=3^n$ 也无限增大,不能趋向一个确定数,所以数列 $\{3^n\}$ 是发散的.

又如数列 $\{(-1)^n\}$,当 n 无限增大时,因为 $x_n=(-1)^n$ 的数值在-1 和 1 两者之间来回变动,不能趋向一个确定的常数,故该数列 $\{(-1)^n\}$ 也是发散的.

二、函数的极限

因为数列一般项的值是随项数 n 的变动而变化的,所以实际上数列 $\{x_n\}$ 可以看作是正整数 n 的函数,$\{x_n\}=f(n)$. 数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,只是一种自变量 n 取正整数且无限增大时的、函数 $f(n)$ 的极限. 对于一般函数 $y=f(x)$,我们有下面两种极限的定义.

定义 2 如果当 x 的绝对值无限增大 ($x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$) 时,函数 $f(x)$ 无限接近于