陈殿友 主编

2008全国硕士研究生入学考试辅导教材

数学

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

陈殿友 主编

2008 全国硕士研究生入学考试辅导教材

数学

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是按照教育部制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"编写的2008年考研数学辅导教材，全书共分三部分. 第一部分：高等数学；第二部分：线性代数；第三部分：概率论与数理统计.

本书按内容分块，每一块为一讲，在每讲中先讲基本理论，再讲典型例题，在每讲的后面配备了类型全面的习题，用以检查读者学习掌握知识的程度.

本书内容丰富适当，解题方法典型，习题全面新颖，适合于理工类和经管类所有准备参加研究生入学考试的考生复习之用.

图书在版编目（CIP）数据

2008全国硕士研究生入学考试辅导教材：数学/陈殿友主编. —北京：清华大学出版社，2007.6

ISBN 978-7-302-15078-7

Ⅰ. 数… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第055303号

责任编辑：佟丽霞 王海燕
责任校对：刘玉霞
责任印制：何 芊

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175
投稿咨询：010-62772015
地 址：北京清华大学学研大厦A座
邮 编：100084
邮购热线：010-62786544
客户服务：010-62776969
印 刷 者：北京人民文学印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 **印 张**：31.75 **字 数**：753千字
版 次：2007年6月第1版 **印 次**：2007年6月第1次印刷
印 数：1～4000
定 价：39.80元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177转3103 产品编号：023749-01

前　　言

本书是为迎接2008年全国硕士研究生入学考试而编写的数学辅导教材.我们注意到,在准备考研的考生中,大家共同感到数学(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计)是比较难复习的科目.从2003年起,国家教育部对硕士研究生入学考试进行了改革,考试科目数减少到4科,数学卷面总分为150分,加重了数学在研究生入学考试中(理工、经管类专业)的分量.因此,如何进行数学课程的复习成为了所有考生十分关心的问题.为了帮助广大考生能在研究生入学考试中得到理想的分数,实现自己的梦想,我们编写了《2008全国硕士研究生入学考试辅导教材——数学》.

为了使读者获得良好的复习效果,我们在编写中贯彻了如下指导思想:

1. 严格按照教育部制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求编写.

2. 力争做到:跟踪命题走向,抓住出题心理,研究考题思路,贴近考研题型.通过对辅导教材的学习,使考生达到事半功倍的效果.

根据上述指导思想编写的《2008全国硕士研究生入学考试辅导教材——数学》具有如下特色:

1. 本书融进了多年考研辅导班授课教师的授课经验和积累的丰富材料;

2. 本书通过对研究生入学考试知识点的精选总结和典型例题的深入分析,突出体现数学的思想、方法和技巧,使考生不但通过复习能够熟悉试题的类型,更能掌握解决问题的方法;

3. 本书深入地分析了历年来研究生入学考试数学试题的特点,从试题内容的分类和解决方法上进行了认真的研究,使得本书适合理工类和经济类的所有考生;

4. 本书在典型例题的编写中,对历年研究生入学数学试题都在例题的右上角用①②③④做了标注,用以表示是历年研究生入学数学一、二、三、四试卷中的试题;

5. 书后附有2007年全国硕士研究生入学考试数学试题及参考答案,有利于考生对最新考试情况的了解.

参加本书编写的教师有赵建华(一元微分学)、白岩(一元积分学)、马富明(级数、方程与空间解析几何)、孙毅(多元微积分)、马振生(行列式、矩阵、向量)、陈殿友(线性方程组、特征值与特征向量、二次型)、高文森(概率论与数理统计).本书的编写得到了吉林大学数学学院领导和数学教研中心领导的高度重视和大力支持,清华大学出版社对本教材的编辑和出版工作给予了大力支持,在此一并致谢.

由于时间比较仓促,书中的疏漏和不妥,敬请读者不吝赐教.

编　者

2007年3月

目　录

第一部分　高等数学

根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的要求，我国硕士研究生入学考试数学统考试卷分为数学一、数学二、数学三和数学四．高等数学是数学一、数学二、数学三和数学四的考试科目之一．在数学一试卷中高等数学内容约占56%，在数学二试卷中高等数学内容约占78%，在数学三和数学四试卷中高等数学内容各约占56%．

第一讲　函数、极限与连续

本讲要点： 1. 函数的概念及函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；
2. 反函数及复合函数、分段函数、初等函数；
3. 极限的概念、无穷小和无穷大；
4. 极限的性质和运算法则；
5. 极限存在的两个准则、两个重要极限；
6. 无穷小的比较；
7. 洛必达法则；
8. 函数的连续性与间断点；
9. 连续函数的性质和初等函数的连续性；
10. 闭区间上连续函数的性质．

一、内 容 提 要

1. 极限

1）极限的定义

（1）数列极限　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$．

（2）函数极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

仔细区分，又有$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$等．

（3）重要关系　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$．

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

(4) 海涅(Heine)定理　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0$ 的任何 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

2) 极限的性质和运算法则

(1) 有界性　若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界.

若 $\lim f(x) = A$，则存在 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内 $f(x)$ 有界(对于 $x \to x_0$，$\mathring{U}$ 表示 $0 < |x - x_0| < \delta$；对于 $x \to \infty$，$\mathring{U}$ 表示 $|x| > X$).

(2) 保号性　若 $\lim f(x) = A > B$，则存在 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内 $f(x) > B$.

推论　若存在 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内 $f(x) \geqslant B$，且 $\lim f(x) = A$，则 $A \geqslant B$.

(3) 极限的四则运算法则　设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;\ \lim[f(x)g(x)] = AB;\ \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

设 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不存在.

(4) 复合函数的极限　设 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = u_0, \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，且 $\exists\, \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$\varphi(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] \xlongequal{u = \varphi(x)} \lim_{u\to u_0} f(u) = A\text{(称为变量代换法)}.$$

3) 极限存在的两个准则、重要极限

(1) 单调有界原理　若数列 $\{x_n\}$ 单调增加(减少)且有上界 M(下界 m)，则 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant M(\geqslant m)$.

(2) 夹逼准则　设三个数列满足 $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

夹逼定理对于函数极限也成立.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

2. 无穷小和无穷大(以 $x \to x_0$ 为例)

1) 无穷小和无穷大的定义

(1) 无穷小　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小.

(2) 无穷大　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\, \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \geqslant M$.

仔细区分，又有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ 等.

(3) 无穷小与极限的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),\quad \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

(4) 无穷小与无穷大的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0;\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=0,\text{且 } f(x)\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty.$$

2) 无穷小和无穷大的运算性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积也是无穷小.

(2) 无穷小与有界函数的积是无穷小.

(3) 设 $\lim f(x)=+\infty$,$\lim g(x)=+\infty$,则$\lim[f(x)+g(x)]=+\infty$.

设 $\lim f(x)=-\infty$,$\lim g(x)=-\infty$,则$\lim[f(x)+g(x)]=-\infty$.

3) 无穷小的比较

(1) 无穷小的比较　设$\lim\alpha=\lim\beta=0$,且 $\alpha\neq 0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,称 β 是比 α 高阶的无穷小(或 α 是比 β 低阶的无穷小),记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,称 β 与 α 是同阶无穷小;当 $c=1$ 时,称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0(k>0)$,称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

(2) 重要的等价无穷小　$x\to 0$ 时,

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x-1\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

(3) 求积、商的极限时的等价无穷小代换

设在同一极限过程中 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$,$\beta(x)\sim\beta'(x)$ 且$\lim\dfrac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}f(x)$存在(或为$\infty$),则$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}f(x)=\lim\dfrac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}f(x)$.

4) 洛必达法则

(1) $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ 设 ① $\lim f(x)=\lim g(x)=0$;② $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}$ 内可导,且 $g'(x)\neq 0$;③ $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或为 ∞). 则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 洛必达法则对$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限($\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$)也成立.

3. 函数的连续性

1) 连续与间断

(1) $f(x)$ 在点 x_0 连续$\Leftrightarrow$① $f(x)$ 在$U(x_0)$内有定义;② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) $f(x)$ 在点 x_0 左连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

$f(x)$ 在点 x_0 右连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 左连续且右连续.

(3) $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续.

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且 $f(a^+) = f(a)$, $f(b^-) = f(b)$.

(4) 间断点分类

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点,若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$,则 x_0 为可去间断点,若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$,则 x_0 为跳跃间断点.可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点.

不是第一类间断点的间断点称为第二类间断点,包括无穷间断点,振荡间断点等.

2) 连续函数的运算

(1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 连续,则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 都在点 x_0 连续.

(2) 连续函数的反函数是连续函数.

(3) 连续函数的复合函数是连续函数.

(4) 一切初等函数在其定义区间内都连续.

3) 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则

(1) (有界性定理) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) (最值定理) $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,使

$$f(\xi_1) = M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(\xi_2) = m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

(3) (介值定理) $\forall \mu: m \leqslant \mu \leqslant M$, $\exists \xi \in [a,b]$,使 $f(\xi) = \mu$.

(4) (零点定理) 若 $f(a)f(b) < 0$,则 $\exists \xi \in (a,b)$,使 $f(\xi) = 0$.

二、典型例题

【例 1】 选择题

(1) 当 $x \to 0$ 时,变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是(　　).

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界的,但不是无穷小　　(D) 无界的,但不是无穷大

(2)[③④] 函数 $f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在区间(　　)内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

(3) 设 $y = y(x)$ 是二阶线性常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解,则当 $x \to 0$ 时,函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限(　　).

(A) 不存在　　(B) 等于 1　　(C) 等于 2　　(D) 等于 3

(4)[③④] 设对任意的 x,总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x \to \infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$,

则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

(5) 当 $x\to 1$ 时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A) 等于 2　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

(6)①② 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt$, $\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$, $\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是(　　).

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

(7) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　).

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B) 在 $x=0$ 处右极限不存在

(C) 有跳跃间断点 $x=0$　　(D) 有可去间断点 $x=0$

【解】 (1) 应选 (D). 本题关键在于弄清无穷大与无界变量之间的区别,无界变量不一定是无穷大. 如果取数列 $x_n^{(1)}=\dfrac{1}{n\pi}$, $x_n^{(2)}=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(1)})=\lim_{n\to\infty}(n\pi)^2\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(2)})=\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=+\infty,$$

表明当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 无界但不是无穷大.

(2) 应选(A). 本题中 $x=0,x=1,x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点,其中 $x=1,x=2$ 是无穷间断点,故 $f(x)$ 在 $x=1,x=2$ 的邻域内无界;而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, $x=-1$ 是 $f(x)$ 的连续点,故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界.

(3) 应选(C). 不需要解微分方程,条件只是变相地告诉我们 $y''(0)=1$, 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2.$$

(4) 应选(D). 由题设知 $0\leqslant f(x)-\varphi(x)\leqslant g(x)-\varphi(x)$, 再由 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 及夹逼准则,有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$. 从而 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在与否取决于 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 是否存在.

(5) 应选(D). 对于 $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$, 应考虑左、右极限,而

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

(6) 应选 (B). 由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{\tan\sqrt{x^2}\cdot 2x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan\sqrt{x^2}\cdot 2x}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x^2}{\frac{1}{2}x}=0,$$

故 α 的阶数最低，β 的阶数最高.

(7) 应选(D). 因为 $f(x)$ 是奇函数，有 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

$x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

【例 2】　填空题

(1) 设 $\forall x, f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，则 $f(x)=$______.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$______.

(3) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，则 $\varphi(x)=$______.

(4) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，则 $\varphi(x)=$______.

(5) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0$，且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$______.

【解】　(1) 应填 $\frac{1}{3}(x^2+2x-2)$. 由已知式有 $f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1$，即 $2f(x)+f(1-x)=x^2-1$. 与已知式联立，消去 $f(1-x)$ 可解得 $f(x)$.

(2) 应填 $x-1$. 注意到 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 为常数，记 $a=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=x+2a$. 两边积分，得

$$a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2a)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2a.$$

解上式得 $a=-\frac{1}{2}$.

(3) 应填 $\sqrt{\ln(1-x)}$. 因为 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

(4) 应填 $\dfrac{x+1}{x-1}$. 因为 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，所以 $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

又 $f[\varphi(x)]=\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$，则 $\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，解得 $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

(5) 应填 $b+a$. 因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$A=F(0)=\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+a\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=b+a.$$

1. 函数及其特性

【例 3】 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $x\in(2,3)$ 时，$f(x)=x^2$，求当 $x\in(-2,0)$ 时 $f(x)$ 的表达式.

【解】 当 $-2<x<-1$ 时，$2<x+4<3$，由周期性有

$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2.$$

当 $-1<x<0$ 时，$0<-x<1$，$2<-x+2<3$. 由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，有

$$f(x)=f(-x)=f(-x+2)=(-x+2)^2.$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2, & -2<x<-1,\\ (-x+2)^2, & -1<x<0,\end{cases}$$

在 $x=-1$ 处，$f(x)$ 无定义(由于所给条件中 $f(x)$ 在 $x=3$ 处无定义).

【例 4】 设 $f(x)=f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$，$n=2,3,\cdots$. 求 $f_n(x)$ 的表达式，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin f_n(x)$ 和 $\int_0^1 f_{15}(x)\mathrm{d}x$ 的值.

【解】 易知

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

设当 $n=k$ 时有 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则当 $n=k+1$ 时有

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(1+k)x^2}}.$$

由数学归纳法得

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\quad n=1,2,\cdots.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{1+nx^2}}=\operatorname{sgn}x.$$

由换元积分法得

$$\int_0^1 f_{15}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+15x^2}}=\frac{1}{15}\sqrt{1+15x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{5}.$$

【例 5】 求函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 的反函数及其定义域.

【解】 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数. $x>0$ 时 $f(x)>0$，$x<0$ 时 $f(x)<0$，$f(0)=0$. 下面证明 $x>0$ 时 $f(x)$ 单调增加.

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}.$$

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $f'(x)>0$，$x>\frac{1}{2}$ 时 $f'(x)>0$ 等价于

$$\frac{4x^2+4x+1}{x^2+x+1}>\frac{4x^2-4x+1}{x^2-x+1},\quad 即\quad 4-\frac{3}{x^2+x+1}>4-\frac{3}{x^2-x+1},$$

这显然成立. 从而 $x>0$ 时 $f(x)$ 单调增加，又

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1,$$

所以 $x>0$ 时，$y=f(x)$ 的值域为 $0<y<1$. 由 $f(x)$ 是奇函数，可得 $x<0$ 时，$y=f(x)$ 的值域为 $-1<y<0$.

在

$$y+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x^2+x+1}$$

两边平方得

$$2y\sqrt{x^2-x+1}=2x-y^2,$$

再平方得

$$4x^2(1-y^2)=y^2(4-y^2),$$

于是有

$$x=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}},\quad |y|<1,$$

所以

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{1+x^2}},\quad |x|<1.$$

【注】 讨论 $y=f(x)$ 的单调性是为了论证它有反函数并确定它的值域(即反函数的定义域).

2. 极限的求法和证法

1）利用恒等变形及常用极限

【例 6】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

【例 7】 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$.

【解】 当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)+\ln(1-x)=\ln(1-x^2)\sim-x^2$，所以

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)+(\sqrt{1-x}-1)}{-x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{x}{\sqrt{1-x}+1}\right)$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{4}.$$

【注】 本题在作等价无穷小代换后，用洛必达法则或用带佩亚诺余项的泰勒公式也很方便.

【例 8】 求下列极限：

(1) 设 $u_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}, x\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(2) 设 $x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 (1) 乘除 $\sin\frac{x}{2^n}$，得

$$u_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\Big/\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\Big/\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\frac{x\sin(x/2^n)}{x/2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2)

$$x_n=\frac{2^2-1}{2^2}\frac{3^2-1}{3^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\frac{1\times 3}{2^2}\frac{2\times 4}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

【例 9】 $[x]$ 表示不超 x 的最大整数，试确定常数 a 的值，使

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$$

存在，并求出此极限.

【分析】 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$，所以应讨论左、右极限.

【解】

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-a$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} - a = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} - a = -a,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})} + a[x]\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}+\ln(e^{-\frac{2}{x}}+1)}{\frac{1}{x}+\ln(e^{-\frac{1}{x}}+1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2+x\ln(e^{-\frac{2}{x}}+1)}{1+x\ln(e^{-\frac{1}{x}}+1)} = 2.$$

所以当且仅当 $a=-2$ 时所给极限存在，且极限为 2.

2）利用极限存在准则

【例 10】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【解】 记 $x_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，因为

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} < x_n < \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} = \frac{1}{2},$$

由夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right) = \frac{1}{2}.$$

【例 11】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x |\sin t|\,dt}{x}$.

【分析】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}|\sin x|$ 不存在，本题不能用洛必达法则. 注意到 $|\sin t|$ 是以 π 为周期的函数，先估计出 $\int_0^x |\sin t|\,dt$，然后用夹逼准则讨论本题.

【解】 设 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$，则

$$\frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\,dt < \frac{1}{n\pi}\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt = \frac{n+1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = \frac{2(n+1)}{n\pi},$$

同理

$$\frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\,dt > \frac{2n}{(n+1)\pi},$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi},$$

由夹逼准则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\,dt = \frac{2}{\pi}.$$

【例 12】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$，$x\geqslant 0$，求 $f(x)$ 的显式表达式.

【分析】 由于 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$，利用一个熟悉的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ $(a_1,a_2,\cdots,a_k>0)$ 及

$$\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2,\end{cases}$$

分三个区间讨论.

【解】 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$1\leqslant\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$，由夹逼准则知，$f(x)=1$.

当 $1<x\leqslant 2$ 时，

$$x\leqslant\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4}x,$$

令 $n\to\infty$，得 $f(x)=x$.

当 $x>2$ 时，

$$\frac{x^2}{2}\leqslant\sqrt[n]{1^2+1^2+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4}\,\frac{x^2}{2},$$

令 $n\to\infty$，得 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

综上可得

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

【例 13】 设 $0\leqslant a_n\leqslant a<1$，$n=1,2,\cdots$，

$$u_n=(1+a_1)(1+a_2^2)\cdots(1+a_n^n),$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在.

【分析】 易知 $\{u_n\}$ 单调增加，只需证明它有上界，为讨论方便，可先取对数.

$$\ln u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k^k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a^k),$$

注意到一个常用不等式 $\ln(1+x)<x$ $(x>0)$，有

$$\ln u_n<\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a-a^{k+1}}{1-a}<\frac{a}{1-a}.$$

从而 $u_n<e^{\frac{a}{1-a}}$.